



D. D. BOIANCIU
E. CARAGHEORGHE
M. RADES
L. GHERMANESCU IONESCU
E. HASEGANU ZAMFIRESCU
S. MURGULESCU
M. SAVU

MECANICĂ ȘI REZISTENȚA MATERIALELOR

EDITURA DIDACTICĂ
ȘI PEDAGOGICĂ,
BUCUREȘTI - 1982

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMINTULUI

Prof. dr. ing. DUMITRU D. BOIANGIU

Prof. ing. EMIL CARAGHEORGHE


Conf. dr. ing. MIRCEA RADEȘ

Șef. lucr. ing. LUCIA GHERMĂNESCU IONESCU

Șef. lucr. ing. ELIZA HAȘEGANU ZAMFIRESCU

Șef. lucr. ing. SABIN MURGULESCU


Asist. ing. MARIANA SAVU


15.05.1989.

MECANICĂ ȘI REZISTENȚA MATERIALELOR



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ – BUCUREȘTI


15.05.1989.

P R E F A Ț Ă

Dezvoltarea vertiginoasă în ultimele decenii a tehnicii, în general, și a construcțiilor de mașini, în special, oferă și totodată solicită spre rezolvare inginerilor un număr din ce în ce mai mare și mai variat de probleme de mecanică și rezistența materialelor.

Lucrarea este elaborată pe baza programelor analitice ale cursurilor de mecanică și rezistența materialelor aferente facultăților din învățământul superior tehnic cu profil nemecanic.

Avîndu-se în vedere numărul mic de ore de curs și seminar prevăzute pentru mecanică și rezistența materialelor în programele acestor facultăți și pentru însușirea temeinică a conținutului acestei discipline, materialul conținut în lucrare este prezentat în mod concentrat. În acest scop, lucrarea conține, pe lângă elementele teoretice, și cîteva exemple de rezolvare a unor aplicații practice.

La elaborarea lucrării, autorii au avut în vedere faptul că noțiunile ce se însușesc la acest curs stau la baza altor cunoștințe ce se predau ulterior la alte discipline de specialitate.

Autorii au urmărit să angreneze studentul în procesul de gîndire și totodată acesta să-și îmbogățească volumul de cunoștințe pentru a putea participa cît mai eficient la realizarea mărețelor sarcini ce stau în fața inginerilor din țara noastră.

Lucrarea se adresează studenților de la facultățile de electrotehnică, electronică, automatică, energetică etc. Ea poate fi utilizată și de studenții celorlalte facultăți tehnice, iar pe plan mai larg este folositoare tuturor celor care studiază și utilizează în activitatea lor noțiunile de bază ale mecanicii tehnice.

AUTORII

1.

OBIECTUL MECANICII

Științele naturii studiază manifestări și însușiri ale materiei. Mecanica este un capitol al fizicii și face parte din științele naturii.

Materia este noțiunea primară și, în același timp, cea mai cuprinzătoare a științelor naturii. Această noțiune cuprinde nu numai natura cu diversele ei forme de manifestare, ci și diverse fenomene sociale.

Materia este categoria filozofică ce desemnează realitatea obiectivă dată omului prin senzațiile lui, oglindită de acestea și existînd independent de ele.

Materia este răspîndită în univers și este nesfîrșită, inepuizabilă; implicit și procesul cunoașterii materiei și al proprietăților ei este inepuizabil.

Forma caracteristică de existență a materiei este *mișcarea*, care se prezintă sub diferite forme: mișcări moleculare, mișcări interatomice, unde electromagnetice, reacții chimice, curentul electric, activitatea celulei organice, viața organismelor superioare, gîndirea, viața socială etc.

Aceste forme fundamentale ale mișcării nu sînt izolate, iar trecerea unor forme de mișcare la alte forme de mișcare arată interdependența lor.

Mecanica studiază una din cele mai simple forme de mișcare, și anume *mișcarea mecanică*, prin aceasta înțelegîndu-se deplasarea, adică schimbarea pozițiilor în timp și spațiu a unor corpuri în raport cu anumite repere ce constituie sisteme de referință.

Materia, mișcarea, spațiul și timpul sînt noțiuni inseparabile, ele constituind un rezultat al unității materiale a universului.

Materia se mișcă în spațiu și timp, acestea fiind forme obiective de existență a materiei, proprietățile materiei reflectîndu-se în însușirile spațiului și timpului.

Spațiul și timpul sînt două noțiuni independente una de alta.

Spațiul este tridimensional și prin aceasta rezultă că materia are trei dimensiuni și se poate mișca în raport cu cele trei direcții. În mecanica clasică spațiul este infinit, are trei dimensiuni ce se pot măsura cu aceeași unitate de lungime, este continuu, omogen, izotrop, ceea ce este denumit *spațiu euclidian*.

Timpul stabilește o legătură între diverse procese materiale ce constituie forme de mișcare a materiei și stabilește succesiunea și durata lor, mărimi obiective ce nu depind de senzațiile sau cunoștința noastră. Timpul are o singură dimensiune și un singur sens de scurgere, el este ireversibil. În mecanica clasică, timpul astfel definit poartă numele de *timp absolut*.

Mecanica clasică se bazează pe concepțiile stabilite de I. Newton. Conform acestor concepții, spațiul și timpul sînt noțiuni obiective dar absolute, independente între ele. Spațiul este euclidian, iar timpul este același în

orice punct al spațiului, ceea ce se poate defini sub numele de timp universal absolut. Astfel, două evenimente simultane în raport cu un sistem de referință au caracterul de simultaneitate absolută, adică sînt simultane în raport cu orice alt sistem de referință.

În secolul XX, marele fizician A. E i n s t e i n a pus bazele mecanicii relativiste, modificînd unele concepții de bază ale mecanicii newtoniene (clasice). El observă că, conceptul de timp absolut și de simultaneitate absolută se bazează pe faptul că unele fenomene s-ar produce instantaneu, ceea ce duce la concluzia că s-ar propaga cu viteze infinite, fapt ce contravine realității că fenomenele în natură se propagă cu viteze finite, cea mai mare viteză fiind cea a propagării luminii. A. E i n s t e i n enunța, sub formă de principiu, că viteza luminii în vid este o constantă universală și nu depinde de mișcarea masei. Ca urmare, a rezultat că simultaneitatea evenimentelor este relativă, iar spațiul și timpul nu sînt independente.

În concluzie, se poate reține faptul că mecanica newtoniană constituie un caz particular al mecanicii relativiste, cu totul satisfăcătoare pentru rezolvarea problemelor practice cerute de tehnica modernă în care vitezele corpurilor sînt mici în comparație cu viteza luminii.

Mecanica este o știință experimentală. Pe baza unui șir de observații se stabilesc un număr de axiome, de la care pornind se poate dezvolta în mod logic o teorie matematică a mecanicii și se creează un model matematic a cărui veridicitate și valoare depind de gradul de generalizare al rezultatelor experimentale care au condus la stabilirea axiomelor fundamentate. Prin perfecționarea experiențelor și obținerea unor rezultate mai precise se obține o extindere a axiomelor la un grad de generalitate superioară și în final la o perfecționare a modelului matematic adoptat anterior, obținîndu-se un alt model nou. Fiecare model nou se apropie mai mult de adevărul fenomenelor cu o precizie mai mare. Astfel, de la modelul mecanicii clasice a lui Newton, printr-un proces de extindere și perfecționare, s-a ajuns la modelul mai cuprinzător al mecanicii relativiste a lui A. Einstein.

Modelul mecanicii lui Newton nu corespunde mișcărilor microscopice, astfel că a fost necesară crearea unui alt model matematic, mai complex, care a condus la fundamentarea mecanicii cuantice.

În cadrul studiului mișcării mecanice, masa, spațiul și timpul constituie noțiuni de bază și sînt absolute. Din aceste noțiuni derivă cele de viteză și accelerație la care se asociază, pe baza axiomelor fundamentate constituite la baza modelului mecanic, conceptul de forță ce se poate ilustra și prin experiențe.

Materia se manifestă în mod evident prin interacțiunea corpurilor, adică influența unei particule asupra alteia în timpul mișcării. Această interacțiune a corpurilor este cunoscută în natură sub două forme: gravitația și inerția.

Gravitația scoate în relief însușirea de atracție reciprocă a două corpuri.

Inerția reprezintă opoziția corpurilor față de acțiunea altor corpuri de a le modifica starea de mișcare rectilinie uniformă sau de repaus. Inerția este o proprietate a materiei.

Gravitația și inerția se reflectă în noțiunea de masă, sub formă de masă gravifică sau masă inertă. Cele două feluri de mase sînt egale. Ca atare, masa unui corp se poate defini ca o măsură a inerției sale în mișcarea sa de translație rectilinie și uniformă și este o mărime scalară și pozitivă, iar în mecanica clasică se consideră constantă.

Forța este o noțiune care caracterizează direcția și intensitatea acțiunii unui corp material asupra altui corp material căruia îi schimbă starea de mișcare mecanică și este deci o măsură a interacțiunii mecanice.

1.1. CONCEPTE DIN MECANICĂ

În baza unor ipoteze simplificatoare asupra structurii, formei și dimensiunilor corpurilor din natură se realizează un proces de abstractizare care are scopul de a simplifica și ușura formularea legilor (conceptelor) din mecanică. Ca exemple de astfel de concepte se pot evidenția cele mai importante :

- *punctul material* este un corp ale cărui dimensiuni sînt neglijabile, astfel că devine un punct geometric dotat cu masă proprie de mărime determinată ;

- *sistemul discret de puncte materiale* este constituit dintr-un număr n finit, dar foarte mare, de puncte materiale care se interacționează, ele aflîndu-se în interiorul unui domeniu ;

- *sistemul material* este constituit din ansamblul (discret sau continuu) punctelor materiale care se interacționează, luate în considerație și aflate într-un volum oricît de mic care conține materia ;

- *corpul solid rigid* este format dintr-o infinitate de puncte materiale care construie un sistem material continuu nedeformabil, chiar dacă asupra corpului acționează forțe care ar tinde să deformeze sistemul.

Dacă una din dimensiunile corpului solid rigid este neglijabilă în raport cu celelalte două, se folosește noțiunea de *placă*.

Dacă două din dimensiunile corpului solid rigid sînt neglijabile în raport cu a treia, se folosește noțiunea de *bară*.

Dacă corpul solid are o singură dimensiune se folosește noțiunea de *fir* ; el este considerat flexibil și inextensibil.

1.2. SISTEME DE REFERINȚĂ

Mișcarea mecanică a unui corp se studiază în raport cu un alt corp solid rigid care poartă numele de *sistem de referință*. Dacă sistemul de referință este considerat fix, mișcarea studiată față de acesta poartă numele de *mișcare absolută*.

Dacă sistemul de referință este mobil față de alt sistem, mișcarea față de el este o *mișcare relativă*.

Dacă sistemul de referință se află în mișcare și din această cauză mișcarea mecanică față de acest sistem a corpurilor nu este influențată de mișcarea sistemului, *sistemul de referință* este *inerțial*.

Dacă mișcarea mecanică a corpurilor este afectată de mișcarea sistemului material izolat în care se produce mișcarea, atunci sistemul nu este inerțial. În mod practic se consideră drept sistem inerțial acel sistem față de care corecțiile necesare sînt neglijabile.

În marea majoritate a problemelor de studiu al mișcărilor obiectivelor pe Pămînt se folosește ca reper un sistem de referință legat de Pămînt. Un astfel de sistem de referință, deși mobil, este preferabil altor sisteme, deoarece rezultatele sînt suficient de precise.

Astfel de sisteme de referință, deși mobile, se bucură de proprietatea că legile mecanicii se pot considera și exprima față de ele ca și față de un sistem de referință fix și poartă numele de sisteme inerțiale.

Sistemele de referință uzuale sînt astfel alese în studiul problemelor încît să faciliteze calculele și să permită obținerea unor rezultate cît mai eficiente.

Se folosesc sistemele de referință bazate pe : coordonate carteziane, coordonate polare, coordonate curbilinii plane, coordonate curbilinii pe o suprafață oarecare, coordonate cilindrice, coordonate sferice, coordonate curbilinii în spațiul cu trei dimensiuni.

1.3. PRINCIPIILE MECANICII

Mecanica newtoniană clasică este o disciplină ce se bazează pe cîteva principii de bază.

I. *Principiul inerției*. Un punct izolat în spațiu își păstrează, în raport cu un sistem de referință inerțial — un reper imobil — starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă.

II. *Principiul acțiunii*. O forță F aplicată unui punct material de masă m produce o mișcare a punctului în raport cu un reper fix, a cărui accelerație este egală cu raportul dintre forța și masa punctului :

$$m = \frac{\bar{F}}{a} \quad \text{sau} \quad \bar{F} = m \cdot \bar{a}.$$

Accelerația are aceeași direcție ca și forța.

III. *Principiul egalității acțiunii și reacțiunii*. Acțiunile reciproce a două puncte materiale sau a două corpuri sînt egale și de sens contrar. Aceste două forțe acționează astfel asupra acelor puncte materiale diferite, încît ele nu se anihilează reciproc, deși sînt egale și de sens opus.

IV. *Principiul paralelogramului forțelor*. Dacă asupra unui punct material acționează simultan două forțe concurente, efectul lor asupra mișcării punctului material este același cu cel pe care l-ar avea o forță care ar avea mărimea, direcția și sensul diagonalei paralelogramului construit cu ajutorul celor două forțe și care pornește din punctul de concurență, după relația de forma :

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2.$$

1.4. DIVIZIUNILE MECANICII

Mecanica poate fi împărțită în trei părți: *mecanica corpurilor rigide nedeformabile*; *mecanica corpurilor deformabile*; *mecanica fluidelor*.

Mecanica corpurilor rigide (nedeformabile), care cuprinde și mecanica punctului material, este de fapt prima expresie a mecanicii clasice. Ea se ocupă cu descrierea și exprimarea matematică a condițiilor de echilibru și ale mișcării punctelor materiale sau ale corpurilor sub acțiunea forțelor. Mecanica corpurilor rigide se împarte, la rîndul său, în statică, cinematică și dinamică.

Statica se ocupă cu studiul forțelor aplicate punctului material sau corpului solid rigid și al condițiilor ce trebuie să fie îndeplinite pentru ca acesta să fie

în echilibru. În definitiv, se poate spune că în statică se studiază condițiile în care un corp se află în repaus în raport cu un sistem considerat imobil (fix).

Cinematica se ocupă cu studiul mișcării punctelor materiale și al sistemelor de puncte (incluzînd și corpul solid rigid) în raport cu timpul, fără a ține seama de forțele ce acționează asupra lor, astfel că se poate spune că cinematica este o geometrie a mișcării corelată cu timpul mișcării.

Dinamica se ocupă cu studiul mișcării corpurilor materiale ținînd seama de forțele ce acționează asupra lor și considerînd corpurile nedeformabile, perfect rigide. Pornind de la principiile generale ale mecanicii Newtoniene, dinamica stabilește legăturile generale ale mișcării mecanice.

Mecanica corpurilor deformabile studiază proprietățile și legile de deformare ale corpurilor sub acțiunea forțelor, urmărindu-se fie o dimensionare corespunzătoare cerințelor, fie determinarea deformațiilor reale.

În această parte a mecanicii se studiază proprietățile corpurilor ce se conformează unui anumit model, evidențiindu-se astfel deformațiile elastice și deformațiile plastice.

Mecanica fluidelor se poate împărți în două : mecanica fluidelor incompresibile sau hidraulică și mecanica lichidelor compresibile.

1.5. SISTEME ȘI UNITĂȚI DE MĂSURĂ

În mecanica tehnică, studiul anumitor fenomene se realizează prin analiza și reprezentarea mărimilor fizice care intră în acest domeniu. În cadrul mecanicii tehnice se întîlnesc trei categorii de mărimi : mărimi scalare, mărimi vectoriale și mărimi tensoriale.

Necesitatea determinării și comparării anumitor mărimi fizice a dus la stabilirea anumitor unități de măsură care permit, prin raportarea mărimii de măsurat la unitatea de măsură corespunzătoare, să se determine valoarea măsurată, adică mărimea de măsurat. Unitatea de măsură constituie deci o mărime fizică considerată drept etalon pentru efectuarea de măsurători.

Unitățile de măsură, și ca atare și mărimile fizice de măsurat, se împart în două categorii : unități de măsură fundamentale și unități de măsură derivate. Unitățile de măsură fundamentale, ca și mărimile fundamentale, reprezintă o singură caracteristică fizică simplă cu o anumită semnificație.

Totalitatea unităților de măsură fundamentale alcătuiesc sistemul fundamental de măsură, iar unitățile de măsură fundamentale și derivate alcătuiesc un sistem de unități ce acoperă un anumit domeniu al fizicii în măsura în care cuprinde unitățile respective.

În anul 1962 prin STAS 737-62 a fost stabilit ca sistem legal și universal valabil în țara noastră „Sistemul internațional de unități de măsură (prescurtat S.I.)”.

Se poate remarca faptul că în domeniul mecanicii tehnice unitățile fundamentale sînt :

— *metrul* este o lungime egală cu 1 650 763,73 lungimi de undă în vid ale radiației care corespunde tranziției între nivelele de energie $2p_{10}$ și $5d_5$ ale atomului de kripton 86 ;

— *kilogramul* este masa prototipului internațional de platină iridiată aprobată în anul 1889 de Organizația Internațională de metrologie în cadrul

Conferinței Generale de Măsuri și Greutăți. Etalonul este păstrat la Institutul de metrologie din Sèvres — Franța ;

— *secunda* este durata corespunzătoare a 9 192 631 770 perioade ale radiației corespunzătoare tranziției între cele două nivele de energie hiperfine ale stării fundamentale a atomului de cesiu 133.

Se poate observa că unitățile fundamentale din sistemul SI sînt mărimi scalare.

Unitățile de măsură derivate se exprimă în funcție de unitățile de măsură fundamentale, cu ajutorul unor expresii (relații) matematice. O astfel de expresie matematică poartă numele de *ecuația de dimensiuni* a mărimii respective și este de forma :

$$D = L^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot T^{\gamma},$$

unde D este mărimea derivată ;

L — mărimea fundamentală, lungimea ;

M — mărimea fundamentală, masa ;

T — mărimea fundamentală, timpul ;

α, β, γ — numere pozitive, negative, întregi, fracționare sau nule.

Ca exemplu de mărimi derivate se pot da :

Mărimea derivată	Simbol	Ecuația de dimensiuni	Unitatea de măsură
Suprafața	(A)	$= L^2 M^0 T^0 = L^2$	m ²
Volumul	(V)	$= L^3 M^0 T^0 = L^3$	m ³
Viteza	(v)	$= LT^{-1}$	m/s
Accelerația	(a)	$= LT^{-2}$	m/s ²
Forța	(F)	$= MLT^{-2}$	N
Lucrul mecanic	(L)	$= ML^2 T^{-2}$	J
Puterea	(P)	$= ML^2 T^{-3}$	W
Energia cinetică	(W)	$= ML^2 T^{-2}$	J

În sistemul internațional SI unitatea de forță este Newtonul (N) și reprezintă forța care-i imprimă unei mase de 1 kg o accelerație de 1 m/s². Pentru lucrul mecanic și pentru energia cinetică se utilizează ca unitate de măsură Joule-ul (J) care reprezintă lucrul mecanic efectuat de o forță de 1 N prin deplasarea în lungul suportului său cu 1 m. Pentru putere se consideră ca unitate wattul (W) și reprezintă lucrul mecanic (energia) de 1 Joule efectuat într-o secundă.

Principiul omogenității. O relație de egalitate între două mărimi fizice este valabilă numai dacă cei doi termeni ai egalității sînt de aceeași natură, adică relația de dimensiuni este aceeași.

Acest principiu este folosit de regulă la verificarea formulelor care exprimă o lege fizică și la determinarea dimensiunilor și a semnificației constantelor și coeficienților ce apar într-o formulă.

Partea I

STATICA

2.

STATICA PUNCTULUI MATERIAL

Partea din mecanică care studiază reducerea sistemelor de forțe ce acționează asupra unui punct material sau asupra unui corp sau mai multor corpuri, precum și condițiile de echilibru ale acestora, poartă numele de *statică*.

În vederea simplificării calculelor, într-o primă etapă se studiază cazul corpurilor ce pot fi considerate drept puncte materiale. În acest caz, studiul echilibrului punctului material este definit drept *statica punctului material*.

Se disting două situații : *punct material liber* și *punct material supus la legături*.

Punctul material liber este un concept ce rezultă dintr-un proces de abstractizare care se efectuează cu scopul de a simplifica metoda de studiu a condițiilor de echilibru sau a mișcării corpurilor ce se pot asimila drept puncte materiale. El se caracterizează prin faptul că poate ocupa orice poziție în spațiu.

Punctul material supus la legături se caracterizează prin faptul că are obligația să rămână permanent pe o suprafață sau pe o anumită curbă. Această restricție ce se impune punctului material, care poartă numele de legătură, poate fi de mai multe feluri, în funcție de posibilitățile de mișcare ce mai rămân.

Legătura este bilaterală dacă punctul material este obligat să nu părăsească suprafața sau curba pe care se află. Un exemplu caracteristic îl constituie o mărgea care se află pe un inel circular de sîrmă (fig. 2.1, a). În acest caz, mărgeaua nu poate părăsi inelul nici către interior nici către exterior, ea nu se poate mișca decît pe inel. Dacă se consideră cazul unui pendul constituit dintr-un punct material susținut de un fir flexibil și inextensibil, atunci punctul poate părăsi suprafața sferei pe care o poate descrie către interiorul ei. În acest caz legătura este unilaterală (fig. 2.1, b).

Legătura (suprafața sau curba) ce se impune unui punct material poate să fie rigidă în timp, adică nu se modifică în timp. În acest caz, legătura se numește *scleronomă*. Dacă legătura se modifică în timp, adică suprafața sau curba pe care se află mobilul își schimbă forma în timp, ea se numește *reonomă*.

În foarte multe aplicații, între suprafața sau curba ce constituie legătura și punctul material apare o rezistență la tendința de mișcare a acestuia, datorită asperităților din suprafața de contact ; în

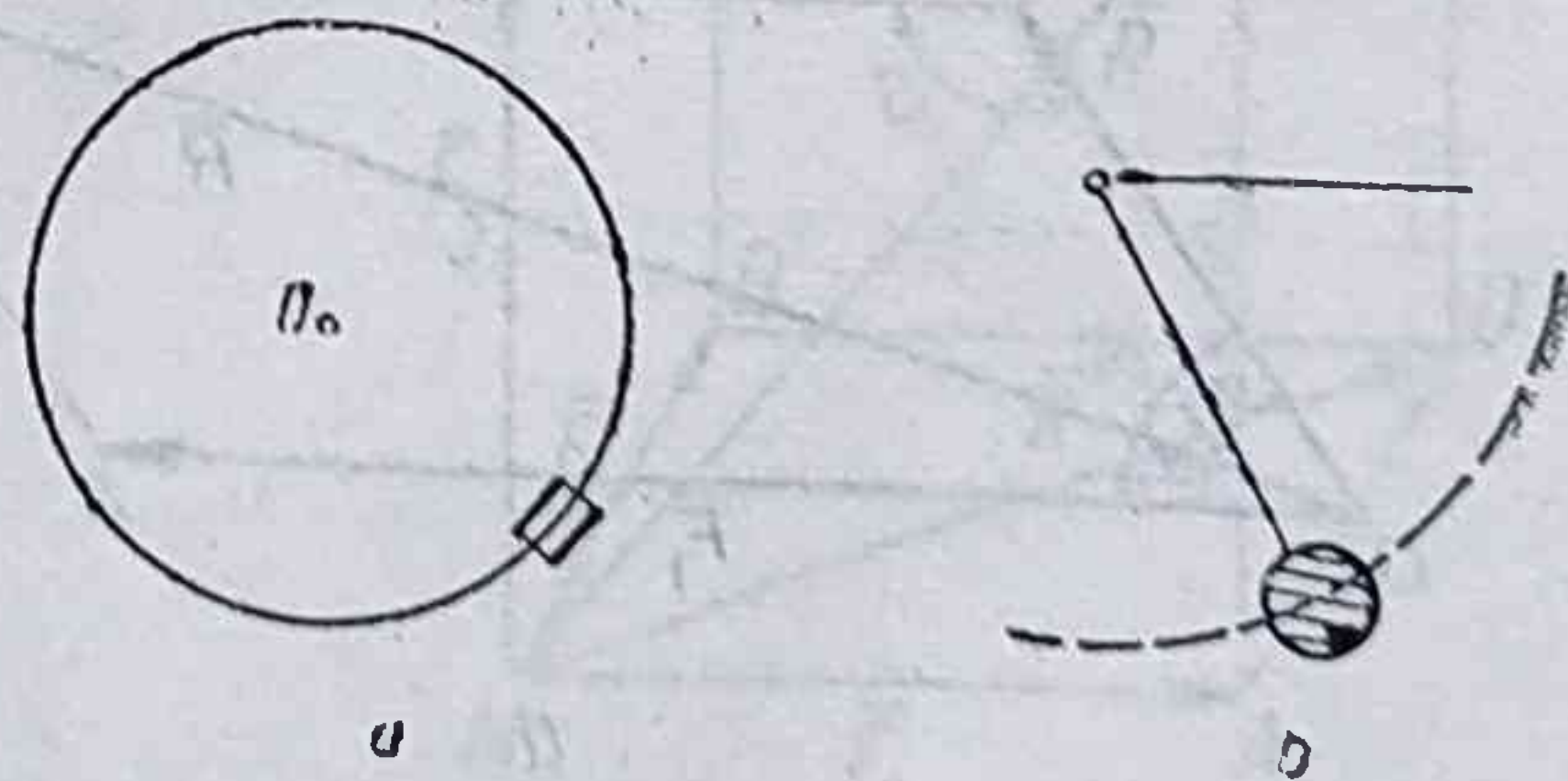


Fig. 2.1

acest caz legătura este cu frecare. Dacă se admite că frecarea este neglijabilă, legătura se numește ideală. În marea majoritate a aplicațiilor tehnice se întâlnesc legături scleronome cu frecare.

O noțiune importantă ce intervine în studiul mișcării sau echilibrului punctului material este cea de număr de grade de libertate.

Prin definiție, *numărul de grade de libertate* este numărul parametrilor scalari independenți cu care se poate determina, la un moment dat, poziția în spațiu a unui punct material sau a unui corp rigid.

Punctul material liber în spațiu are trei grade de libertate, astfel că într-un sistem de referință cartezian poziția sa este perfect determinată dacă se cunosc cele trei coordonate x, y, z . În cazul unui punct material legat de o suprafață, poziția sa poate fi determinată prin două coordonate, ceea ce înseamnă că are două grade de libertate.

Dacă punctul material se află permanent pe o curbă, poziția sa poate fi determinată prin lungimea arcului de curbă măsurat dintr-un punct fix, aflat pe curbă, ceea ce înseamnă că în acest caz el are un singur grad de libertate. Un punct material fix nu are nici un grad de libertate.

Punctul material supus la legături, adică la unele restricții geometrice, are implicit un număr redus de grade de libertate.

2.1. STATICA PUNCTULUI MATERIAL LIBER

2.1.1. REDUCEREA FORȚELOR CONCURENTE

Prin reducerea unui sistem de forțe se înțelege determinarea unui alt sistem de forțe, de regulă mai simplu, care să aibă însă neapărat același efect.

a) Dacă se consideră un punct material M liber aflat în spațiu în O , asupra căruia acționează simultan două forțe \vec{F}_1 și \vec{F}_2 (fig. 2.2) ce fac între ele unghiul α , se deduce, în baza principiului paralelogramului (fig. 2.2, a) că aceste forțe pot fi înlocuite prin rezultanta \vec{R} dată de relația vectorială :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

În figură forțele sînt reprezentate la scară și se observă că pentru determinarea mărimii rezultante se poate considera triunghiul OBC (fig. 2.2, b), în care $\vec{OB} = \vec{F}_2$, $\vec{BC} = \vec{F}_1$ și $\vec{OC} = \vec{R}$.

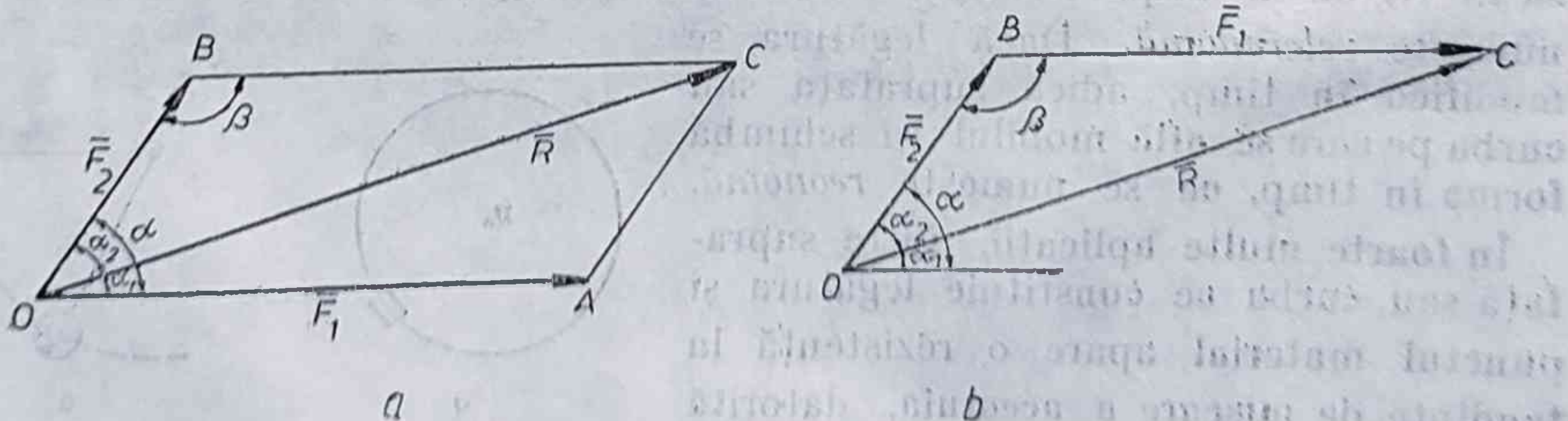


Fig. 2.2

Folosind relațiile dintr-un triunghi oarecare se pot determina mărimea (modulul) rezultantei și poziția ei prin valorile unghiurilor, α_1 , α_2 și β , observînd că : $\beta = \pi - \alpha$.
Astfel :

$$|\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \beta} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$$

și

$$\frac{|\vec{F}_1|}{\sin \alpha_2} = \frac{|\vec{F}_2|}{\sin \alpha_1} = \frac{|\vec{R}|}{\sin \alpha}$$

b) Dacă se consideră un punct material M asupra căruia acționează mai multe forțe concurente $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (fig. 2.3), reducerea sistemului se poate efectua din aproape în aproape, prin aplicarea succesivă a regulii paralelogramului. Pentru a simplifica figura s-au prezentat numai 5 forțe, adică în cazul considerat $n = 5$. Din compunerea primelor două forțe se obține rezultanta \vec{R}' , care poate înlocui efectul acestor două forțe. Prin compunerea rezultantei \vec{R}' cu \vec{F}_3 se obține rezultanta \vec{R}'' și se continuă astfel pînă la ultima forță \vec{F}_n . Se observă că se obține, în acest mod, un poligon al forțelor $MABC\dots$ ale cărui laturi sînt echipolente, adică egale ca mărime, direcție și sens cu forțele sistemului. Unind originea primei forțe (punctul M) cu vîrfurile ultimei laturi echipolente din poligonul forțelor se obține rezultanta sistemului de forțe concurente.

Observații

1. În această construcție, ordinea în care se construiesc laturile poligonului de forțe echipolente este indiferentă, suma fiind aceeași.

2. Construcția poligonului forțelor este făcută pe desen în planul hîrtiei. Se poate reține însă faptul că nu s-a introdus nici o restricție în privința suporturilor forțelor și, ca atare, poligonul forțelor poate fi realizat în mod cu totul asemănător și în spațiu, astfel că reducerea forțelor se face, în principiu, în mod cu totul asemănător și în cazul forțelor concurente care pot fi oricum în spațiu (necoplanare).

c) Dacă se consideră trei forțe concurente în spațiu $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ (fig. 2.4) care acționează asupra punctului material M , se observă că, la scara desenului : $\vec{F}_1 = \vec{MA}$; $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ și $\vec{F}_3 = \vec{MC}$; aplicînd succesiv regula paralelogramului se obține :

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

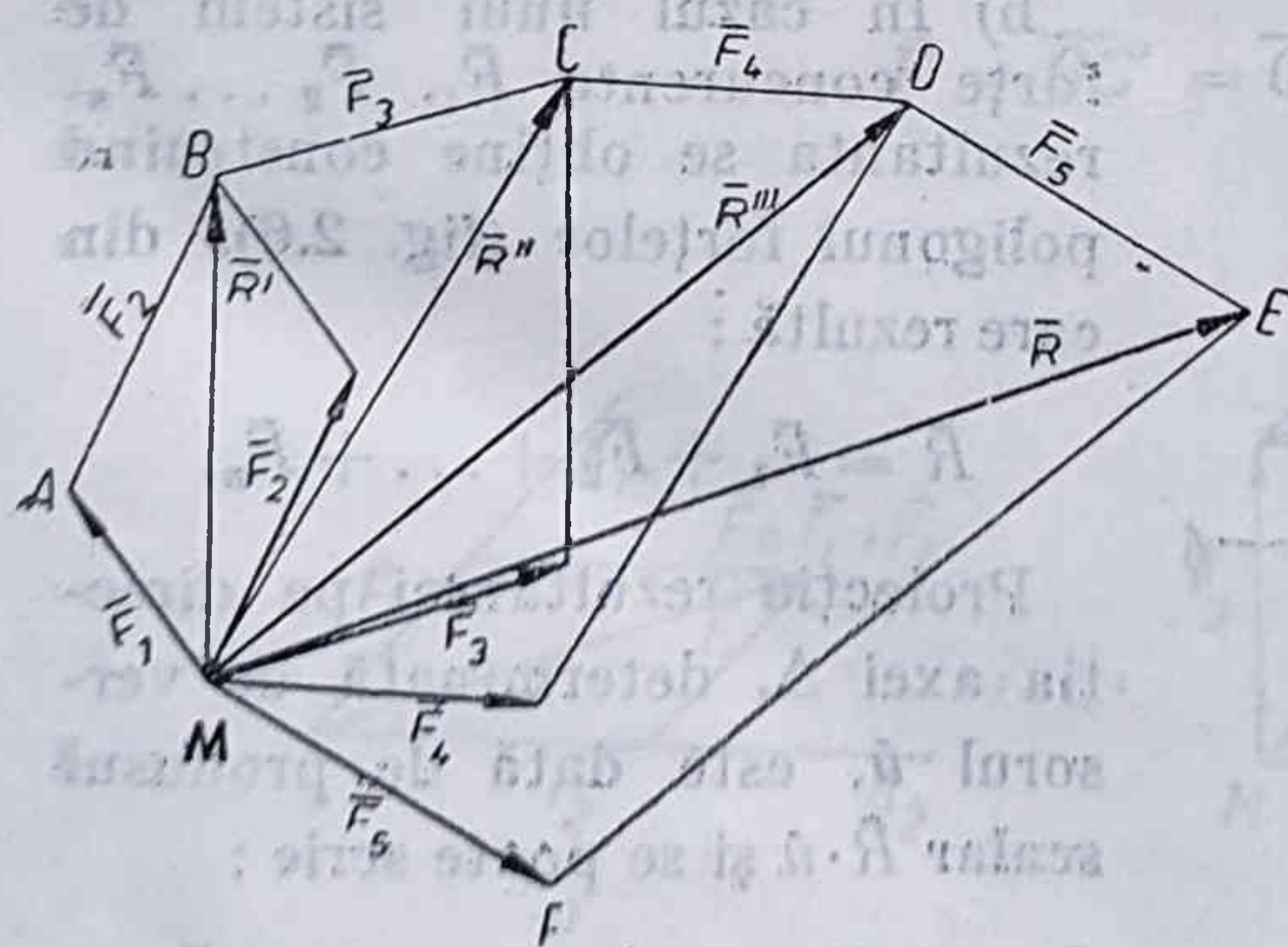


Fig. 2.3

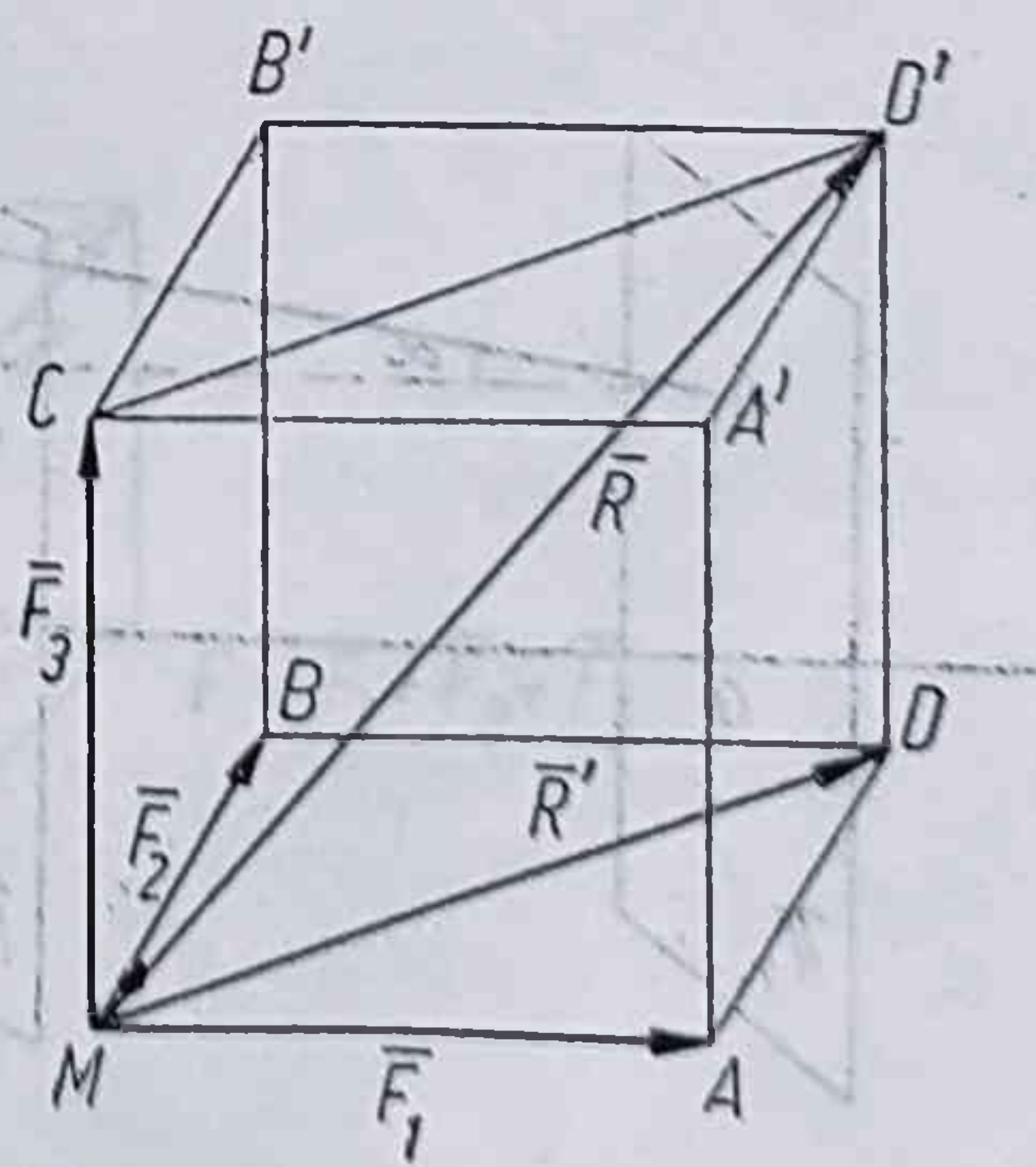


Fig. 2.4

și

$$\bar{R} = \bar{R}' + \bar{F}_3$$

sau, la scara desenului :

$$\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MD} \quad \text{și} \quad \overline{MD} + \overline{MC} = \overline{MD'}.$$

Se observă că $\overline{MD'}$ este tocmai diagonală paralelipipedului construit pe laturile \overline{MA} , \overline{MB} , \overline{MC} , care, la scară sînt tocmai cele trei forțe concurente, adică la scară : $\overline{MD'} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}$, sau, observînd că $\bar{R} = \overline{MD'}$, rezultă :

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3.$$

2.1.2. TEOREMA PROIECȚIILOR

a) Proiecția unui vector \overline{AB} pe o axă Δ se obține ducînd (fig. 2.5) prin punctele A și B planele normale π_1 și π_2 pe axa Δ . Segmentul ab , constituit de punctele a și b în care cele două plane sînt înțepate de axa Δ , este proiecția vectorului \overline{AB} pe axă. Se notează, în acest caz, $\text{pr}_\Delta \overline{AB} = ab$ sau $\text{pr}_\Delta \bar{F} = ab$. Mărimea acestei proiecții este dată de :

$$\text{pr}_\Delta \overline{AB} = \text{pr}_\Delta |\bar{F}| = |\overline{AB}| \cos \alpha = |\bar{F}| \cos \alpha = ab.$$

Unghiul α este unghiul dintre suportul vectorului $\bar{F} = \overline{AB}$ cu axa Δ (în figură, $AB' \parallel ab$). Direcția axei este precizată prin versorul \bar{u} , constant ca mărime, direcție și sens.

Se mai poate scrie :

$$\text{pr}_\Delta \overline{AB} = |\bar{F}| \cos \alpha = \frac{|\bar{u}| |\bar{F}| \cos \alpha}{|\bar{u}|} = \bar{u} \cdot \bar{F}.$$

Rezultă : $\text{pr}_\Delta \overline{AB} = \bar{u} \cdot \bar{F}$.

Observație. Proiecția forței \bar{F} este o mărime scalară pozitivă sau negativă. Ea este pozitivă dacă $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ și negativă dacă $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$ proiecția este nulă.

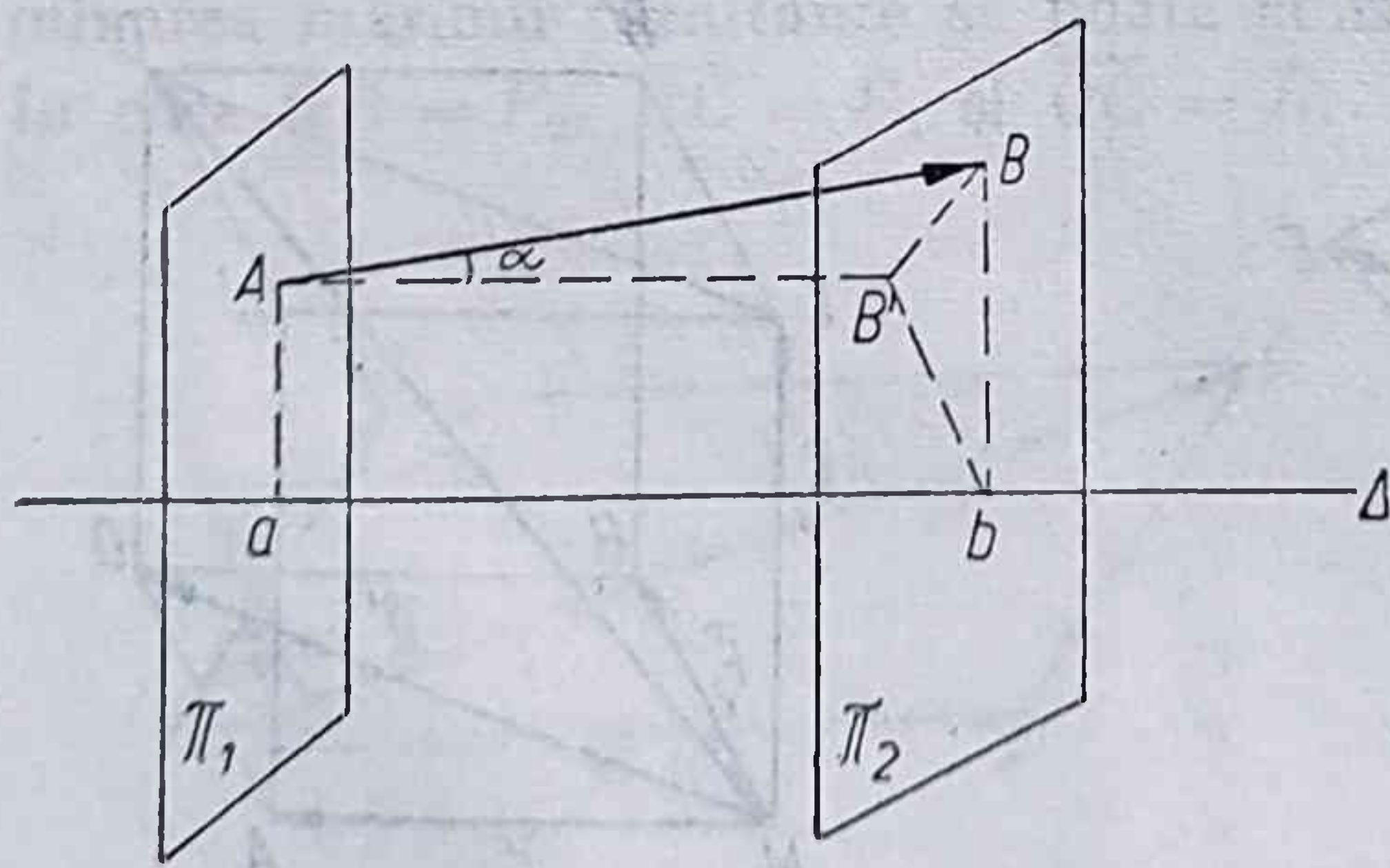


Fig. 2.5

b) În cazul unui sistem de forțe concurente $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \dots \bar{F}_n$, rezultanta se obține construind poligonul forțelor (fig. 2.6), din care rezultă :

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n.$$

Proiecția rezultantei pe direcția axei Δ , determinată de versorul \bar{u} , este dată de produsul scalar $\bar{R} \cdot \bar{u}$ și se poate scrie :

$$\bar{R} \cdot \bar{u} = \bar{F}_1 \cdot \bar{u} + \bar{F}_2 \cdot \bar{u} + \dots + \bar{F}_n \cdot \bar{u}.$$

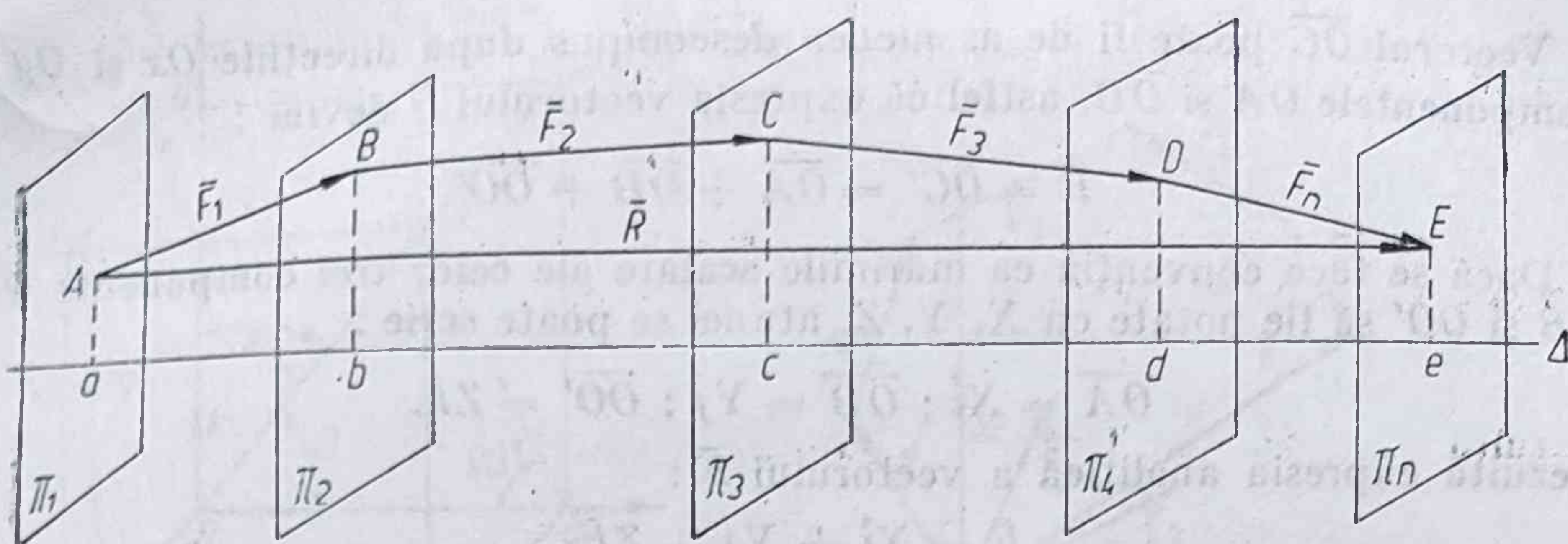


Fig. 2.6

sau

$$\text{pr}_{\Delta} \bar{R} = \text{pr}_{\Delta} \bar{F}_1 + \text{pr}_{\Delta} \bar{F}_2 + \dots + \text{pr}_{\Delta} \bar{F}_n.$$

Această relație reprezintă teorema proiecțiilor și se poate enunța sub forma : proiecția rezultantei unui sistem de forțe concurente pe o axă Δ este egală cu suma algebrică a proiecțiilor forțelor componente pe aceeași axă.

2.1.3. REDUCEREA UNUI SISTEM DE FORȚE PE CALE ANALITICĂ

a) Descompunerea unei forțe după două direcții date. O forță \bar{F} aplicată unui punct material liber poate fi înlocuită prin două componente ce acționează după două direcții date Δ_1 și Δ_2 . Această descompunere se bazează pe principiul paralelogramului (fig. 2.7, a).

b) Descompunerea unei forțe după trei direcții necoplanare date. O forță \bar{F} aplicată unui punct material liber poate fi înlocuită prin trei componente ce acționează după trei direcții concurente date Δ_1 , Δ_2 și Δ_3 (fig. 2.7, b). Această descompunere se bazează pe regula paralelipipedului.

c) Expresia analitică a unui vector în raport cu un sistem de axe ortogonal $Oxyz$.

Direcțiile axelor Ox , Oy , Oz sînt determinate de versorii \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} .

Vectorul \bar{F} este reprezentat în figura 2.8 prin segmentul $\overline{OC'}$. În conformitate cu regula paralelogramului, el poate fi descompus în două componente \overline{OC} și $\overline{OO'}$, astfel că se poate scrie :

$$\bar{F} = \overline{OC'} = \overline{OC} + \overline{OO'}.$$

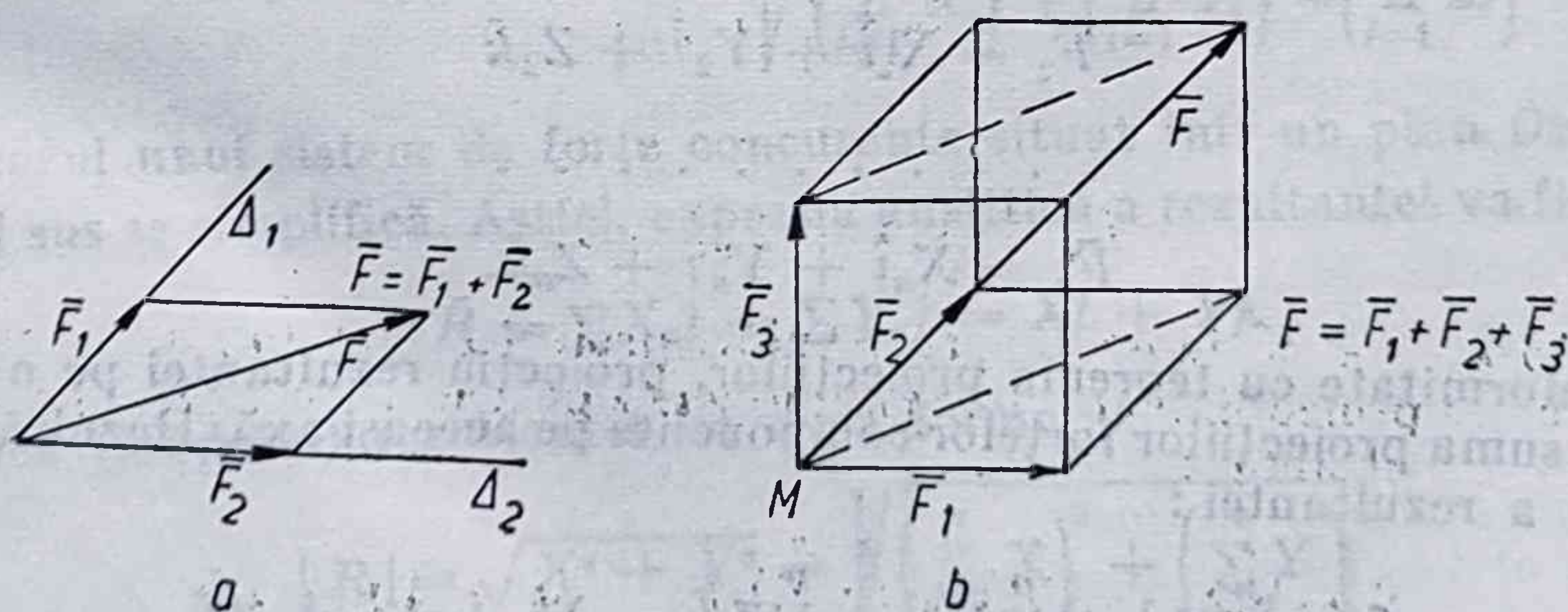


Fig. 2.7

Vectorul \overline{OC} poate fi de asemenea descompus după direcțiile Ox și Oy în componentele \overline{OA} și \overline{OB} , astfel că expresia vectorului \vec{F} devine :

$$\vec{F} = \overline{OC'} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OO'}.$$

Dacă se face convenția ca mărimile scalare ale celor trei componente OA , OB și OO' să fie notate cu X , Y , Z , atunci se poate scrie :

$$\overline{OA} = Xi; \overline{OB} = Yj; \overline{OO'} = Zk.$$

Rezultă expresia analitică a vectorului \vec{F} :

$$\vec{F} = Xi + Yj + Zk.$$

Pentru a cunoaște complet elementele unui vector este necesar să se determine mărimea (modulul) și direcția sa.

Mărimea sau modulul se determină observând că în cazul sistemului de referință ortogonal se poate scrie :

$$|\vec{F}| = |\overline{OC'}| = \sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{OO'}^2} = \sqrt{OA^2 + OB^2 + OO'^2} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Direcția vectorului se determină prin unghiurile α , β , γ pe care le face suportul său cu axele Ox , Oy și Oz . Aceste unghiuri se determină prin cosinusurile lor ($\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$), denumite cosinusuri directe. Considerând triunghiul OBC' (fig. 2.8), se observă că unghiul OBC' este de 90° și se obține relația : $OB = OC' \cos \beta$, de unde rezultă :

$$\cos \beta = \frac{OB}{OC'} = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

În mod asemănător se obține :

$$\cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}; \cos \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

d) Compunerea (reducerea) pe cale analitică a unui sistem de vectori concurenți. Se consideră un sistem de vectori concurenți $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n$ care au punctul de aplicație în O , originea unui sistem de referință ortogonal $Oxyz$ (fig. 2.9).

Pentru fiecare vector în parte corespunde o expresie analitică :

$$\vec{F}_1 = X_1i + Y_1j + Z_1k$$

$$\vec{F}_2 = X_2i + Y_2j + Z_2k$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\vec{F}_n = X_ni + Y_nj + Z_nk.$$

În conformitate cu teorema proiecțiilor, proiecția rezultantei pe o axă este egală cu suma proiecțiilor forțelor componente pe aceeași axă. Rezultă expresia analitică a rezultantei :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n X_i i + \sum_{i=1}^n Y_i j + \sum_{i=1}^n Z_i k = Xi + Yj + Zk.$$

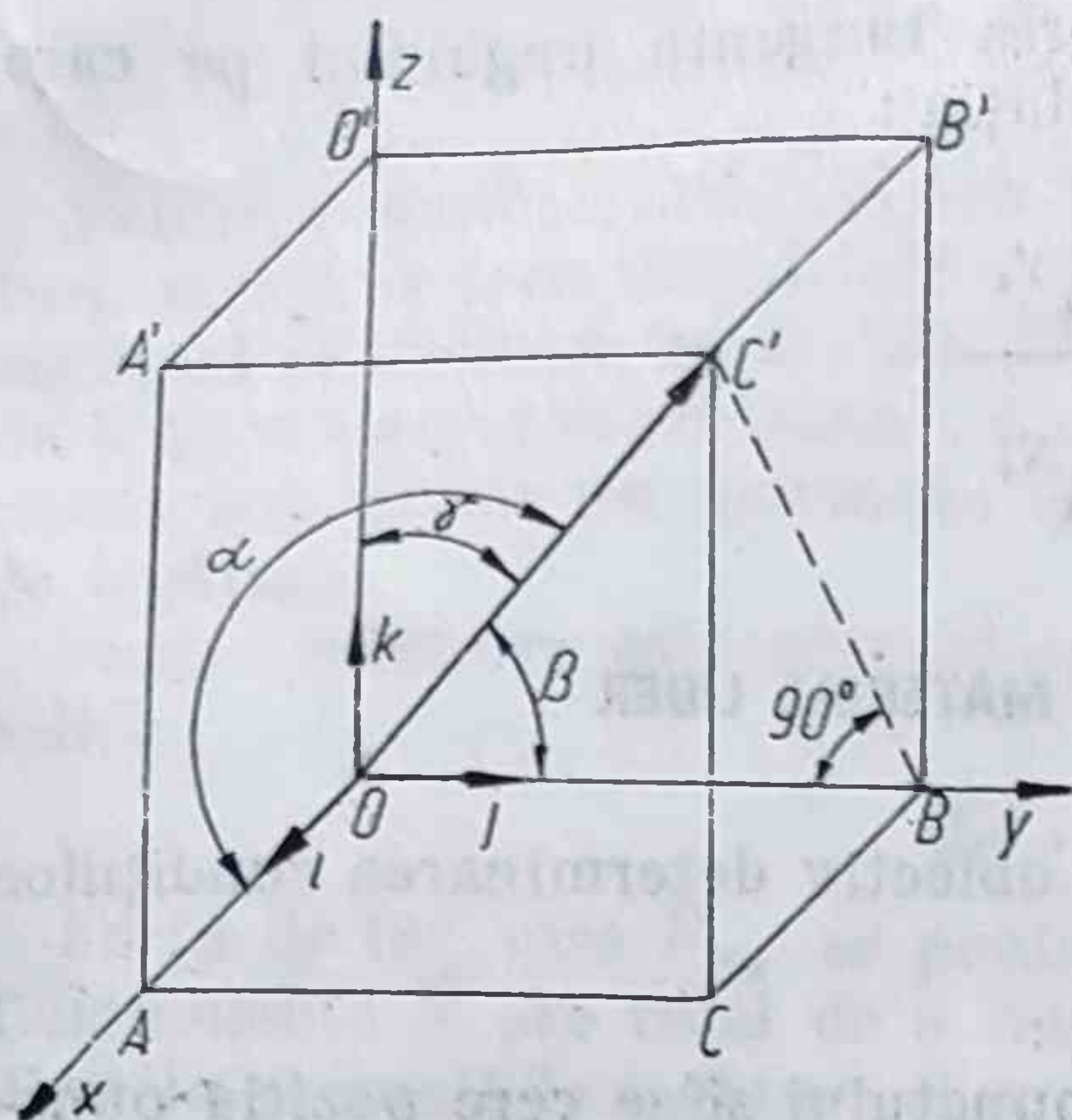


Fig. 2.8

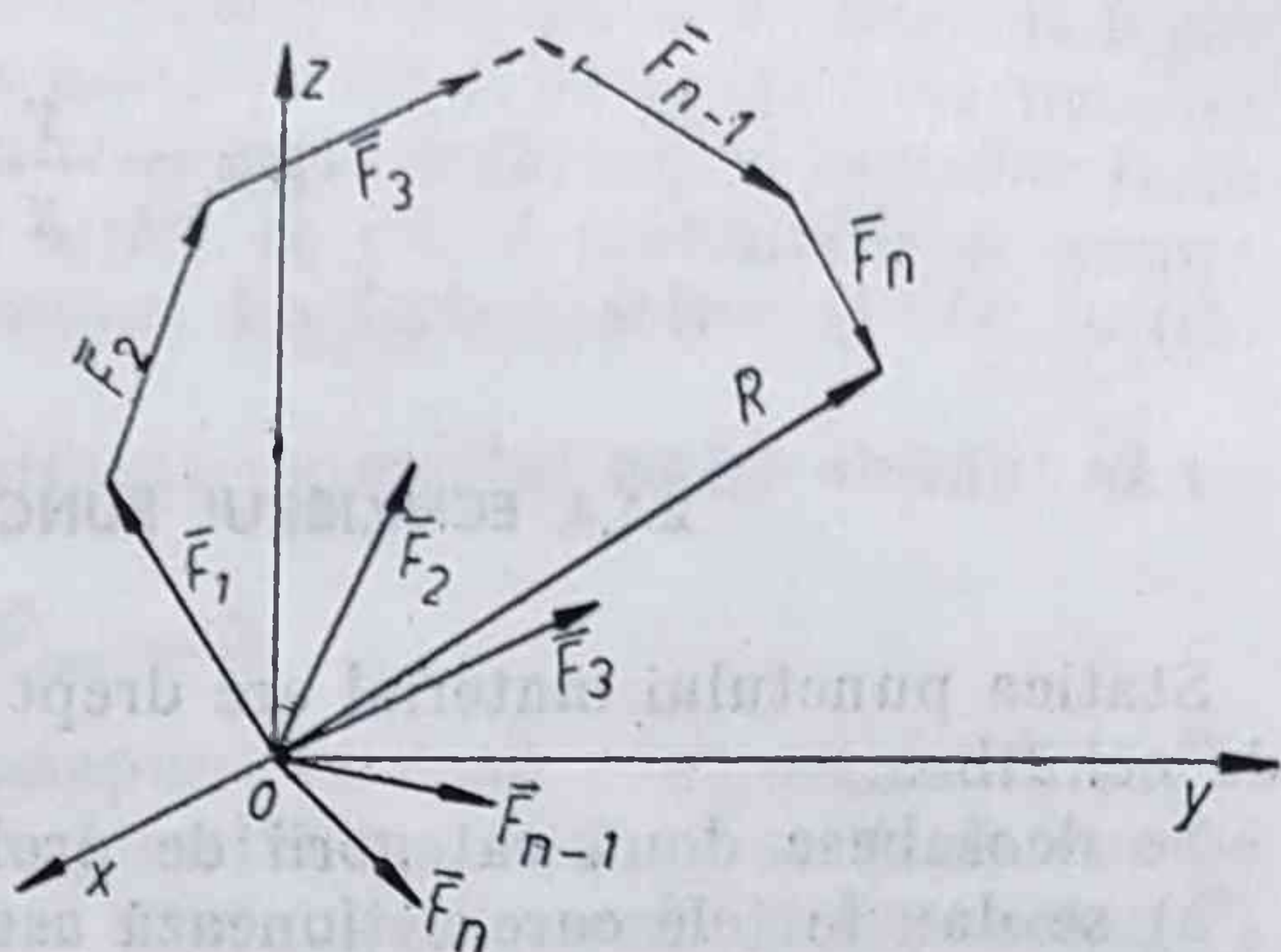


Fig. 2.9

unde :

$$X = \sum_{i=1}^n X_i; \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i; \quad Z = \sum_{i=1}^n Z_i.$$

Mărimea rezultantei este :

$$|R| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2},$$

iar direcția \vec{u} a vectorului \vec{R} este determinată prin cosinusurile directoare :

$$\cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Z_i\right)^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Z_i\right)^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Z_i\right)^2}}.$$

În cazul unui sistem de forțe concurente situat într-un plan Oxy , relațiile de mai sus se simplifică. Astfel, expresia analitică a rezultantei va fi de forma :

$$\vec{R} = \sum X_n \vec{i} + \sum Y_n \vec{j} = X \vec{i} + Y \vec{j}.$$

Mărimea (modulul) rezultantei va avea forma :

$$|R| = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2}.$$

Direcția vectorului va fi determinată prin tangenta unghiului pe care rezultanta îl face cu axa Ox și este dată de relația :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i}.$$

2.1.4. ECHILIBRUL PUNCTULUI MATERIAL LIBER

Statica punctului material are drept prim obiectiv determinarea condițiilor de echilibru.

Se deosebesc două categorii de probleme :

a) se dau forțele care acționează asupra punctului și se cere poziția punctului ;

b) se dă poziția punctului și se cer forțele care-l acționează.

În conformitate cu principiul acțiunii forței și cu principiul inerției, un punct material liber este în echilibru dacă rezultanta forțelor ce acționează asupra sa este nulă :

$$\bar{R} = 0 \text{ sau : } \bar{R} = \sum \bar{F}_i = 0.$$

Această condiție de echilibru, scrisă sub forma unei relații vectoriale, se poate scrie sub forma unui sistem de trei ecuații de echilibru scalare în cazul forțelor aflate în spațiu sau sub forma unui sistem de două ecuații în cazul forțelor aflate într-un plan :

$$\text{în spațiu : } \begin{cases} \sum_{i=1}^n X_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n Y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n Z_i = 0 \end{cases} \quad \text{în plan : } \begin{cases} \sum_{i=1}^n X_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n Y_i = 0 \end{cases}$$

În cazul rezolvării pe cale grafică se remarcă faptul că, deoarece rezultanta trebuie să fie nulă, poligonul forțelor trebuie să se închidă, adică vârful ultimei laturi (forțe) a poligonului trebuie să coincidă cu originea primei laturi din poligon.

2.2. STATICA PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI

Un punct material asupra căruia acționează un sistem de forțe concurente, dar care este supus la o restricție oarecare, este un punct material supus la legături, adică punctul este obligat să se afle permanent pe o suprafață sau pe o linie curbă dată.

Punctul material și suprafața sau linia de legătură se interacționează prin forțe de interacțiune care poartă numele de *forțe de legătură* sau *reacțiuni*.

Rezultă că asupra punctului material supus legăturii acționează două categorii de forțe, și anume :

- forțe active, denumite și forțe date sau forțe aplicate ;
- forțe de legătură, denumite și reacțiuni.

2.2.1. AXIOMA LEGĂTURILOR

Pentru a studia echilibrul sau mișcarea unui punct material supus la legături, acesta se transformă într-un punct material liber. În acest scop, punctul material se izolează, se desface legătura și în locul legăturii se introduc forțe de legătură corespunzătoare. Se obține astfel un punct material liber asupra căruia acționează un sistem de forțe format din forțele active și din forțele de legătură.

Pentru echilibru este necesar ca rezultanta sistemului astfel obținut să fie nulă :

$$\sum \bar{F}_a + \sum \bar{F}_{leg} = 0.$$

Forța de legătură \bar{F}_{leg} se poate descompune în două componente \bar{N} și \bar{F}_f . Componenta \bar{N} are rolul de a împiedica punctul material să se deplaseze pe direcția normală la legătură și se numește *reacțiunea normală*. Componenta \bar{F}_f se opune deplasării punctului pe direcția tangentă la legătură. Ea este componenta tangențială și este produsă de asperitățile liniei sau suprafeței de legătură; poartă numele de *forță de frecare*. Legăturile pentru care $\bar{F}_f = 0$ poartă numele de legături lucii sau ideale, care în realitate nu există. În cazul legăturilor la care forța de frecare este neglijabilă, forța de legătură are direcția normalei la linia sau suprafața de contact. În acest caz, condiția de echilibru se poate scrie sub forma vectorială :

$$\sum \bar{F}_a + \bar{N} = 0.$$

2.2.2. ECHILIBRUL PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI FĂRĂ FRECAR

Dacă se consideră un punct material (fig. 2.10) rezemat pe o suprafață S asupra căreia acționează mai multe forțe active a căror rezultantă este \bar{R} , condiția de echilibru se poate scrie sub forma :

$$\bar{R} + \bar{N} = 0,$$

care proiectată pe cele trei axe de coordonate se poate scrie în formă scalară ca un sistem de trei ecuații :

$$R_x + N_x = 0,$$

$$R_y + N_y = 0,$$

$$R_z + N_z = 0.$$

Dacă ecuația suprafeței este dată de $f(x, y, z) = 0$, atunci parametrii directori ai normalei la suprafață sînt :

$$\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \text{ și } \frac{\partial f}{\partial z},$$

astfel că rezultă expresia reacțiunii \bar{N} normale :

$$\bar{N} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \bar{k} \right),$$

λ fiind un parametru care arată mărimea reacțiunii normale.

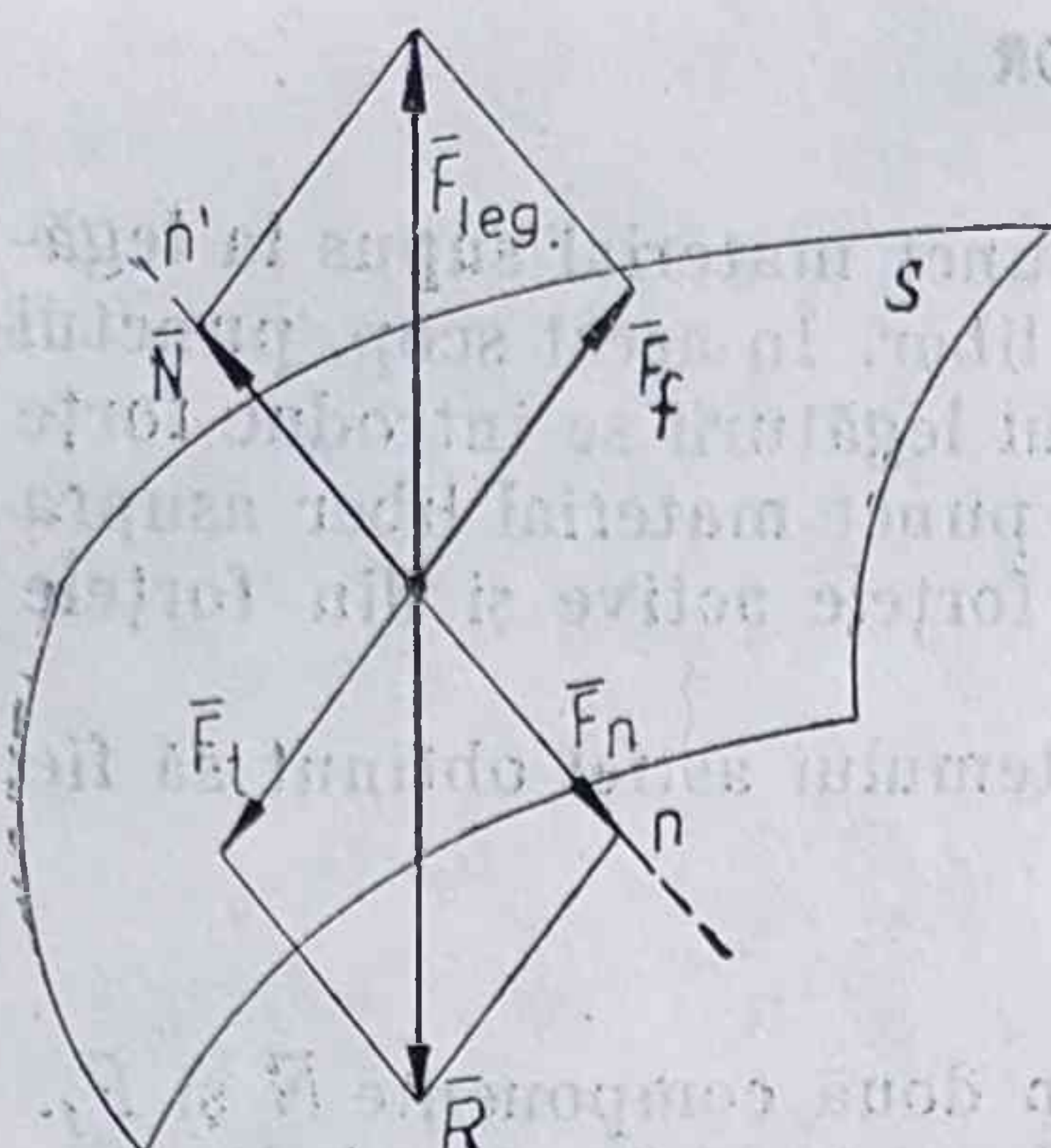


Fig. 2.10

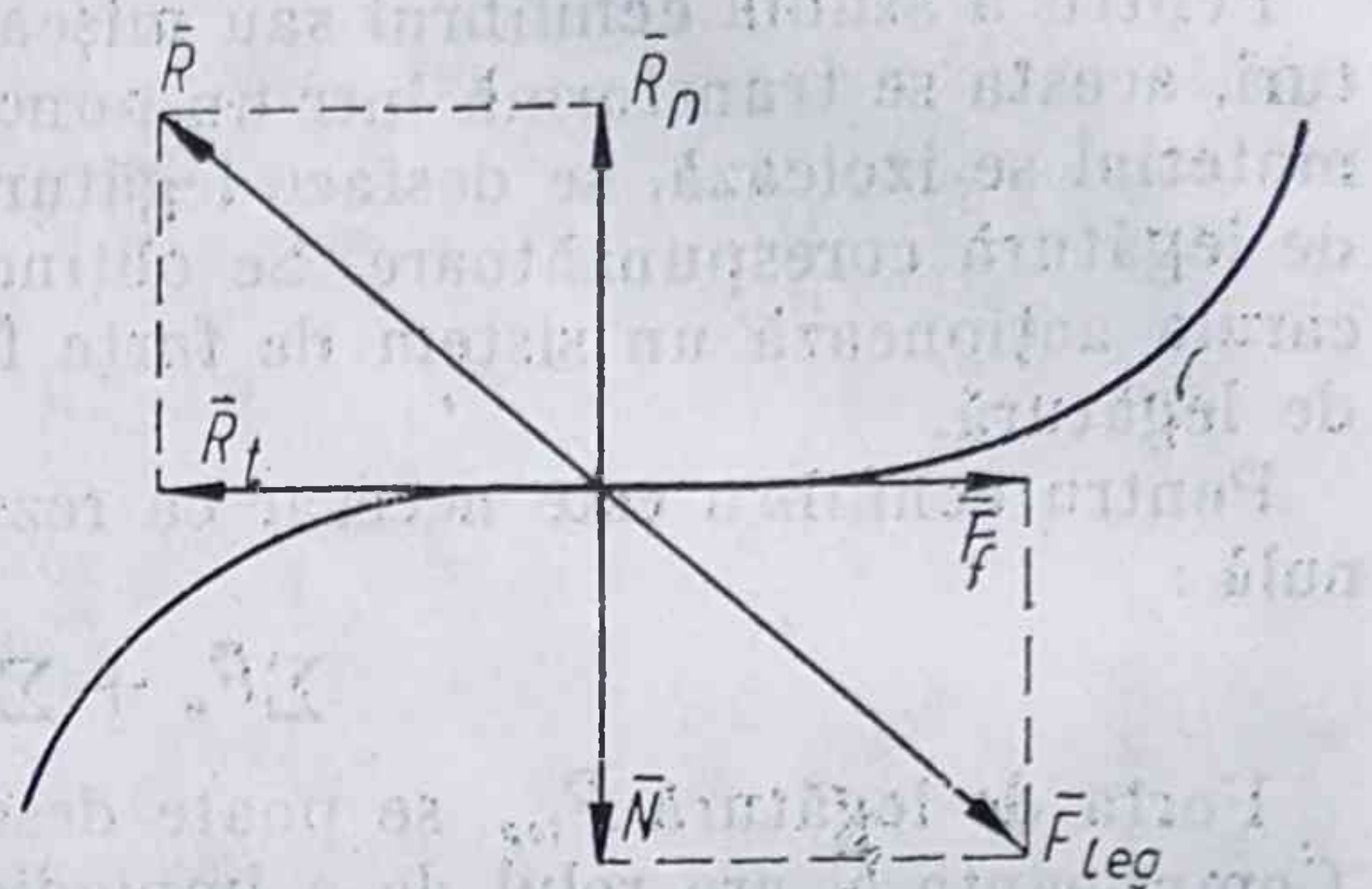


Fig. 2.11

Ecuatia de echilibru va fi, în acest caz, dată de ecuația vectorială :

$$\bar{R} + \bar{N} = 0 = \bar{R} + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \bar{k} \right),$$

sau de sistemul de ecuații (scalare):

$$R_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

$$R_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$R_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

În cazul unui punct material rezemat pe o curbă (fig. 2.11) în spațiu, legătura geometrică este de regulă dată prin ecuațiile :

$$f_1(x, y, z) = 0$$

$$f_2(x, y, z) = 0$$

ce reprezintă două suprafețe ce se intersectează după curba C. În acest caz reacțiunea normală la curbă se poate considera drept rezultanta a două componente, fiecare fiind normală pe una din suprafețele ce se intersectează după curba C. Expresia reacțiunii normale \bar{N} se scrie, în acest caz, sub forma :

$$\bar{N} = \lambda_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \cdot \bar{k} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \cdot \bar{k} \right).$$

Ecuatiile de echilibru devin sub forma vectorială :

$$\bar{R} + \lambda_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \cdot \bar{k} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \cdot \bar{k} \right) = 0$$

sau sistemul de ecuații scalare :

$$R_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0,$$

$$R_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0,$$

$$R_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0.$$

În cazul forțelor aplicate în spațiu rezultă trei ecuații, iar în cazul forțelor aplicate într-un plan, două ecuații de echilibru. Pentru rezolvarea lor este necesar ca numărul de necunoscute să nu depășească numărul de ecuații. Necunoscutele sînt de regulă mărimea reacțiunii și elementele geometrice necesare pentru determinarea poziției de echilibru.

2.2.3. ECHILIBRUL PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI CU FRECARÉ

Frecare cu alunecare. Dacă suprafața sau curba de sprijin ce constituie legătura geometrică a punctului material prezintă asperități, atunci în suprafață apare o forță rezistentă, tangentă la suprafață, care are direcția mișcării și sensul contrar tendinței de mișcare; aceasta poartă numele de *forță de frecare cu alunecare* și este o forță de legătură tangențială.

Modulul forței de frecare este limitat. Producerea forței de frecare se realizează după legile lui Coulomb, care au fost stabilite experimental.

Dacă se consideră un punct material rezemat pe o suprafață și acționat de o forță activă \vec{T} (fig. 2.12), atunci în planul tangent la suprafață apare o reacțiune tangențială \vec{F}_f . La echilibru, valoarea acesteia este $F_f \leq \mu N$, iar în cazul cînd punctul se află în mișcare este dată de relația $F_f = \mu N$. În această relație N este modulul reacțiunii normale, iar μ — un coeficient adimensional ce poartă numele de coeficient de frecare; valoarea acestuia depinde de: natura materialelor din care sînt confecționate suprafețele aflate în contact, gradul de prelucrare al acestor suprafețe, viteza relativă de alunecare dintre cele două solide. Acest coeficient nu depinde de modulul reacțiunii normale N și nici de mărimea ariei suprafeței comune de contact.

Conul de frecare. Unghiul de frecare. Dacă forța activă \vec{T} s-ar roti în jurul normalei la punctul de contact, atunci rezultanta \vec{R}_1 a forțelor de legătură \vec{N} și \vec{F}_f s-ar roti și ar genera un con. În mod asemănător, rezultanta \vec{R} a forțelor active \vec{T} și \vec{G} ar genera, de asemenea, un con. Se obține astfel un con cu pînză dublă, care poartă numele de con de frecare (fig. 2.13).

La limita de echilibru $T = F_f = \mu N$. Din figură se observă că: $F_f = \mu N = N \operatorname{tg} \rho$; rezultă $\mu = \operatorname{tg} \rho$. Unghiul ρ poartă numele de unghi de frecare.

Se poate observa că dacă asupra punctului acționează o forță activă rezultantă \vec{F}_1 aflată în interiorul conului de frecare, atunci componenta $T_1 < F_{f \max}$ și punctul material este în echilibru.

Dacă acționează o forță \vec{F}_2 aflată în afara conului de frecare, $T_2 > F_{f \max}$ și punctul material se pune în mișcare.

Pentru echilibru este necesar ca suportul rezultantei forței active să fie în interiorul conului de frecare.

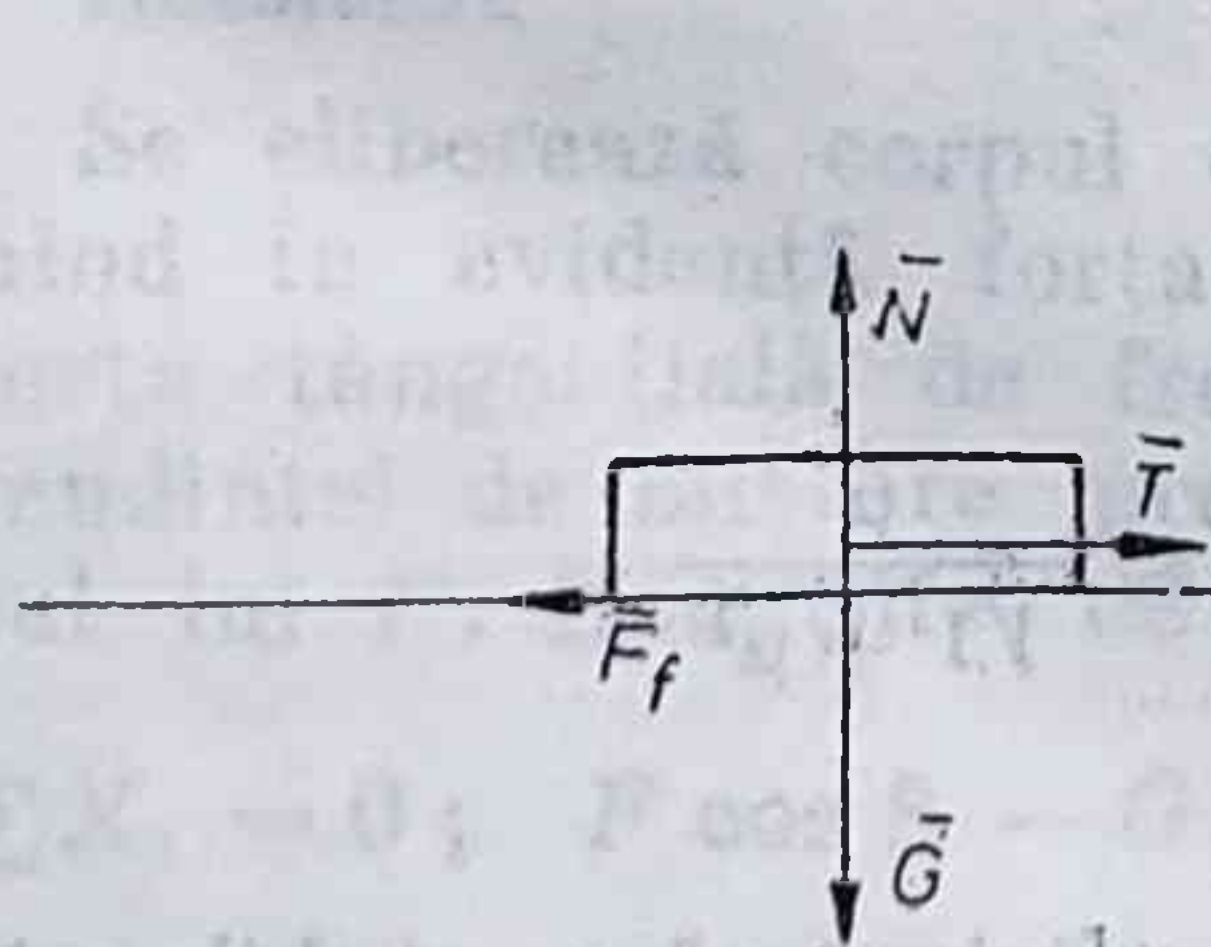


Fig. 2.12

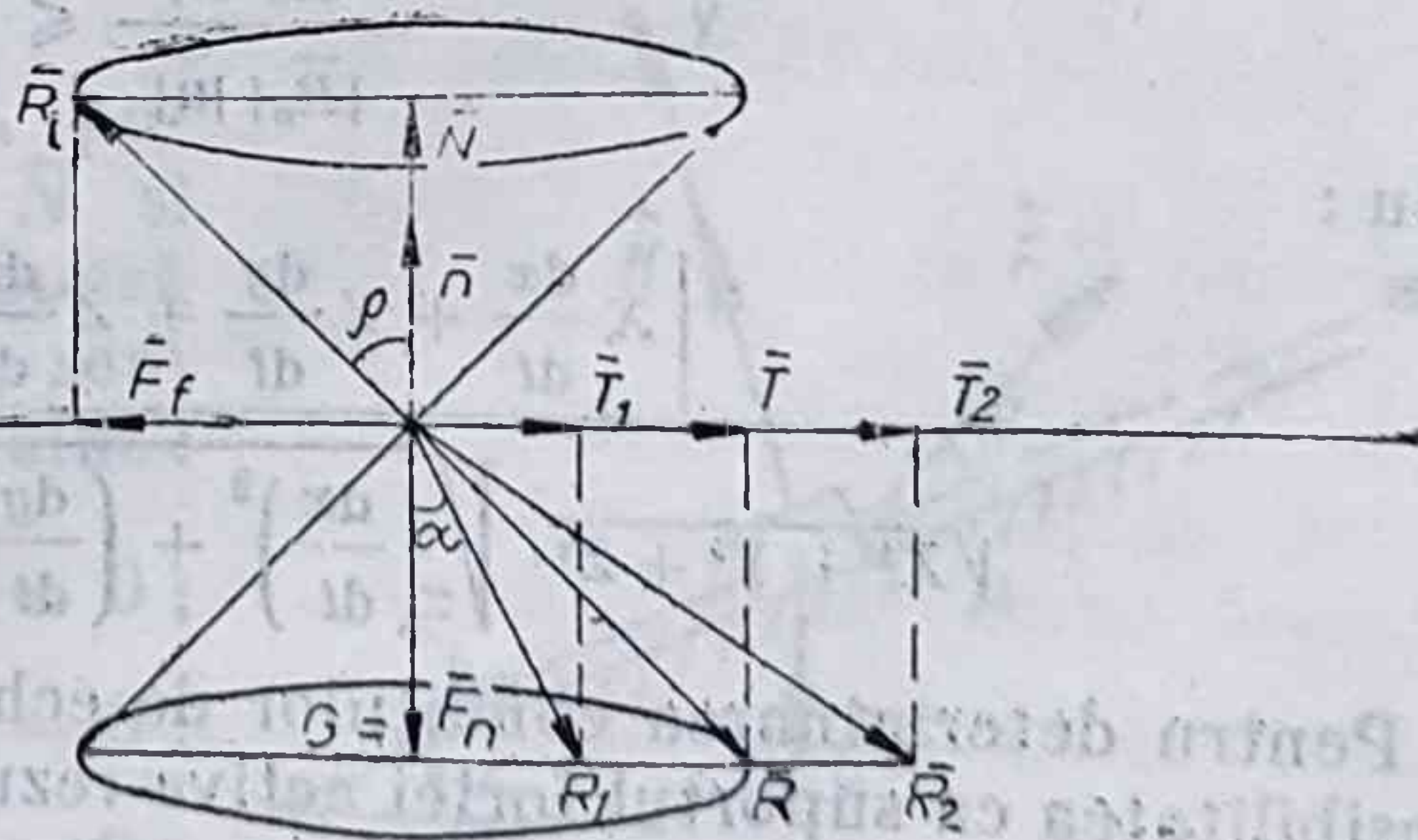


Fig. 2.13

În cazul studierii condițiilor de echilibru a unui punct material, se poate determina situația comparând unghiul α pe care-l face suportul forței active cu normala la suprafață cu unghiul de frecare ρ care limitează poziția de echilibru. La echilibru trebuie deci să avem $\alpha \leq \rho$, adică $\cos \alpha \geq \cos \rho$.

Se notează versorul normalei la suprafața de sprijin a punctului de sprijin cu \bar{n} . Suprafața este dată prin ecuația $f(x, y, z)$. Expresia unghiului α dintre forța activă \bar{R}_a și normală este dată de relația analitică :

$$\cos \alpha = \frac{\bar{R}_a \cdot \bar{n}}{|\bar{R}_a| |\bar{n}|}.$$

Expresia versorului \bar{n} este de forma :

$$\bar{n} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \bar{k} \right).$$

Expresia forței active \bar{R}_a este de forma :

$$\bar{R}_a = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}.$$

Observînd că : $\cos \rho = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \rho}}$, se poate scrie condiția de echilibru sub forma :

$$\frac{\left| X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} \right|}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \rho}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

În cazul punctului material rezemat pe o curbă în spațiu se poate determina suportul versorului normalei \bar{n} prin compunerea celor doi versori normali la cele două suprafețe, care prin intersectarea lor dau curba respectivă și apoi se determină unghiul dintre normală și forța activă în același mod.

O cale mai simplă o constituie însă folosirea ecuațiilor parametrice ale curbei :

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

În acest caz, versorul tangentei la curbă este :

$$\bar{u} = \frac{dx}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \bar{k}.$$

Se notează unghiul dintre tangenta la curbă și direcția forței active cu $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Se observă că : $\cos \beta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$. În acest caz, condiția de echilibru rezultă din expresia :

$$\frac{\bar{R}_a \cdot \bar{n}_1}{|\bar{R}_a| |\bar{u}|} \leq \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}},$$

sau :

$$\frac{\left| X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right|}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2}} \leq \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Pentru determinarea condițiilor de echilibru este suficient să se stabilească posibilitatea ca suportul forței active rezultante să se afle în interiorul conului de frecare.

Condițiile de echilibru. În cazul legăturii cu frecare, în ecuațiile de echilibru este necesar să se introducă și forța de frecare. De asemenea, trebuie avut în vedere faptul că trebuie respectată permanent inegalitatea :

$$|\bar{F}_f| \leq \mu |\bar{N}|.$$

Dacă se notează cu \bar{R}_a rezultanta forțelor active, cu \bar{N} reacțiunea normală și cu \bar{F}_f forța de frecare, condițiile de echilibru se pot scrie sub forma :

$$\bar{R}_a + \bar{N} + \bar{F}_f = 0,$$

$$|\bar{F}_f| \leq \mu |\bar{N}|.$$

Aceste condiții sînt constituite dintr-o ecuație vectorială și o inegalitate.

În cazul punctului rezemat pe o suprafață exprimată prin relația $f(x, y, z) = 0$, condițiile de echilibru sub formă scalară se pot exprima prin relațiile :

$$R_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + F_x = 0;$$

$$R_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + F_y = 0;$$

$$R_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + F_z = 0;$$

și :

$$T \leq \mu N.$$

În cazul punctului rezemat pe o curbă exprimată prin ecuațiile $f_1(x, y, z) = 0$ și $f_2(x, y, z) = 0$, condițiile de echilibru devin :

$$R_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + F_x = 0;$$

$$R_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + F_y = 0;$$

$$R_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + F_z = 0;$$

și :

$$|\bar{F}_f| \leq \mu |\bar{N}|.$$

APLICAȚIA 1

Se consideră corpul de greutate G care reazemă cu frecare (coeficient μ) pe planul înclinat cu unghiul α . Să se determine mărimea forței F de înclinare β față de plan, pentru echilibru (fig. 2.14).

Rezolvare

Se eliberează corpul de legături, punînd în evidență forța normală \bar{N} și forța tangențială de frecare \bar{F}_f , opusă tendinței de mișcare presupuse în sensul lui F . Ecuațiile de echilibru sînt :

$$\sum X_i = 0; \quad F \cos \beta - G \sin \alpha - F_f = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N - G \cos \alpha + F \sin \beta = 0;$$

Pentru echilibru trebuie ca $|\bar{F}_f| \leq \mu |\bar{N}|$.

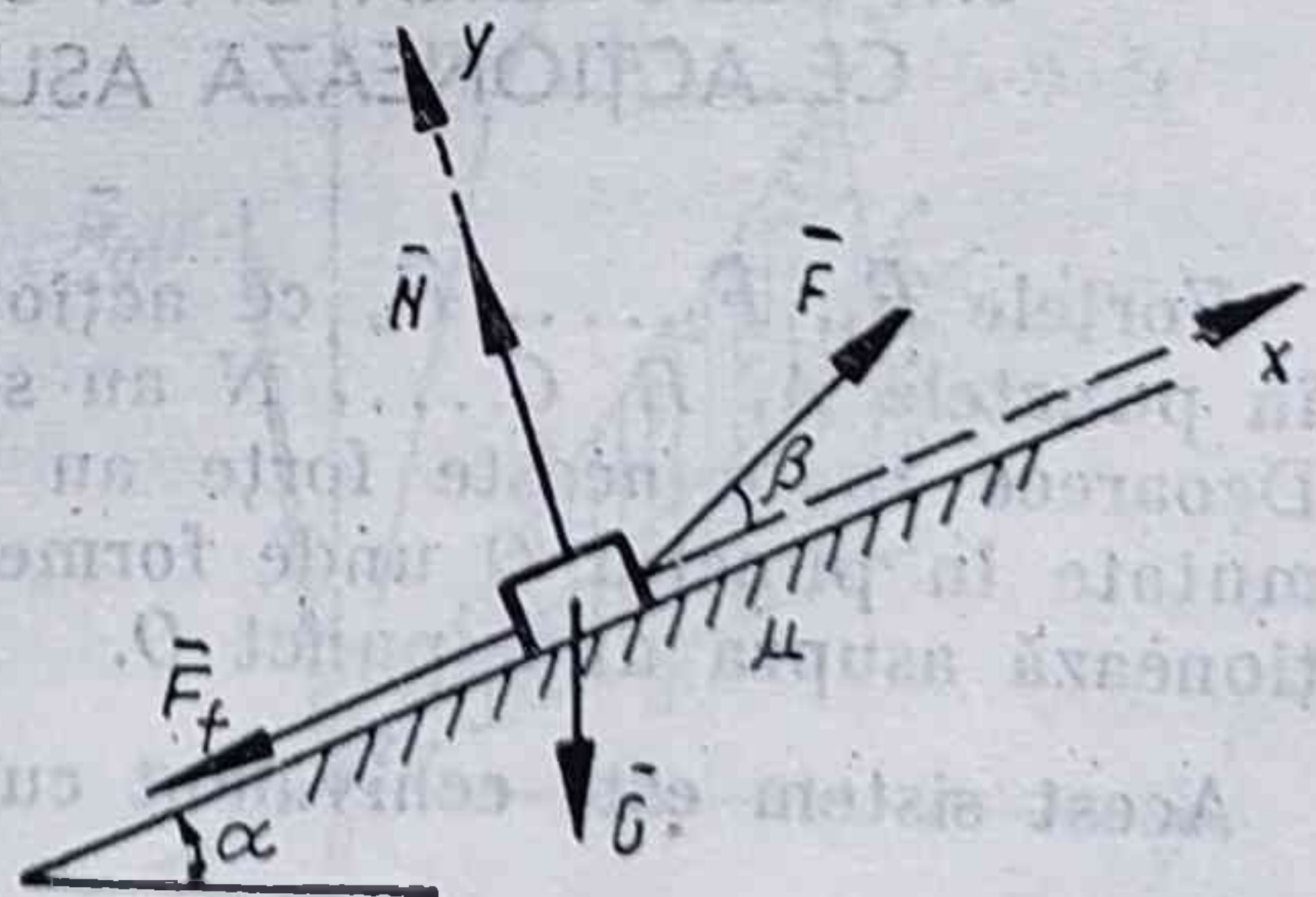


Fig. 2.14

Rezolvând, se obține :

$$F \leq G \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \beta + \mu \sin \beta} .$$

Dacă se ia în considerare tendința de mișcare spre stînga, atunci se schimbă sensul inegalității și semnul din fața termenilor ce conțin pe μ .

În final, pentru echilibru, forța F trebuie să se găsească în intervalul :

$$G \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \beta - \mu \sin \beta} \leq F \leq G \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \beta + \mu \sin \beta} .$$

3.

STATICA CORPULUI SOLID RIGID

Corpul solid rigid se caracterizează prin faptul că nu se deformează sub acțiunea unor forțe. Se consideră un corp solid rigid (fig. 3.1) asupra căruia acționează două forțe \vec{F} și $-\vec{F}$ egale de semn contrar, situate pe același suport avînd punctele de aplicație în A și B .

Dacă cele două forțe \vec{F} și $-\vec{F}$ sînt mutate pe suportul lor în A_1 și, respectiv, B_1 , cele două distanțe luate în considerare AB și A_1B_1 rămîn de asemenea constante. Dacă se consideră un corp rigid asupra căruia acționează o singură forță \vec{F} (fig. 3.2) în punctul A , efectul acestei forțe nu se schimbă dacă într-un punct B de pe suportul ei se introduc două forțe \vec{F} și $-\vec{F}$ care să acționeze asupra corpului rigid.

Este evident că forța \vec{F} aplicată în A și cu forța $-\vec{F}$ aplicată în B își anulează efectele, astfel că asupra corpului rămîne să acționeze numai forța \vec{F} aplicată în B . Rezultă deci că forța \vec{F} poate fi mutată în lungul suportului său fără ca efectul să se schimbe. Vectorul forță are, în cazul corpului solid rigid, proprietatea de vector alunecător.

3.1. REDUCEREA UNUI SISTEM DE FORȚE CONCURENTE CE ACȚIONEAZĂ ASUPRA CORPULUI SOLID RIGID

Forțele $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ce acționează asupra corpului solid rigid aplicate în punctele A, B, C, \dots, N au suportii concurenți în punctul O (fig. 3.3). Deoarece toate aceste forțe au caracter de vector alunecător, ele pot fi mutate în punctul O unde formează un sistem de forțe concurente ce acționează asupra unui punct O .

Acest sistem este echivalent cu rezultanta sistemului de forțe : $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$, a cărei mărime, direcție și sens sînt bine determinate.

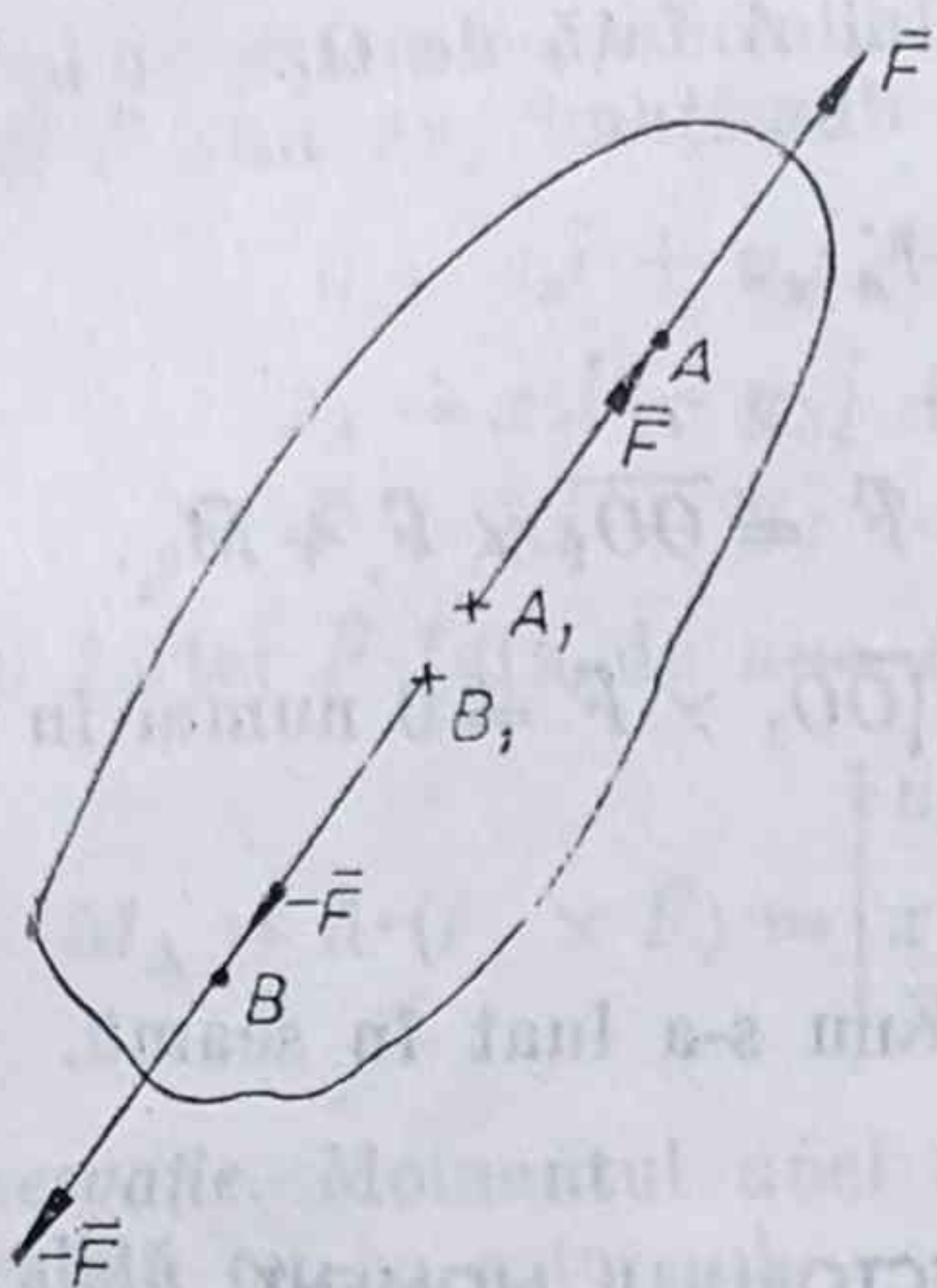


Fig. 3.1

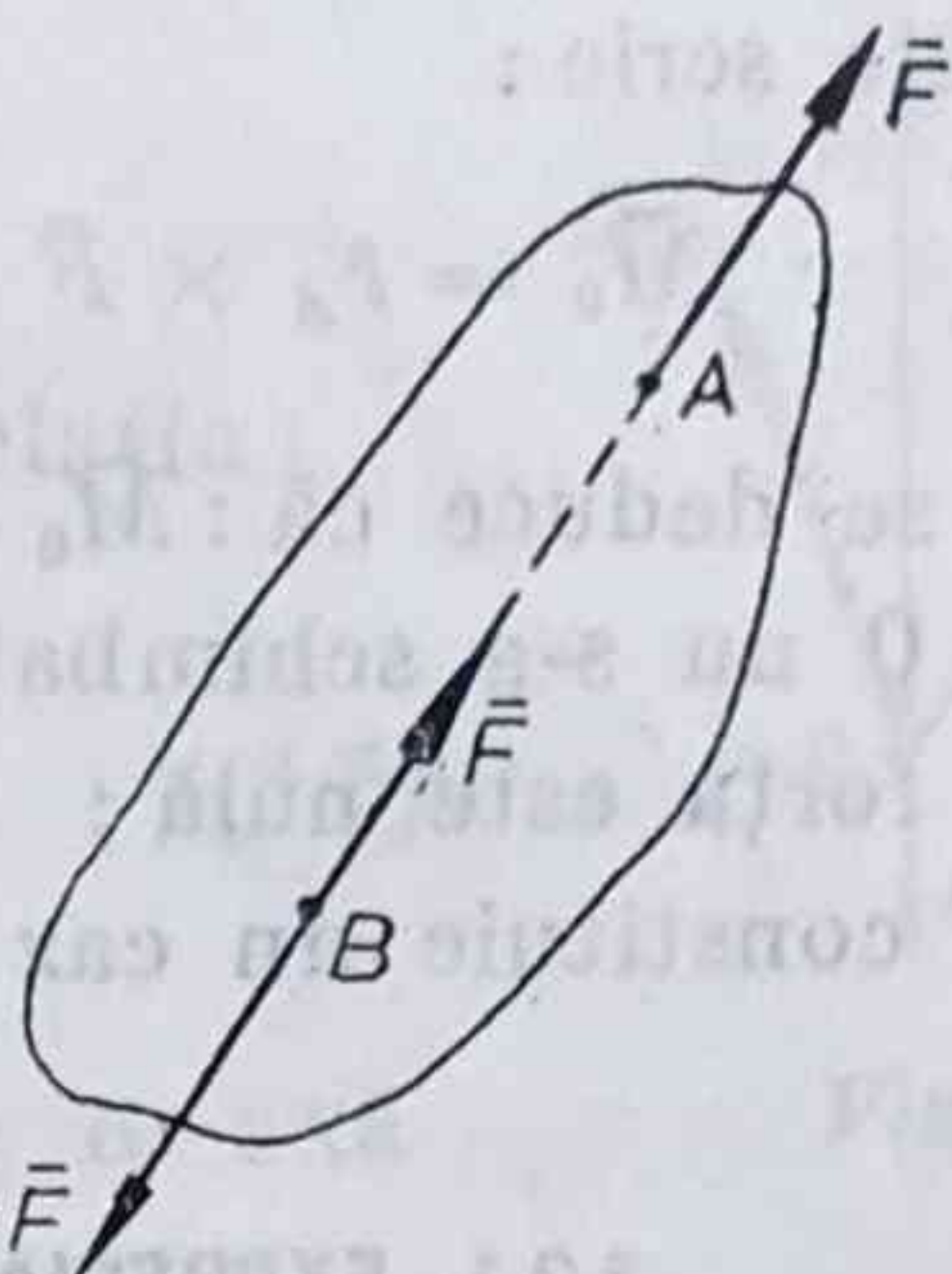


Fig. 3.2

3.2. MOMENTUL UNEI FORȚE ÎN RAPORT CU UN PUNCT

Prin definiție, momentul unei forțe \vec{F} aplicate unui solid rigid în raport cu un reper (punct) O este egal cu produsul vectorial dintre vectorul de poziție al unui punct oarecare pe suportul forței și vectorul forță (fig. 3.4):

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F} = \vec{r}_B \times \vec{F}, \quad (3.1, a)$$

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = r_A \cdot F \sin \alpha = r_B \cdot F \sin \beta = F \cdot d, \quad (3.1, b)$$

deoarece

$$r_A \sin \alpha = r_B \sin \beta = d. \quad (3.1, c)$$

Momentul unei forțe în raport cu un punct are caracterul unui vector legat de reperul în raport cu care se stabilește. Mărimea, direcția, sensul se modifică dacă se schimbă reperul respectiv. Astfel momentul forței \vec{F} în raport cu un alt reper O_1 este dat în baza definiției stabilite de relația:

$$\vec{M}_{O_1}(\vec{F}) = \vec{r}'_A \times \vec{F},$$

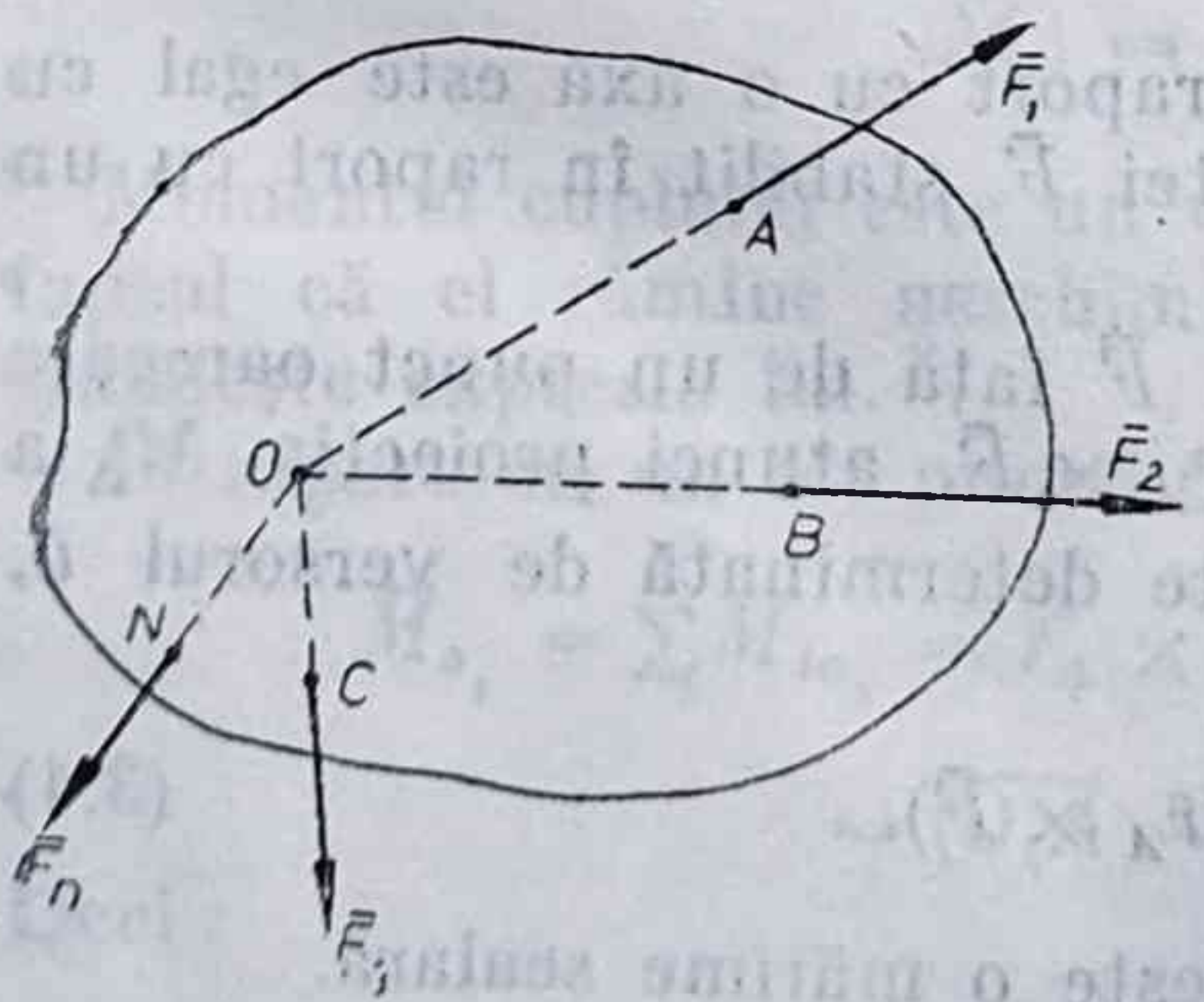


Fig. 3.3

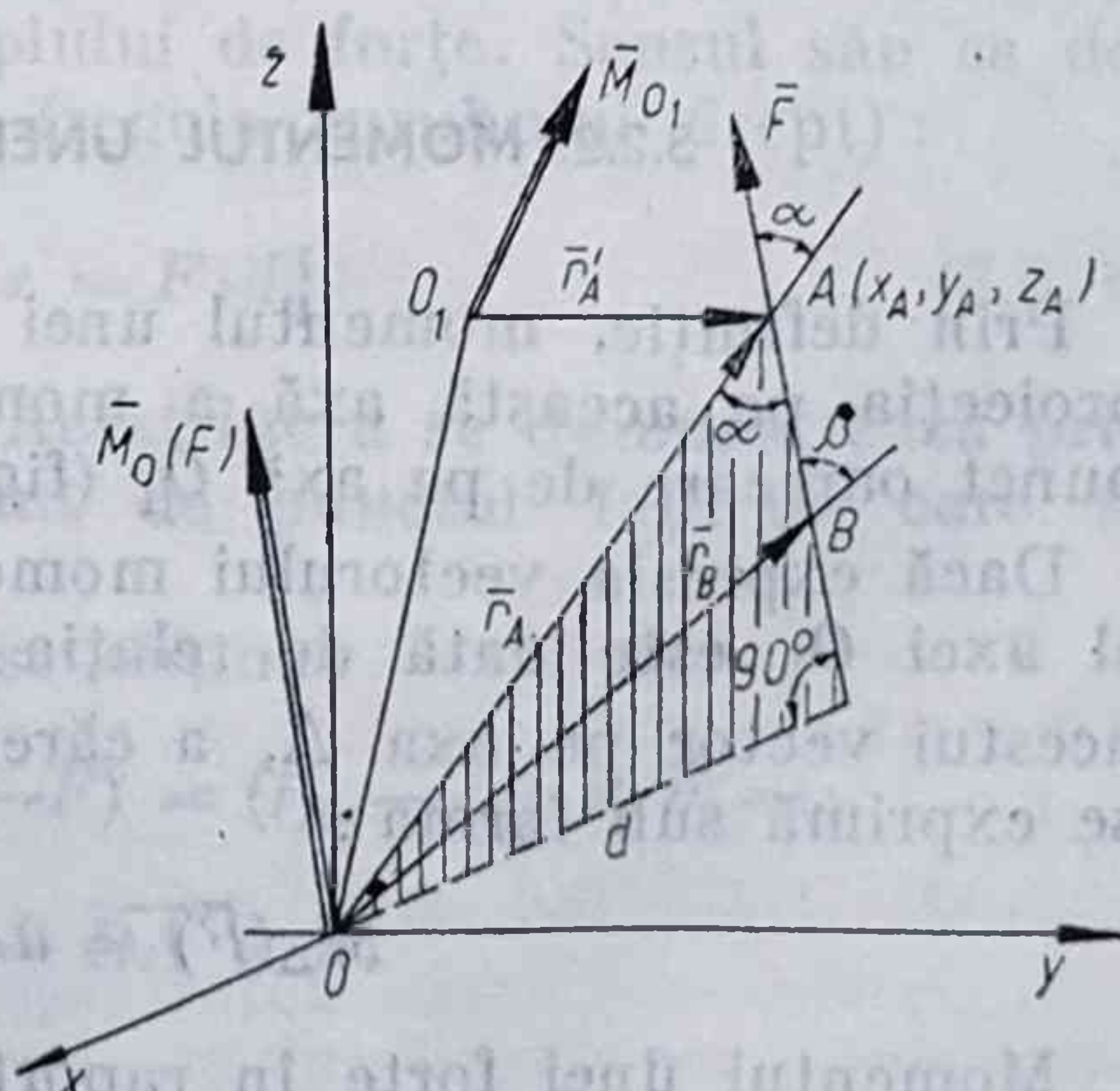


Fig. 3.4

unde \vec{r}'_A este vectorul de poziție al punctului A față de O_1 .

Se observă că :

$$\vec{r}_A = \overline{OO_1} + \vec{r}'_A$$

și se poate scrie :

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_A \times \vec{F} = (\overline{OO_1} + \vec{r}'_A) \times \vec{F} = \overline{OO_1} \times \vec{F} + \vec{M}_{0_1}, \quad (3.2)$$

de unde se deduce că : $\vec{M}_0 \neq \vec{M}_{0_1}$, deoarece $[\overline{OO_1} \times \vec{F}] = 0$ numai în cazurile :

$\overline{OO_1} = 0$ nu s-a schimbat reperul ;

$\vec{F} = 0$ forța este nulă ;

$\overline{OO_1} \parallel \vec{F}$ constituie un caz particular care nu s-a luat în seamă.

3.2.1. EXPRESIA ANALITICĂ A VECTORULUI MOMENT

Dacă în raport cu sistemul de referință $Oxyz$ expresiile analitice ale vectorului de poziție \vec{r}_A al unui punct oarecare A de pe suportul forței \vec{F} și al forței \vec{F} sînt :

$$\vec{r}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k};$$

$$\vec{F} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k};$$

atunci expresia momentului forței \vec{F} în raport cu punctul O , conform definiției, este :

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_A \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \vec{i}(y_A Z - z_A Y) + \vec{j}(z_A X - x_A Z) + \vec{k}(x_A Y - y_A X) = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}. \quad (3.3, a)$$

S-au notat cu M_x , M_y , M_z proiecțiile vectorului \vec{M}_0 pe cele trei axe de referință date de expresiile :

$$M_x = y_A Z - z_A Y; \quad M_y = z_A X - x_A Z; \quad M_z = x_A Y - y_A X. \quad (3.3, b)$$

3.2.2. MOMENTUL UNEI FORȚE ÎN RAPORT CU O AXĂ

Prin definiție, momentul unei forțe \vec{F} în raport cu o axă este egal cu proiecția pe această axă a momentului forței \vec{F} stabilit în raport cu un punct oarecare de pe axă O_1 (fig. 3.5).

Dacă expresia vectorului moment al forței \vec{F} față de un punct oarecare al axei O_1 este dată de relația : $\vec{M}_{0_1}(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F}$, atunci proiecția M_Δ a acestui vector pe axa Δ , a cărei direcție este determinată de versorul \vec{u} , se exprimă sub forma :

$$M_\Delta(\vec{F}) = \vec{u} \cdot \vec{M}_{0_1}(\vec{F}) = \vec{u}(\vec{r}_A \times \vec{F}). \quad (3.4)$$

Momentul unei forțe în raport cu o axă este o mărime scalară.

Expresia analitică a momentului unei forțe în raport cu o axă se obține

considerând un sistem de referință $Oxyz$ față de care vectorii \vec{u} , \vec{r}_A și \vec{F} sînt exprimați sub forma :

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k};$$

$$\vec{r}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k};$$

$$\vec{F} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k},$$

momentul forței \vec{F} față de axa Δ este dat de relația :

$$M_\Delta = \vec{u} \cdot (\vec{r}_A \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ x_A & y_A & z_A \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

Observație. Momentul unei forțe F față de o axă paralelă cu ea este nul.

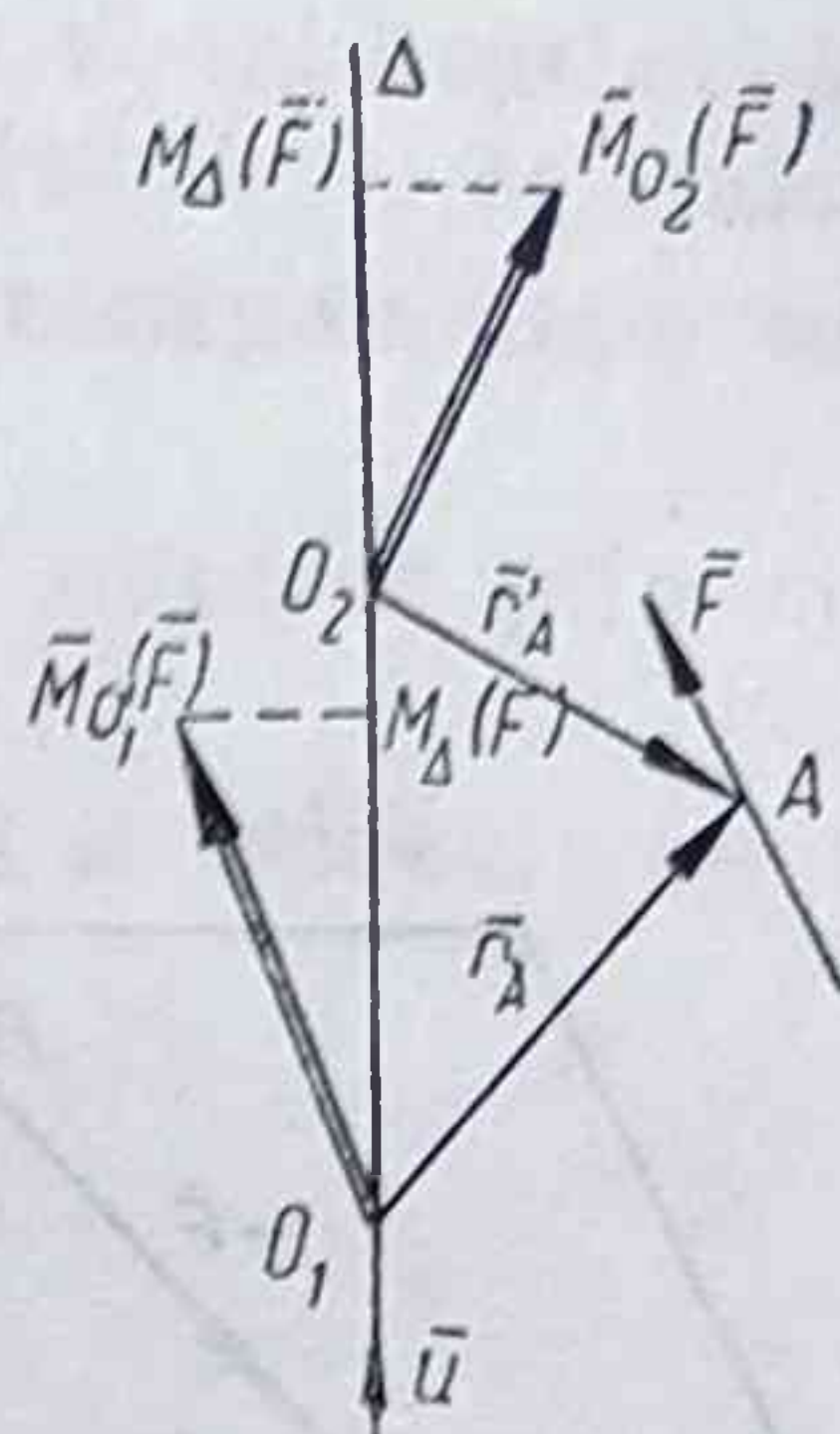


Fig. 3.5

3.2.3. MOMENTUL UNUI CUPLU DE FORȚE

Prin cuplu de forțe se înțelege un sistem de două forțe, egale și de sens contrar, ce acționează pe două suporturi diferite paralele asupra aceluiași corp solid rigid (fig. 3.6).

Suma proiecțiilor forțelor ce formează un cuplu pe o axă oarecare de versor \vec{u} este nulă :

$$\vec{u} \cdot \vec{F} + \vec{u} \cdot (-\vec{F}) = 0.$$

Se deduce că rezultanta cuplului este nulă.

Efectul unui cuplu de forțe aplicat unui corp solid rigid se măsoară prin momentul cuplului. Expresia momentului acestor forțe în raport cu un punct oarecare O din spațiu este :

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \sum \vec{M}_{iO} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} = \\ &= (\overline{OA} - \overline{OB}) \times \vec{F} = \overline{BA} \times \vec{F}. \end{aligned}$$

Momentul cuplului de forțe este un vector perpendicular pe planul forțelor, iar mărimea sa este egală cu mărimea forței înmulțită cu mărimea distanței dintre forțe, denumită brațul cuplului de forțe. Sensul său se determină după regula produsului vectorial (regula șurubului drept) :

$$|\vec{M}_O| = |\overline{BA}| \cdot |\vec{F}| \sin \alpha = F \cdot d. \quad (3.6, a)$$

Momentul cuplului este un vector liber. Acest lucru se demonstrează prin faptul că el rămîne neschimbat, indiferent de punctul față de care se stabilește expresia lui.

În raport cu un alt punct O_1 (fig. 3.6) se obține :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O_1} &= \sum \vec{M}_{iO_1} = \vec{r}'_A \times \vec{F} + \vec{r}'_B \times (-\vec{F}) = (\vec{r}'_A - \vec{r}'_B) \times \vec{F} = \\ &= (\overline{O_1A} - \overline{O_1B}) \times \vec{F} = \overline{BA} \times \vec{F}. \end{aligned}$$

Deci :

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O. \quad (3.6, b)$$

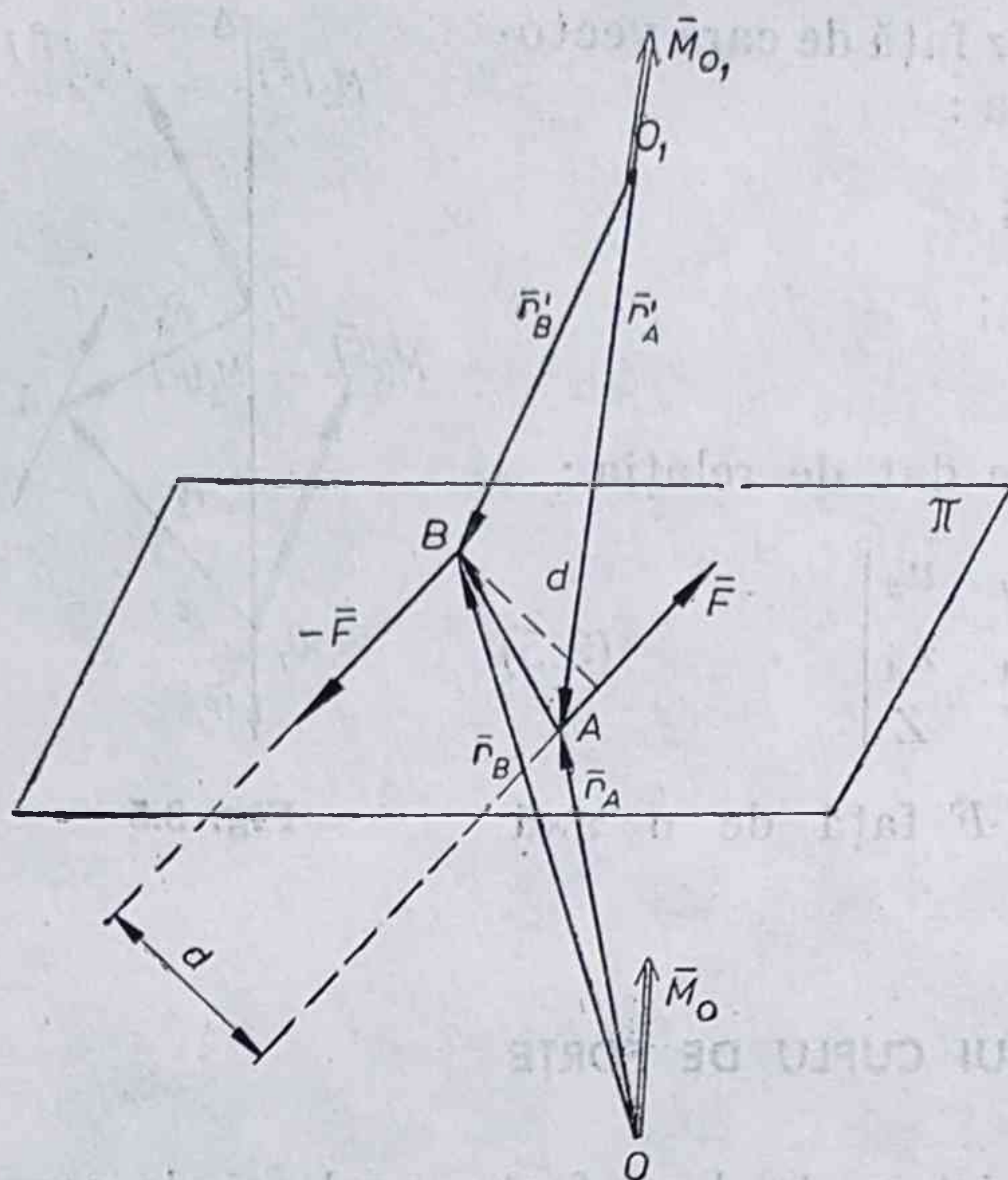


Fig. 3.6

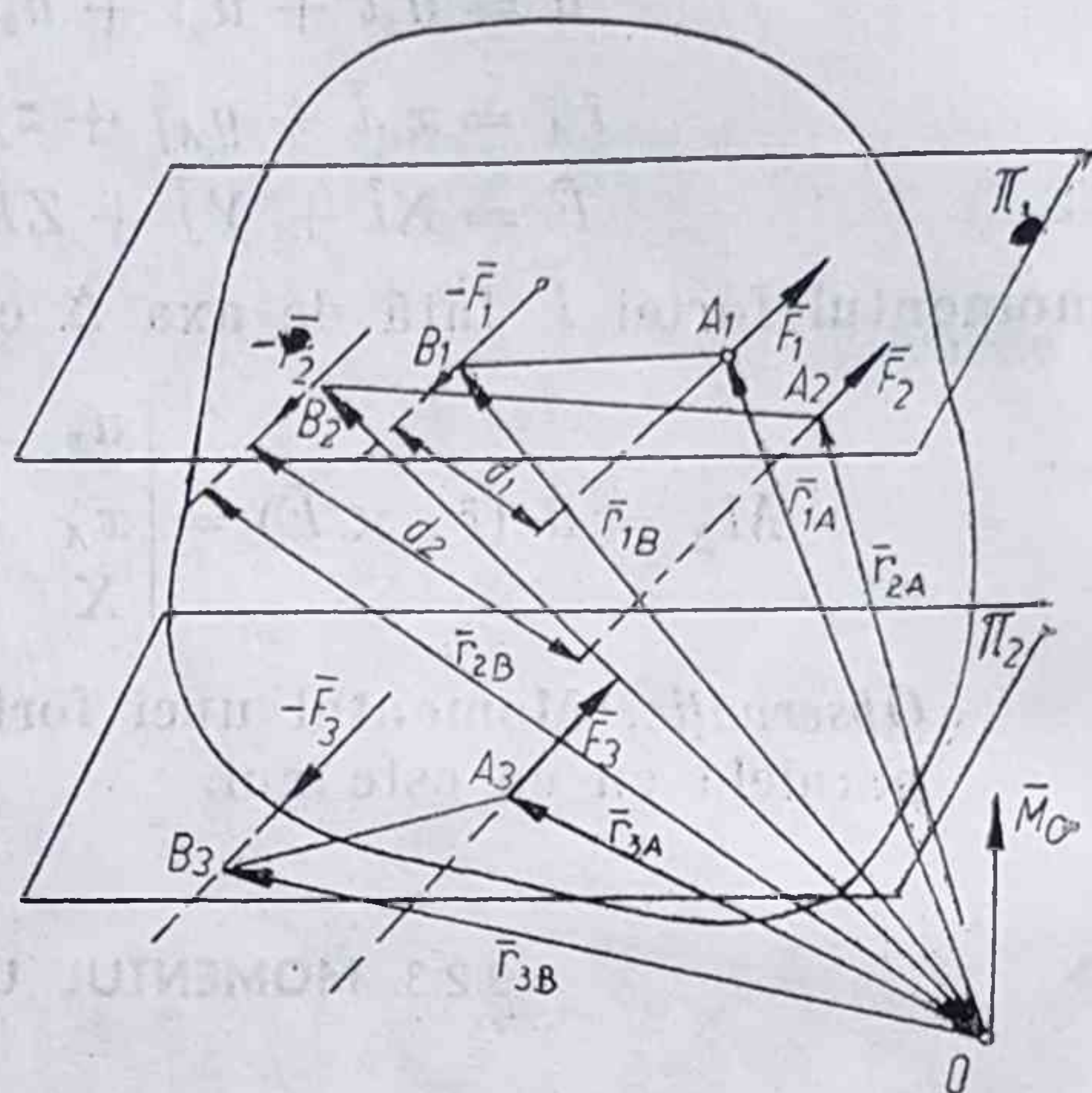


Fig. 3.7

Două cupluri de forțe care produc același efect, adică au același moment ca mărime, direcție și sens se numesc cupluri echivalente (fig. 3.7) :

$$\overline{B_1A_1} \times \vec{F}_1 = \overline{B_2A_2} \times \vec{F}_2 = \overline{B_3A_3} \times \vec{F}_3.$$

Deoarece momentul unui cuplu este un vector liber, deci poate fi aplicat în orice punct al spațiului, este evident că două cupluri de forțe pot fi echivalente chiar dacă ele sînt așezate în plane paralele ale unui corp solid rigid.

3.3. REDUCEREA UNUI SISTEM DE FORȚE OARECARE CE ACȚIONEAZĂ ASUPRA UNUI CORP SOLID RIGID

În cazul unui sistem de forțe ce acționează asupra unui corp solid rigid, trebuie avut în vedere că vectorii forță au caracterul de *vectori alunecători*.

Problema principală care se pune, în cazul în care asupra unui corp solid rigid acționează un sistem de forțe oarecare, este de a-l înlocui cu un alt sistem de forțe mai simplu care să producă asupra corpului același efect.

3.3.1. OPERAȚII DE ECHIVALENȚĂ

Pentru a efectua această operație de reducere se folosesc operațiile elementare de echivalență. Aceste operații pot fi enunțate, după cum urmează :

1. o forță poate fi deplasată în lungul suportului ei, efectul ei asupra corpului rămînînd neschimbat ;

2. introducerea sau suprimarea a două forțe egale, de sens contrar, ce acționează pe același suport, nu schimbă efectul sistemului de forțe ce acționează asupra corpului ;

3. un sistem de forțe concurente într-un punct poate fi înlocuit cu rezultanta sa fără ca efectul sistemului de forțe asupra corpului să se schimbe ;

4. o forță oarecare din sistem poate fi înlocuită prin componentele sale fără ca efectul sistemului să se modifice ;

5. un cuplu de forțe dintr-un sistem de forțe poate fi înlocuit prin momentul cuplului fără ca efectul sistemului să se modifice ;

6. momentul unui cuplu dintr-un sistem de forțe poate fi înlocuit cu un cuplu de forțe echivalent.

3.3.2. TORSORUL

Cazul cel mai simplu de reducere a unui sistem în raport cu un punct îl constituie reducerea unei forțe ce acționează într-un punct A al rigidului în raport cu un alt punct O (fig. 3.8, a).

Sistemul nu-și schimbă efectul dacă în punctul O al rigidului, în raport cu care se face reducerea, se introduc două forțe egale, de sens contrar, și pe un același suport paralel cu forța dată \vec{F} (fig. 3.8, b).

Analizînd noul sistem de forțe astfel obținut, se constată că el poate fi considerat acum ca fiind format dintr-o forță \vec{F} notată cu (1) și un cuplu de forțe \vec{F} și $-\vec{F}$ notate cu (2) al cărui moment este $\vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F}$. Astfel se deduce că prin operația de reducere a vectorului \vec{F} din A în raport cu punctul O s-a obținut un sistem echivalent format dintr-un vector forță \vec{F} și un vector moment \vec{M}_O . Acest ansamblu format din doi vectori, \vec{F} , \vec{M}_O , poartă numele de *torsor*. Acest torsor se poate nota sub forma :

$$\tau_O \begin{cases} \vec{F} \\ \vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F} \end{cases} \quad (3.7, a)$$

Dacă se reduce forța \vec{F} din A în raport cu un alt punct O_1 , în cadrul noului sistem se modifică momentul în raport cu O_1 și torsorul de reducere în raport cu O_1 devine :

$$\tau_{O_1} \begin{cases} \vec{F} \\ \vec{M}_{O_1} = \vec{O_1A} \times \vec{F} = \vec{r}'_A \times \vec{F} \end{cases} \quad (3.7, b)$$

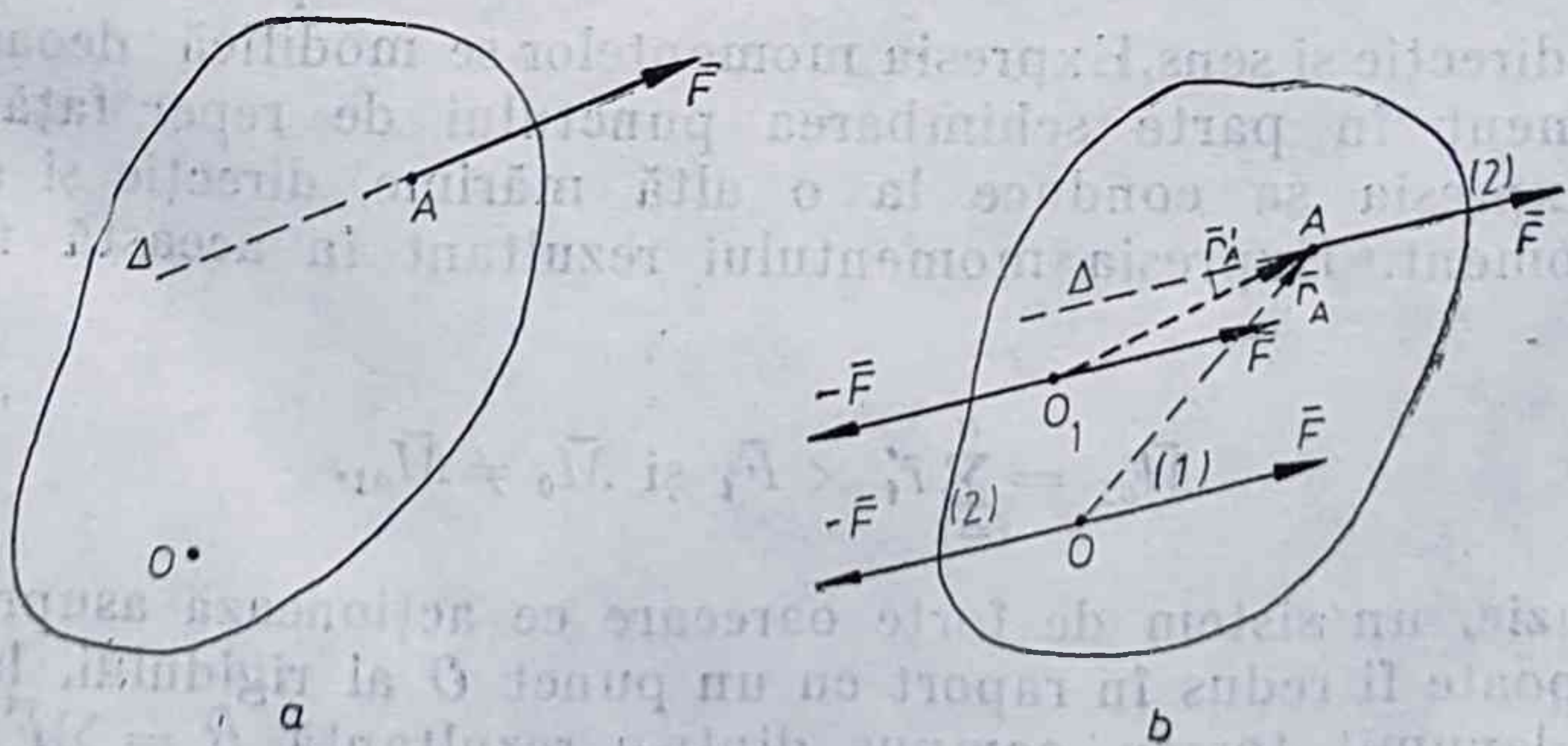


Fig. 3.8

Trebuie reținut ca o concluzie importantă că, în cadrul torsorului de reducere, vectorul \vec{F} este invariant, iar momentul \vec{M}_O se modifică odată cu punctul față de care se face reducerea.

3.3.3. REDUCEREA UNUI SISTEM DE FORȚE OARECARE APLICATE ASUPRA UNUI CORP SOLID RIGID ÎN RAPORT CU UN PUNCT

Se consideră un corp solid rigid asupra căruia acționează un sistem de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ de direcții oarecare (fig. 3.9, a).

Se introduce perechi de câte două forțe egale și de semn contrar și paralele cu forțele din sistem, toate cu punctul de aplicație în punctul de reducere, arbitrar ales, O . Se observă că toate forțele echipolente aplicate în O , de același sens cu cele date, formează un sistem de forțe concurente care pot fi reduse la o rezultantă unică ce trece prin O . Rezultanta poate fi ușor determinată cu ajutorul poligonului forțelor în spațiu: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ (construit în figură punctat). De asemenea, se observă că se formează un sistem de cupluri de forțe ale căror momente se pot stabili ușor în raport cu punctul de reducere O și au expresiile:

$$\vec{M}_{1O}(\vec{F}_1) = \vec{r}_A \times \vec{F}_1; \vec{M}_{2O}(\vec{F}_2) = \vec{r}_B \times \vec{F}_2; \vec{M}_{nO}(\vec{F}_n) = \vec{r}_n \times \vec{F}_n.$$

Fiind momentele unor cupluri de forțe acestea sînt vectori liberi și pot fi aplicați în punctul O , astfel că se obține un sistem de vectori concurenți în punctul O . Acest sistem se reduce la un moment resultant \vec{M}_O , care este dat de relația:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i, \quad (3.8)$$

unde cu indicele i s-a notat numărul de ordine al forței și litera corespunzătoare unui punct oarecare de pe suportul forței respective (A, B, \dots, N) ce determină vectorii de poziție $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \dots, \vec{r}_N$.

Dacă se efectuează aceeași operație în raport cu un alt punct de reducere O_1 se observă ușor că rezultanta sistemului de forțe concurente este aceeași ca mărime, direcție și sens, deoarece poligonul forțelor este paralel și identic. Se poate trage concluzia că rezultanta $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ este un invariant ca mărime, direcție și sens. Expresia momentelor se modifică deoarece pentru fiecare moment în parte schimbarea punctului de reper față de care se stabilește expresia sa conduce la o altă mărime, direcție și sens pentru vectorul moment. Expresia momentului resultant în această nouă relație este:

$$\vec{M}_{O1} = \sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times \vec{F}_i \text{ și } \vec{M}_O \neq \vec{M}_{O1}.$$

În concluzie, un sistem de forțe oarecare ce acționează asupra unui corp solid rigid poate fi redus în raport cu un punct O al rigidului, la un sistem echivalent denumit torsor, compus dintr-o rezultantă $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ și dintr-un moment resultant $\vec{M}_O = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ (fig. 3.9, b).

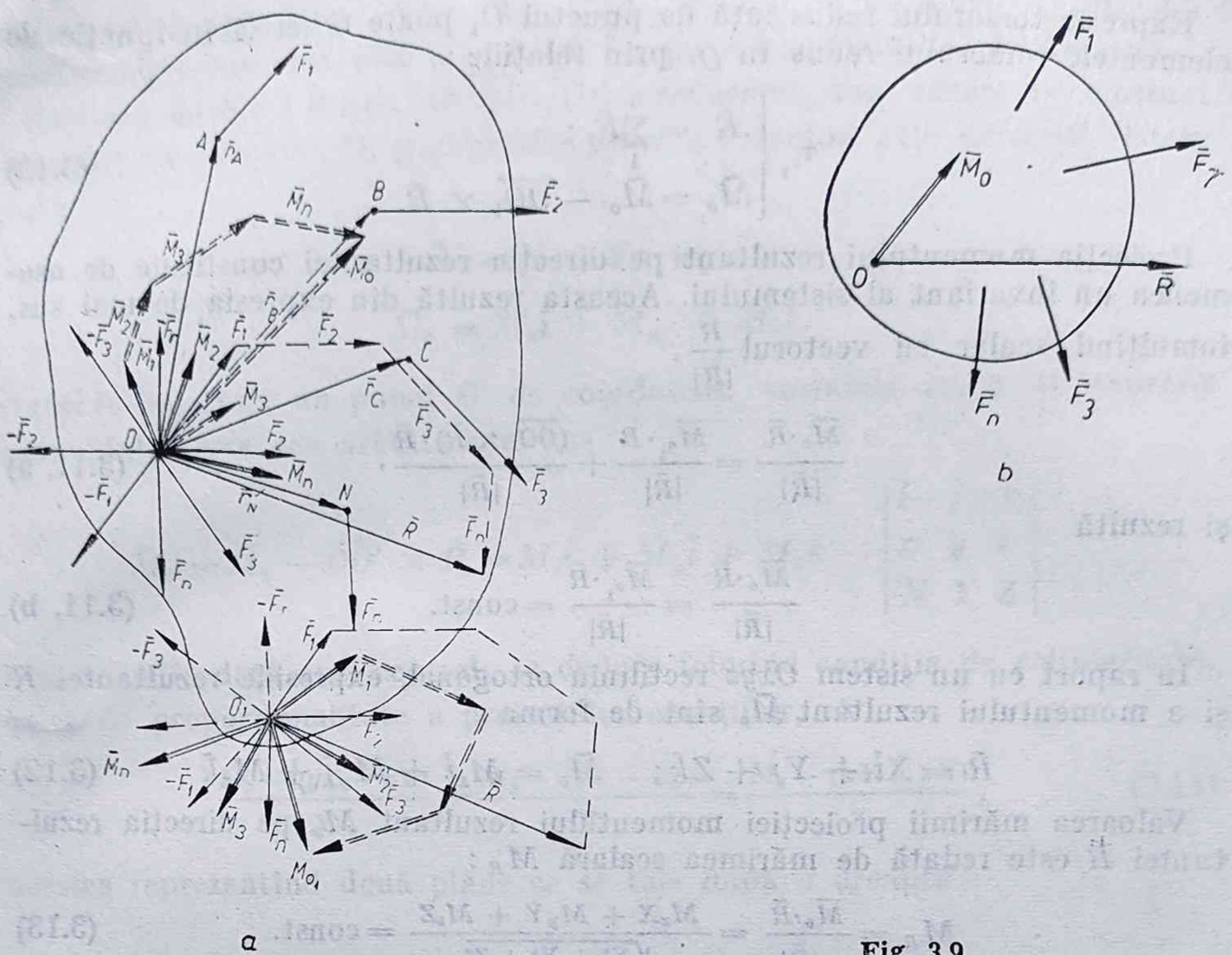


Fig. 3.9

3.3.4. INVARIANȚII UNUI SISTEM DE FORȚE

Se consideră un corp solid rigid asupra căruia acționează un sistem de forțe oarecare $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Efectuând reducerea în raport cu punctele O și O_1 , se obțin torsorii respectivi (fig. 3.10) τ_o și τ_{o_1} :

$$\tau_o \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i; \\ \vec{M}_o = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i \end{cases} \quad \tau_{o_1} \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i; \\ \vec{M}_{o_1} = \sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times \vec{F}_i. \end{cases} \quad (3.9)$$

Între cei doi torsori se pot găsi relațiile de legătură corespunzătoare. În expresia momentelor însă se schimbă vectorii de poziție. Între aceștia se poate scrie relația:

$$\vec{r}_i = \overline{OO_1} + \vec{r}'_i.$$

Se deduce ușor relația:

$$\begin{aligned} \vec{M}_o &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (\overline{OO_1} + \vec{r}'_i) \times \vec{F}_i = \\ &= \overline{OO_1} \times \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_{o_1} + \overline{OO_1} \times \vec{R}. \end{aligned}$$

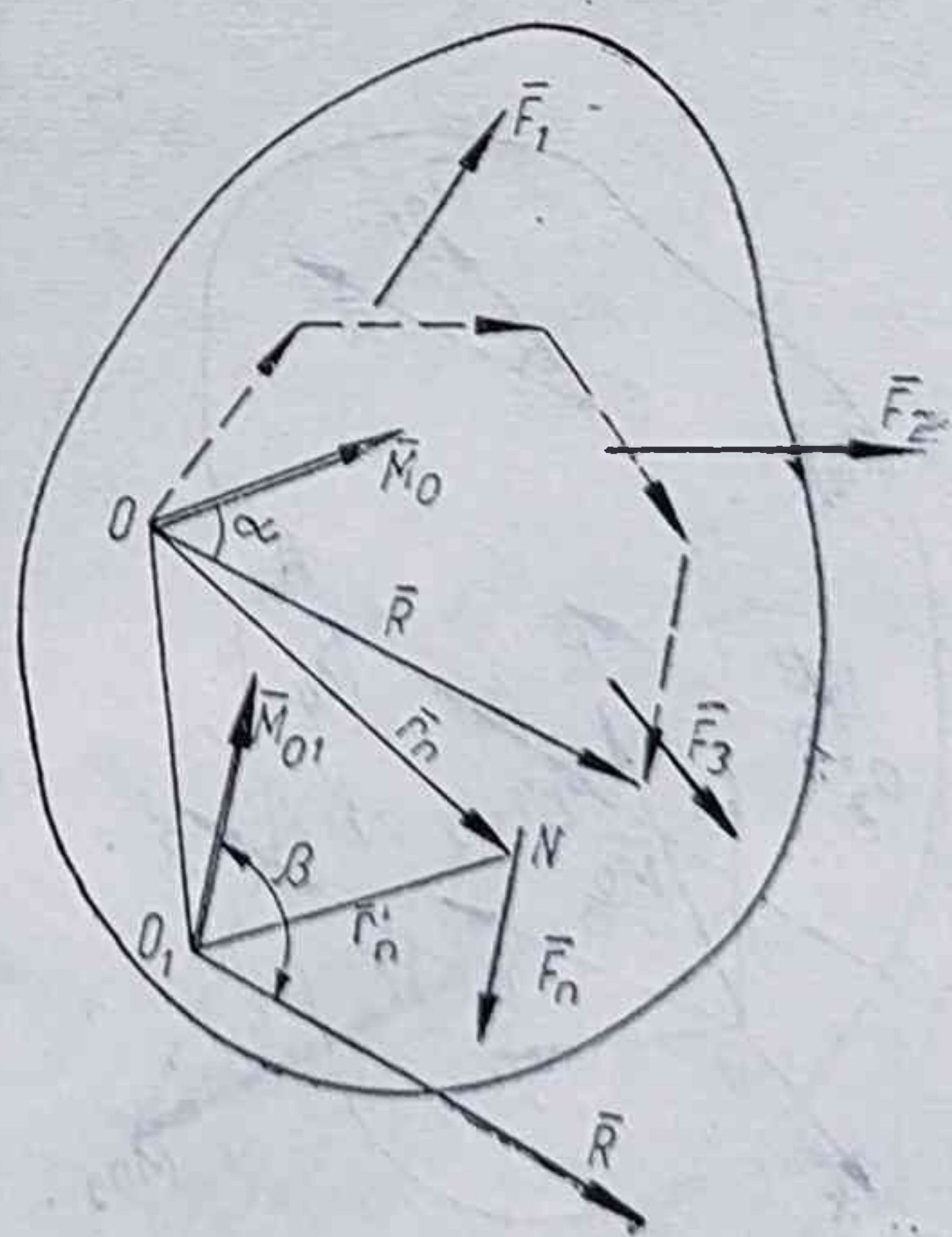


Fig. 3.10

Expresia tursorului redus față de punctul O_1 poate fi scrisă în funcție de elementele tursorului redus în O , prin relațiile :

$$\tau_{O_1} \begin{cases} \bar{R} = \sum_1^n \bar{F}_i; \\ \bar{M}_{O_1} = \bar{M}_O - \overline{OO_1} \times \bar{R}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Proiecția momentului resultant pe direcția rezultantei constituie de asemenea un invariant al sistemului. Aceasta rezultă din expresia de mai sus, înmulțind scalar cu vectorul $\frac{\bar{R}}{|\bar{R}|}$.

$$\frac{\bar{M}_O \cdot \bar{R}}{|\bar{R}|} = \frac{\bar{M}_{O_1} \cdot \bar{R}}{|\bar{R}|} + \frac{(\overline{OO_1} \times \bar{R}) \cdot \bar{R}}{|\bar{R}|}, \quad (3.11, a)$$

și rezultă

$$\frac{\bar{M}_O \cdot \bar{R}}{|\bar{R}|} = \frac{\bar{M}_{O_1} \cdot \bar{R}}{|\bar{R}|} = \text{const.} \quad (3.11, b)$$

În raport cu un sistem $Oxyz$ rectiliniu ortogonal, expresiile rezultantei R și a momentului resultant \bar{M}_O sînt de forma :

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}; \quad \bar{M}_O = M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k} \quad (3.12)$$

Valoarea mărimii proiecției momentului resultant M_O pe direcția rezultantei \bar{R} este redată de mărimea scalară M_R :

$$M_R = \frac{\bar{M}_O \cdot \bar{R}}{|\bar{R}|} = \frac{M_x X + M_y Y + M_z Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \text{const.} \quad (3.13)$$

Deoarece mărimea rezultantei este invariantă, trinomial $M_x X + M_y Y + M_z Z$ este de asemenea invariant și poartă numele de *trinomial invariant*.

3.3.5. AXA CENTRALĂ (AXA TORSORULUI)

Pentru diferite puncte O_1, O_2, \dots, O_n ale rigidului, reducerea unui sistem de forțe oarecare în raport cu acestea conduce la diverși tursori care au toți aceeași rezultantă și diverse momente rezultante, așa cum se reprezintă

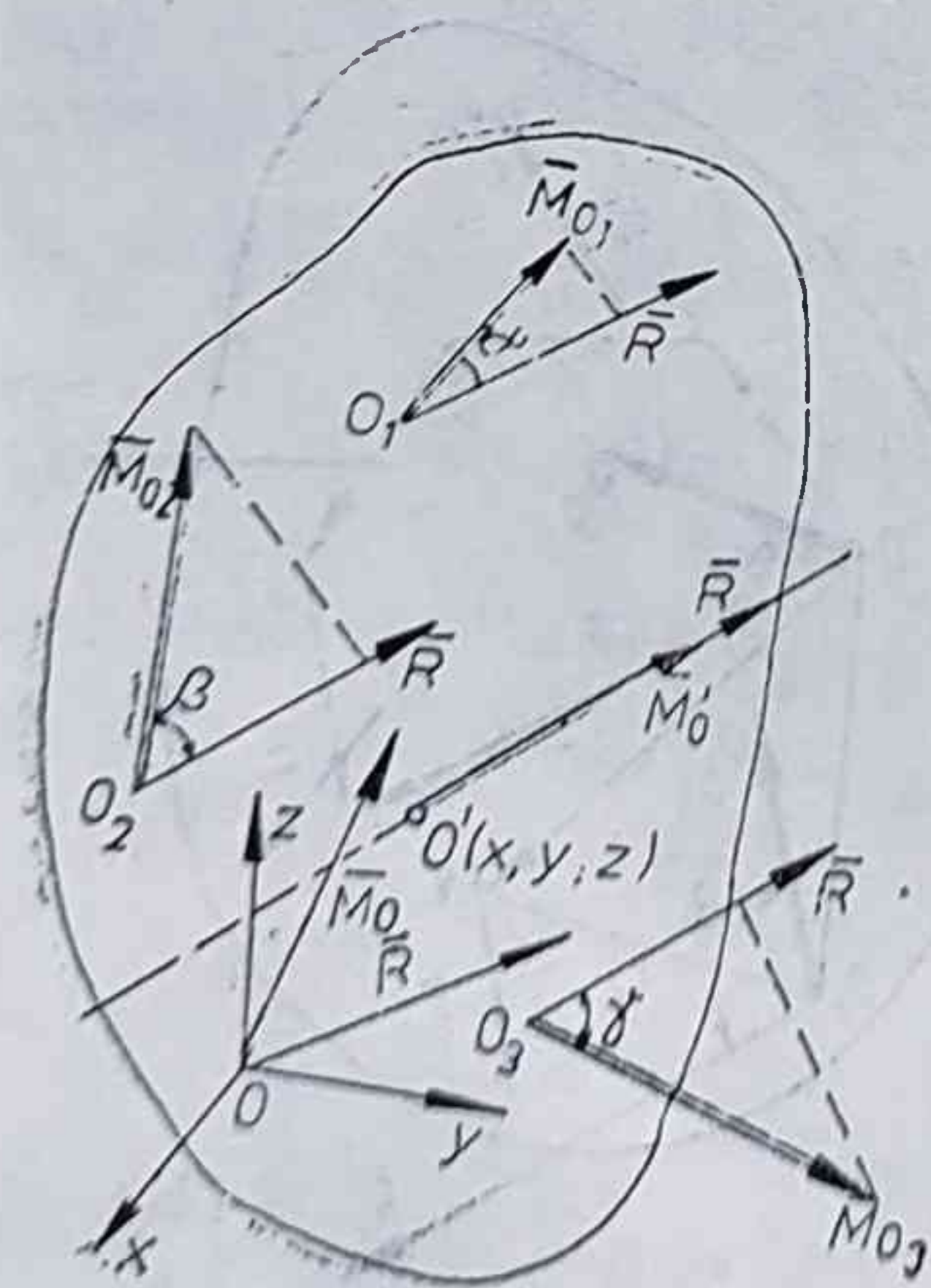


Fig. 3.11

intuitiv în figura 3.11. În toate cazurile însă proiecțiile momentelor rezultante pe direcția rezultantei sînt aceleași, adică se pot scrie : $M_{O_1} \cos \alpha = M_{O_2} \cos \beta = M_{O_3} \cos \gamma$. Există puncte ale corpului solid rigid O' față de care momentul resultant \bar{M}_O și rezultanta au aceeași direcție. În acest caz mărimea momentului resultant este egală cu mărimea proiecției momentului resultant pe direcția rezultantei forțelor sistemului, și este minimă. Un astfel de tursor poartă numele de *tursor minimal* și se caracterizează, în primul rînd, prin faptul că rezultanta \bar{R} și momentul resultant \bar{M}_O sînt vectori coliniari.

Locul geometric al punctelor din spațiu față de care prin reducerea unui sistem de forțe, ce

acționează asupra unui corp solid rigid, se obține un moment resultant coliniar cu rezultanta este o dreaptă și poartă numele de *axă centrală*.

Expresia analitică a axei centrale. Dacă reducerea unui sistem s-a efectuat în raport cu un punct O , și expresiile celor doi vectori față de acest sistem sînt :

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k};$$

$$\bar{M}_O = M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k},$$

atunci în raport cu un punct O' de coordonate variabile (x, y, z) expresia momentului este cea arătată mai sus :

$$\bar{M}_{O'} = \bar{M}_O - \overline{OO'} \times \bar{R} = M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k} - \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

Din definiția dată axei centrale se deduce folosind condiția de coliniaritate, adică de proporționalitate a proiecțiilor ecuațiilor, că :

$$\frac{M_x - (yZ - zY)}{X} = \frac{M_y - (zX - xZ)}{Y} = \frac{M_z - (xY - yX)}{Z}, \quad (3.14)$$

acestea reprezentînd două plane ce se taie după o dreaptă.

3.3.6. CAZURILE DE REDUCERE ALE UNUI SISTEM DE FORȚE OARECARE

După cum s-a arătat, torsorul este echivalent cu un sistem de vectori oarecare alunecători $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$ (forțe) ce rezultă din reducerea acestuia în raport cu un punct O . Cei doi vectori \bar{R} și \bar{M}_O , care constituie torsorul în raport cu un punct O originea sistemului de referință, sînt :

$$\bar{R} = \sum_1^n \bar{F}_i$$

și

$$\bar{M}_O = \sum_1^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i.$$

Se disting următoarele cazuri :

1) $\bar{R} = 0$; $\bar{M}_O \neq 0$, torsorul se reduce la un cuplu ;
 2) $\bar{R} = 0$; $\bar{M}_O = 0$, sistemul este în echilibru și este nul în raport cu orice alt punct din spațiu ;

3) $\bar{R} \neq 0$; $\bar{M}_O = 0$, torsorul se reduce la o forță unică ce trece prin originea sistemului de referință O ;

4) $\bar{R} \neq 0$; $\bar{M}_O \neq 0$; în acest caz se disting două posibilități :

— momentul resultant stabilit \bar{M}_O față de O , poate fi chiar momentul vectorului resultant în raport cu O . În acest caz, momentul resultant este perpendicular pe resultantă. Acest lucru se determină ușor din condiția

de perpendicularitate $\vec{R} \cdot \vec{M}_o = 0$; sistemul se reduce la o rezultantă unică al cărui suport este axa centrală;

— cei doi vectori componenți ai torsorului nu sînt ortogonali, ci fac între ei un unghi α . În acest caz produsul $\vec{R} \cdot \vec{M}_o \neq 0$. Se poate determina, în acest caz, distanța pînă la axa centrală, care este dată de relația:

$$d = \frac{M_{min}}{|\vec{R}|} \frac{M_x X + M_y Y + M_z Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}};$$

sistemul se reduce la un torsor.

3.4. SISTEME DE FORȚE PLANE

Un sistem de forțe ce acționează asupra unui corp rigid este plan dacă suportii tuturor forțelor din sistem se află în același plan.

Pentru simplificare se alege sistemul de coordonate $Oxyz$ astfel încît planul Oxy să coincidă cu planul forțelor (fig. 3.12).

Dacă se face reducerea sistemului de forțe în raport cu originea O , sistemul se reduce la un torsor ale cărui componente vectoriale sînt:

$$\vec{R} = \sum_1^n \vec{F}_i = \sum_1^n X_i \cdot \vec{i} + \sum_1^n Y_i \cdot \vec{j} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j}, \quad (3.15)$$

$$\vec{M}_o = \sum_1^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_1^n M_{oi} \cdot \vec{k} = M_z \cdot \vec{k}.$$

Este evident că rezultanta sistemului are suportul său tot în planul Oxy , iar momentul rezultat este un vector perpendicular pe planul Oxy . Deci:

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_o = X \cdot M_x + Y \cdot M_y + Z \cdot M_z = 0.$$

Momentul rezultat este perpendicular pe planul forțelor, implicit pe rezultanta lor, și deci sistemul se poate reduce, în cazul că $\vec{R} \neq 0$ și $\vec{M}_z \neq 0$, la o rezultantă unică ce nu trece prin origine. Suportul acestei rezultante se deduce din ecuația axei centrale:

$$\frac{z \cdot Y}{X} = \frac{z \cdot X}{Y} = \frac{M_z - (x \cdot Y - y \cdot X)}{0}. \quad (3.16, a)$$

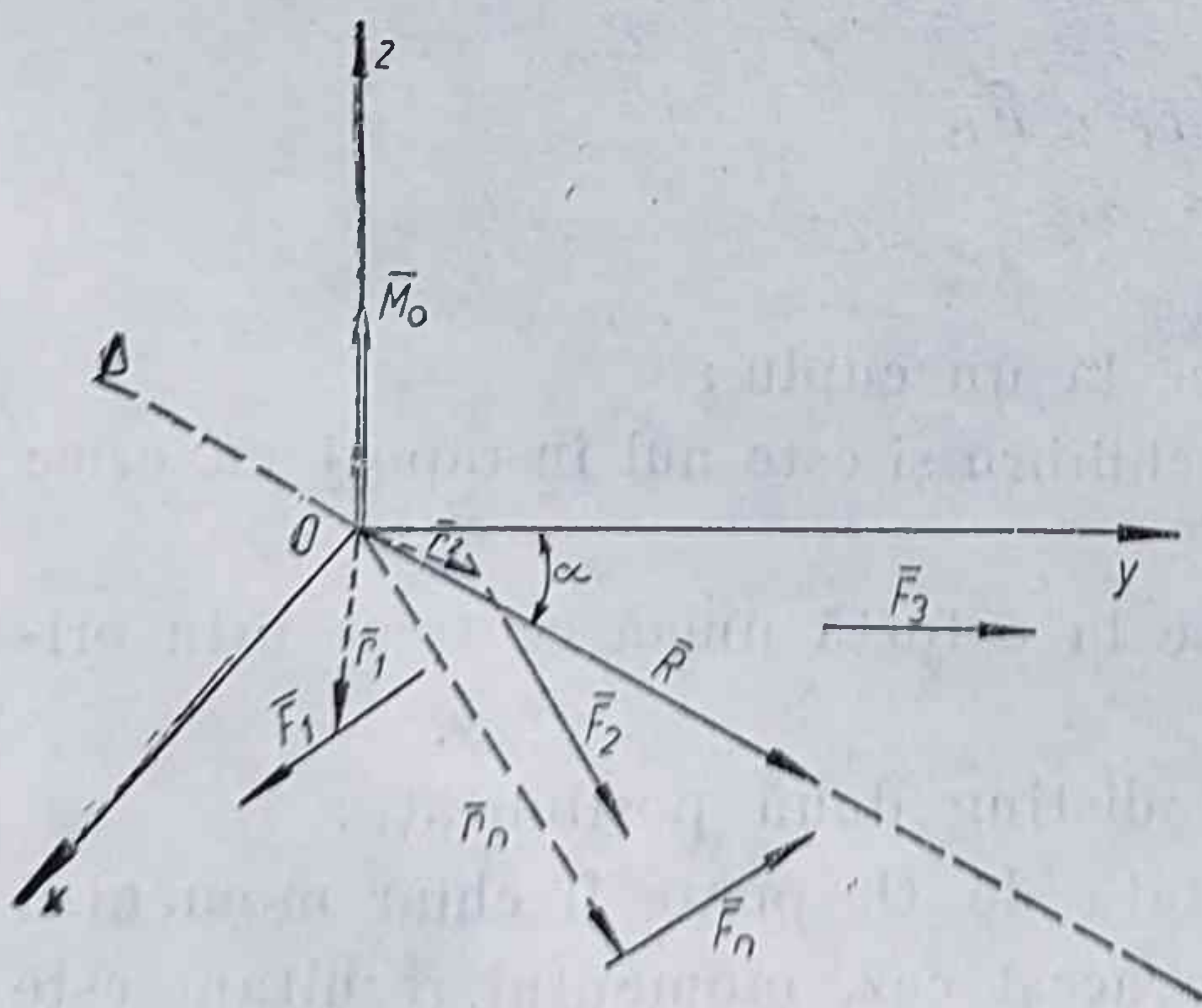


Fig. 3.12

Ecuația suportului rezultantei este deci: $x \cdot Y - y \cdot X - M_z = 0$.

Torsorul de reducere în raport cu originea O poate prezenta următoarele situații:

I. $\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}_o = 0$, sistemul de forțe plane se reduce la o forță unică ce trece prin origine;

II. $\vec{R} = 0$; $\vec{M}_o \neq 0$, sistemul de forțe plane se reduce la un cuplu al cărui moment este un vector perpendicular pe planul forțelor egal cu \vec{M}_o ;

III. $\vec{R} = 0$; $\vec{M}_o = 0$, sistemul este în echilibru;

IV. $\bar{R} \neq 0$; $\bar{M}_o \neq 0$, sistemul se reduce la o rezultantă unică ce nu trece prin origine, al cărei suport este dat de ecuația dreptei Δ a axei centrale dată prin relația :

$$xY - yX = M_z. \quad (3.16, b)$$

3.5. SISTEME DE FORȚE PARALELE

Un sistem de forțe $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ ce acționează asupra unui rigid formează un sistem de forțe paralele dacă toate aceste forțe sînt paralele cu o aceeași direcție Δ , caracterizată printr-un versor al direcției comune \bar{u} (fig. 3.13). O forță oarecare \bar{F}_i se poate exprima sub forma :

$$\bar{F}_i = F_i \cdot \bar{u}.$$

Sistemul de forțe se reduce în raport cu originea O la un tursor ale cărui componente vectoriale sînt :

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \sum_1^n F_i \cdot \bar{u} = (\sum_1^n F_i) \bar{u} = R \cdot \bar{u}, \\ \bar{M}_o &= \sum_1^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = \sum_1^n \bar{r}_i \times F_i \cdot \bar{u} = (\sum_1^n F_i \cdot \bar{r}_i) \times \bar{u}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Se observă că vectorul momentului rezultat este perpendicular pe versorul \bar{u} , iar rezultanta este paralelă cu \bar{u} .

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_o = R \cdot \bar{u} \cdot [(\sum_1^n F_i \cdot \bar{r}_i) \times \bar{u}] = 0. \quad (3.17, a)$$

În cazul general în care $\bar{R} \neq 0$ și $\bar{M}_o \neq 0$ sistemul se reduce la o rezultantă unică ce nu trece prin origine al cărei suport este dat de expresia axei centrale.

Momentul rezultat în raport cu un punct oarecare C de pe axa centrală este nul. Folosind relația de transformare a unui tursor prin trecerea de la un punct la altul, se poate scrie :

$$\bar{M}_c = \bar{M}_o - \overline{OC} \times \bar{R} = 0.$$

Se notează $\overline{OC} = \bar{\rho}_c$ și se scrie această relație sub forma :

$$(\sum_1^n F_i \cdot \bar{r}_i - \bar{\rho}_c \sum_1^n F_i) \times \bar{u} = 0.$$

Acest produs vectorial este nul dacă cei doi vectori ce constituie factorii săi sînt coliniari, deci se află într-un raport λ , ceea ce rezultă :

$$\sum_1^n F_i \cdot \bar{r}_i - \bar{\rho}_c \sum_1^n F_i = \lambda \bar{u}.$$

Din această relație se obține expresia vectorului de poziție a unui punct oarecare de pe suportul rezultantei :

$$\bar{\rho}_c = \frac{\sum_1^n F_i \bar{r}_i}{\sum_1^n F_i} - \frac{\lambda}{\sum_1^n F_i} \bar{u} = \frac{\sum_1^n F_i \bar{r}_i}{\sum_1^n F_i} - \lambda_i \bar{u}, \quad (3.18, a)$$

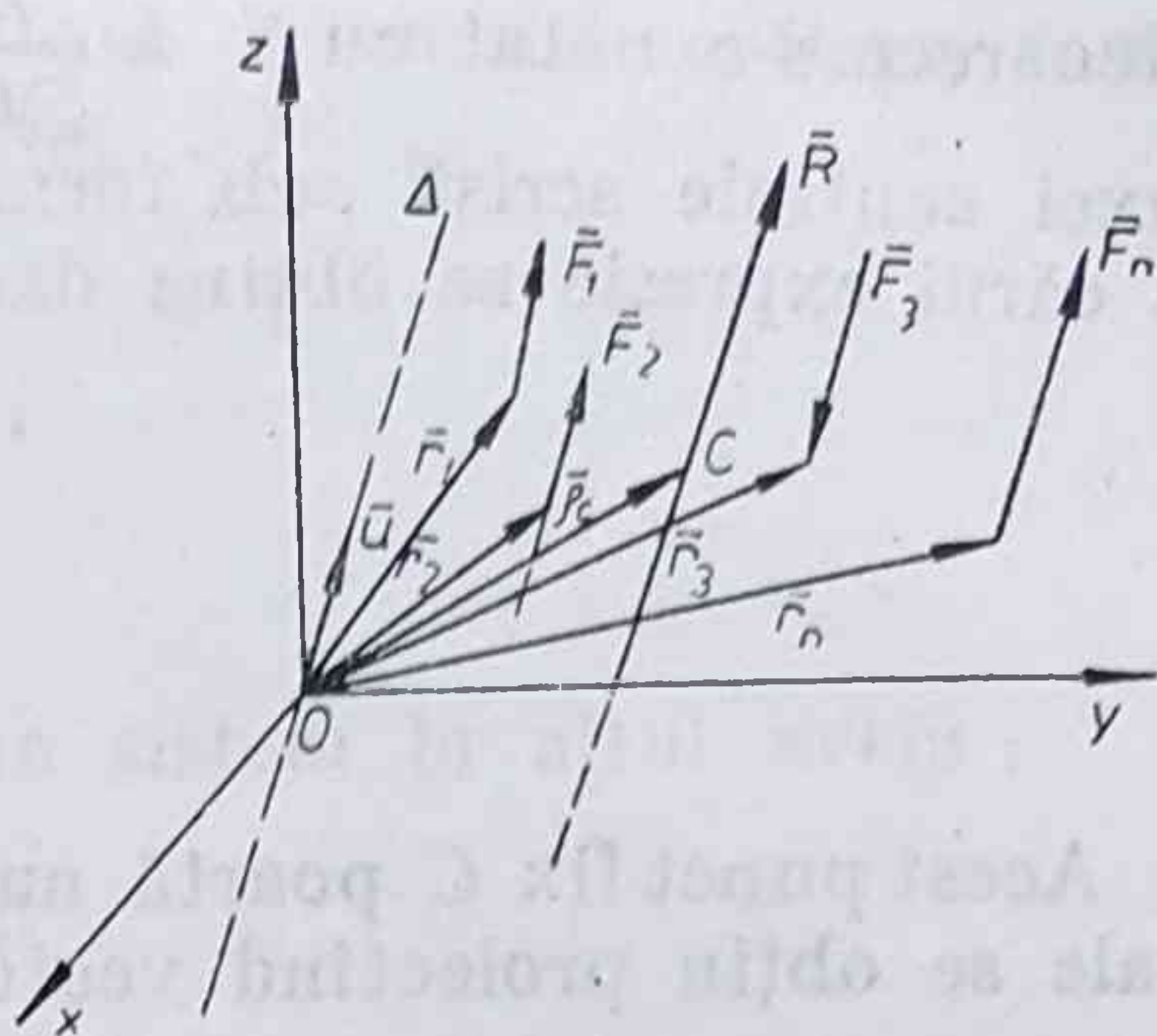


Fig. 3.13

deoarece s-a notat cu $\lambda_i = \frac{\lambda}{\sum F_i}$. Această relație reprezintă de fapt ecuația axei centrale scrisă sub formă vectorială. Ea trece printr-un punct fix C a cărui expresie se obține dacă $\lambda_i = 0$, adică :

$$\bar{\rho}_c = \frac{\sum_1^n F_i \bar{r}_i}{\sum_1^n F_i} . \quad (3.18, b)$$

Acest punct fix C poartă numele de centrul forțelor paralele ; coordonatele sale se obțin proiectînd vectorul $\bar{\rho}_c$ pe cele trei axe :

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_1^n F_i x_i}{\sum_1^n F_i} ; \\ y_c &= \frac{\sum_1^n F_i y_i}{\sum_1^n F_i} ; \\ z_c &= \frac{\sum_1^n F_i z_i}{\sum_1^n F_i} , \end{aligned} \quad (3.18, c)$$

unde x_c , y_c și z_c sînt coordonatele vectorului de poziție $\bar{\rho}_c$.

Observație

1. Expresia poziției centrului forțelor paralele nu depinde de direcția sistemului de forțe dată prin versorul \bar{u} . Aceasta înseamnă că dacă se consideră forțele \bar{F}_i drept vectori legați de punctele lor de aplicație, oricum s-ar schimba direcția versorului \bar{u} centrul forțelor paralele rămîne același, adică rezultanta trece printr-un punct fix.

2. Dacă mărimea forțelor \bar{F}_i este mărită sau micșorată cu o aceeași mărime scalară, poziția centrului forțelor paralele rămîne aceeași. Această proprietate servește, după cum se va arăta, la simplificarea determinării poziției centrului de greutate în cazul corpurilor omogene :

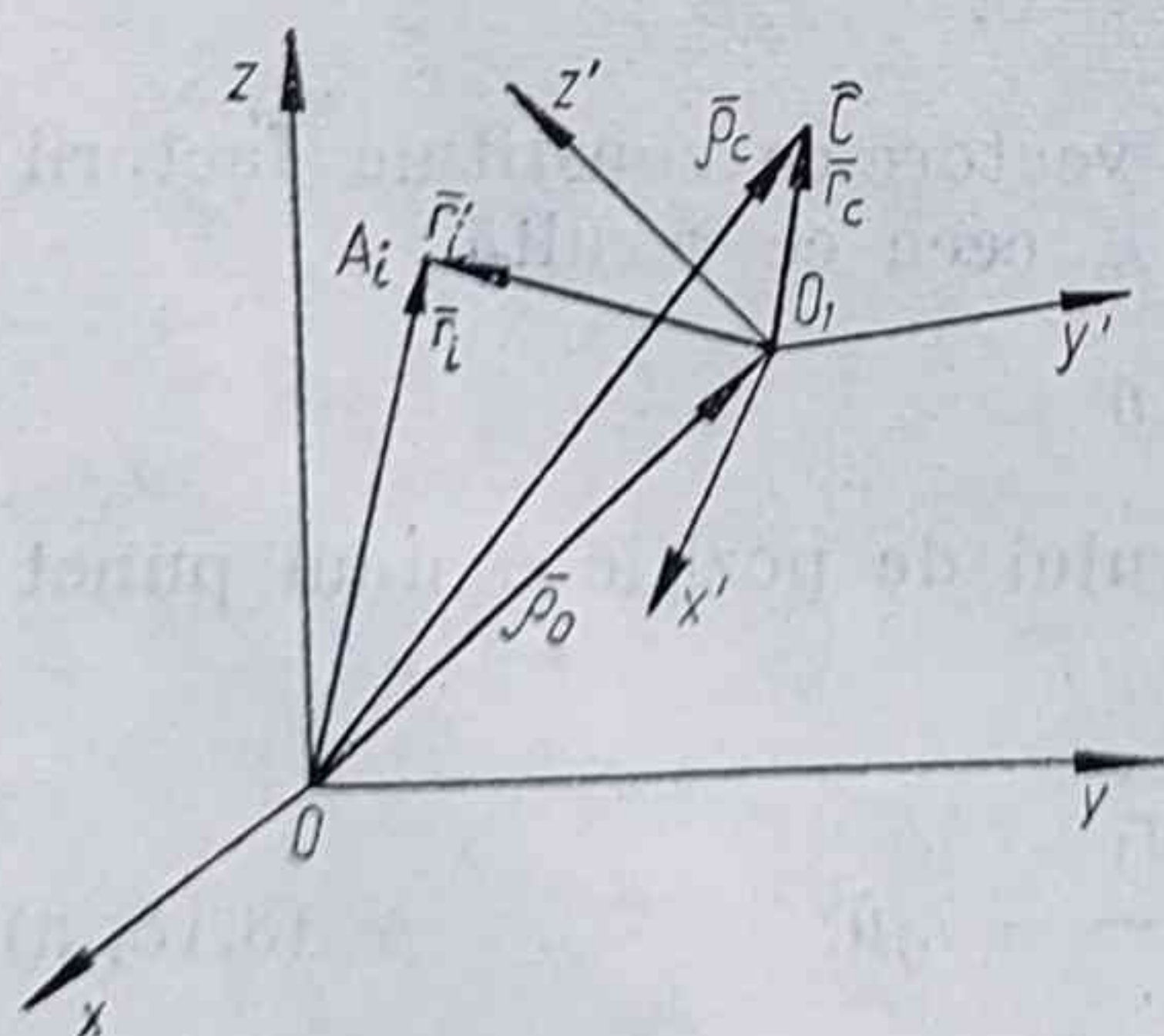


Fig. 3.14

$$\bar{\rho}_c = \frac{\sum_1^n F_i \bar{r}_i}{\sum_1^n F_i} = \frac{\sum_1^n k F'_i \bar{r}_i}{\sum_1^n k F'_i} = \bar{\rho}_{c_1} .$$

3. Schimbarea sistemului de referință nu modifică poziția centrului forțelor paralele.

Dacă :

$$\bar{\rho}_c = \frac{\sum_1^n F_i \bar{r}_i}{\sum_1^n F_i}$$

este expresia centrului forțelor paralele față de un sistem $Oxyz$, în raport cu un alt sistem $O_1x'y'z'$ va fi : (fig. 3.14) :

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_1^n F_i \cdot \bar{r}_i}{\sum_1^n F_i}.$$

Se observă că prin trecerea de la un sistem la altul avem :

$$\bar{\rho}_c = \bar{\rho}_o + \bar{r}_c.$$

Introducînd în expresia centrului forțelor paralele se obține :

$$\bar{\rho}_c = \frac{\sum_1^n F_i (\bar{\rho}_o + \bar{r}_i)}{\sum_1^n F_i} = \bar{\rho}_o + \bar{r}_c, \quad (3.19)$$

ceea ce denotă că poziția este neschimbată.

3.6. SISTEME DE CUPLURI DE FORȚE

Dacă asupra unui corp solid rigid acționează simultan mai multe cupluri de forțe $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$, acestea formează un sistem de cupluri (fig. 3.15).

Fiecare cuplu de forțe se poate înlocui cu vectorul moment al cuplului $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$. Toți acești vectori sînt vectori liberi și pot fi mutați toți într-un același punct O . Se obține astfel un sistem de vectori concurenți care dau drept rezultantă momentul cuplului rezultat.

$$\bar{M}_o = \sum_1^n \bar{M}_{io}.$$

Dacă $\bar{M}_o = \sum \bar{M}_{io} = 0$ sistemul este în echilibru.

Teorema lui Varignon. Această teoremă este valabilă pentru sistemele de forțe care se reduc la o rezultantă unică. În cazul sistemelor de forțe

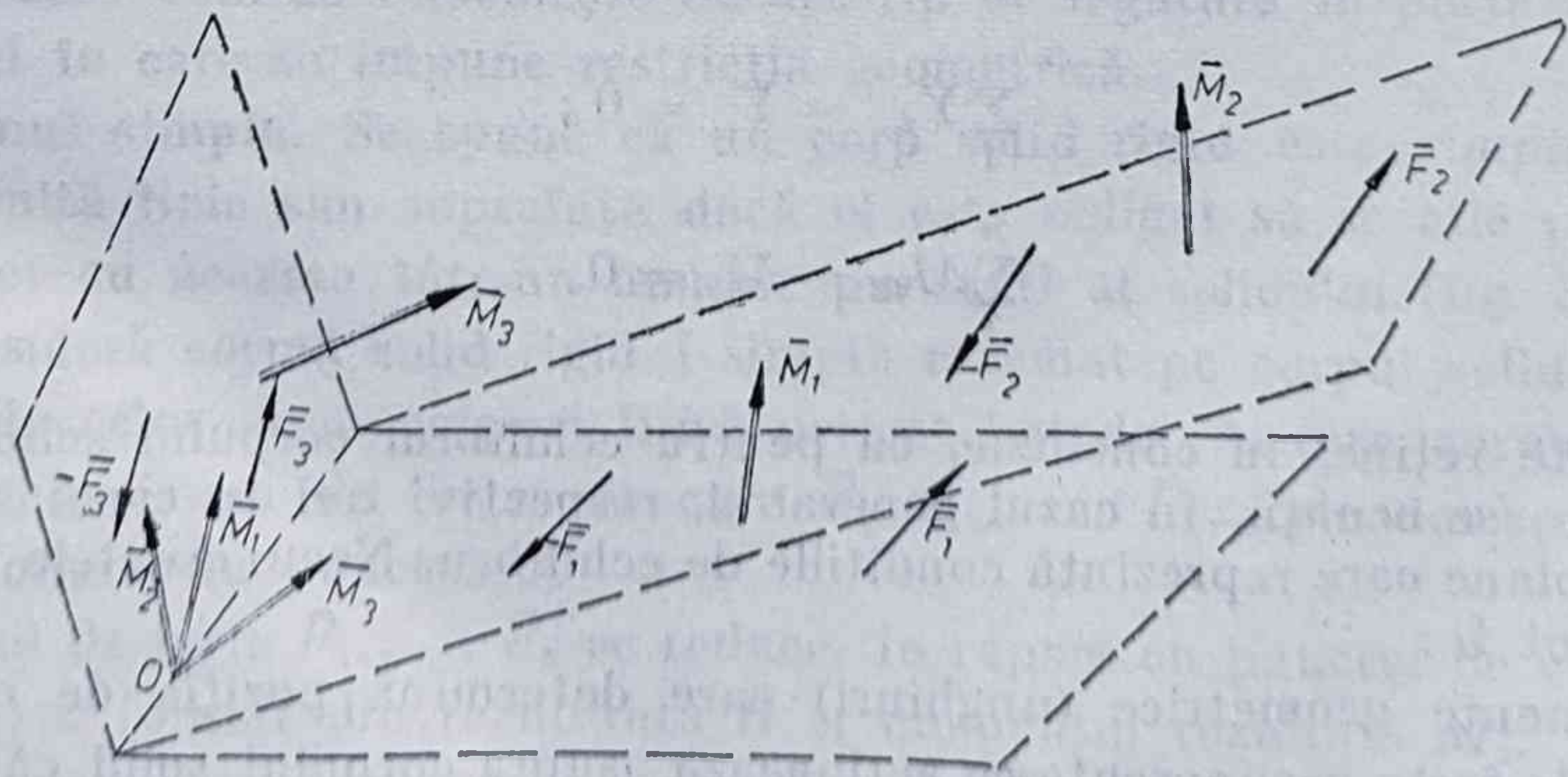


Fig. 3.15

ce se reduc la un tursor, ea nu este valabilă. Ea se poate enunța sub una din formele :

— momentul în raport cu un punct al rezultantei unui sistem de forțe, care se reduce la o rezultantă unică, este egal cu suma vectorială a momentelor forțelor componente în raport cu același punct ;

— momentul în raport cu o axă oarecare a rezultantei unui sistem de forțe, care se reduce la o rezultantă unică, este egal cu suma algebrică a momentelor forțelor componente în raport cu aceeași axă.

3.7. ECHILIBRUL CORPULUI SOLID RIGID LIBER

Un corp solid rigid acționat de un sistem de forțe $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$ care poate ocupa orice poziție în spațiu, nefiind obligat să se afle în contact permanent cu nici un punct, linie sau suprafață din spațiu, se numește *corp solid rigid liber*.

Starea de mișcare mecanică a corpului nu se modifică dacă tursorul de reducere în raport cu un punct oarecare este nul. Se spune, în acest caz, să se considere corpul solid rigid în echilibru. Rezultă condiția de echilibru formată din două ecuații vectoriale :

$$\bar{R} = 0 \text{ și } \bar{M}_o = 0. \quad (3.21, a)$$

Acest sistem de ecuații vectoriale este echivalent în cazul general cu sistemul format din șase ecuații scalare :

$$\begin{aligned} \sum_1^n X_i &= X = 0 & \sum_1^n M_{ix} &= M_x = 0 \\ \sum_1^n Y_i &= Y = 0 & \sum_1^n M_{iy} &= M_y = 0 \\ \sum_1^n Z_i &= Z = 0 & \sum_1^n M_{iz} &= M_z = 0. \end{aligned} \quad (3.21, b)$$

În cazul unui sistem de forțe plane, cele două ecuații vectoriale sînt echivalente cu trei ecuații scalare :

$$\begin{aligned} \sum_1^n X_i &= X = 0 ; \\ \sum_1^n Y_i &= Y = 0 ; \\ \sum_1^n M_{iz} &= M_z = 0. \end{aligned} \quad (3.21, c)$$

Se poate reține, în concluzie, că pentru echilibrul corpului solid rigid se pot scrie șase ecuații, în cazul general și, respectiv, trei în cazul sistemelor de forțe plane care reprezintă condițiile de echilibru. Necunoscutele în aceste ecuații pot fi :

- elemente geometrice (unghiuri) care determină poziția de echilibru ;
- unele forțe necunoscute ce acționează asupra corpului solid căruia i se cunoaște poziția de echilibru.

3.8. ECHILIBRUL CORPULUI SOLID RIGID SUPUS LA LEGĂTURI

Legăturile corpului solid rigid. Axioma legăturilor

Se spune că un corp solid rigid este supus la legături dacă este obligat să se afle permanent în contact cu un punct, o anumită linie sau cu o suprafață. În limbaj matematic se spune că avem de-a face cu un corp supus la o *restricție geometrică*.

Legăturile corpului solid rigid sînt: reazemul simplu, articulația, încastrea și legătura prin fir.

Legătura sau restricția geometrică a unui corp solid rigid constituie în fond o interacțiune între corpul solid rigid și punctul, linia sau suprafața și ea rigidă cu care el se află permanent în contact. În baza principiului acțiunii și reacțiunii, corpul acționează asupra legăturii cu elemente mecanice, forțe și momente, iar legătura, la rîndul ei, acționează asupra corpului cu aceleași elemente dar în sens contrar, care poartă numele de elemente mecanice de legătură sau reacțiuni.

Dacă se îndepărtează legătura, deoarece corpul se află în aceeași situație, ea trebuie înlocuită cu elementele mecanice de legătură corespunzătoare (forțe sau momente de legătură, denumite și reacțiuni).

3.8.1. AXIOMA LEGĂTURILOR

Pentru a studia echilibrul sau mișcarea unui corp solid supus la legături (restricții geometrice) se înlocuiește legătura cu elementele mecanice, forțele sau momentele de legătură și se obține un corp solid rigid liber asupra căruia acționează un sistem de forțe format din forțele și momentele exterioare, direct aplicate, denumite și forțe active sau forțe date și forțele și momentele de legătură denumite și reacțiuni.

3.8.2. LEGĂTURILE CORPULUI SOLID RIGID

Pentru a putea aplica în mod concret axioma legăturilor este necesar să se stabilească cum se înlocuiește fiecare tip de legătură în parte în funcție de modul în care se impune restricția geometrică.

Reazemul simplu. Se spune că un corp solid rigid este *simplu rezemat* pe o anumită linie sau suprafață dacă el este obligat să se afle permanent în contact cu aceasta într-un anumit punct O al solidului (fig. 3.16).

Se consideră corpul solid rigid I simplu rezemat pe corpul solid rigid II, suprafețele celor două corpuri fiind perfect netede. Asupra corpului I acționează un sistem de forțe oarecare $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Cele două corpuri se află în contact în punctul O .

Sistemul de forțe $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ se reduce, în raport cu punctul de contact O , la un tursor format din rezultanta \vec{R} și momentul resultant \vec{M}_O .

Componentele vectoriale ale tursorului \vec{R}, \vec{M}_O se pot descompune în cîte două componente după normala comună nn' la suprafața de contact și o

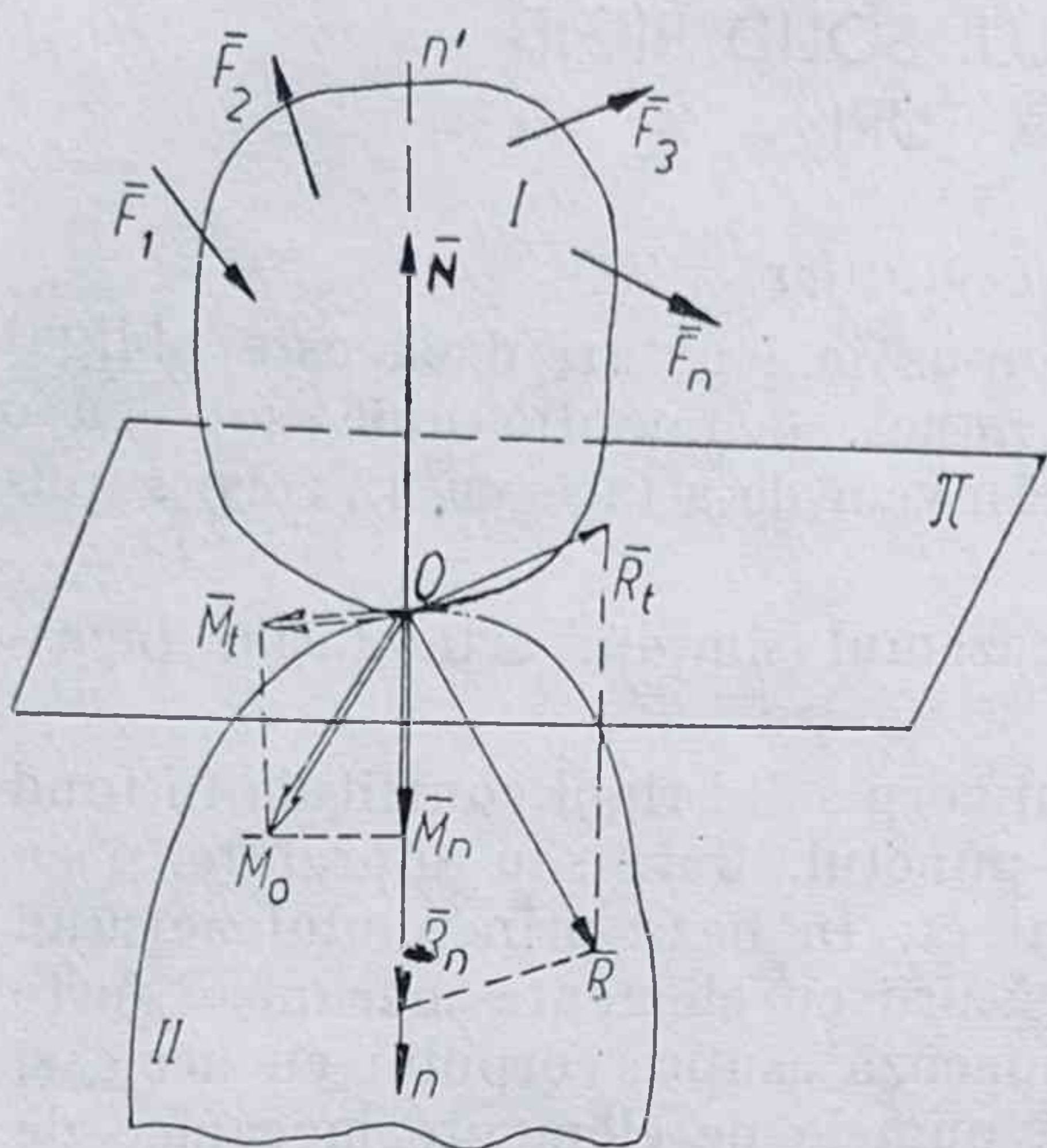


Fig. 3.16

Deoarece prin ipoteză s-a presupus că suprafețele de contact sînt perfect netede, deci nu apar rezistențe la deplasarea corpului datorită frecărilor, este evident că, pentru ca să nu se producă nici una din deplasările posibile menționate (rostogolire, pivotare sau alunecare pe planul tangent) este necesar ca :

$\bar{M}_t = 0$, ca să nu se rostogolească pe planul π ;

$\bar{M}_n = 0$, ca să nu pivoteze în jurul normalei comune ;

$\bar{R}_t = 0$, ca să nu alunece de-a lungul planului.

Legătura geometrică se înlocuiește, în baza principiului acțiunii și reacțiunii, cu o forță de legătură \bar{N} . Corpul fiind în echilibru, deci : $\bar{R}_t = 0$, $\bar{M}_t = \bar{M}_n = 0$ sistemul de forțe ce mai acționează asupra corpului liber aflat în echilibru conduce la ecuația :

$$\bar{R}_n + \bar{N} = 0.$$

În concluzie, un reazem simplu se înlocuiește cu o forță de legătură \bar{N} de mărime și sens necunoscut a cărei direcție este însă normala comună la linia sau suprafața de contact.

Articulația. Se spune că un corp solid rigid este *articulat* într-un punct O dacă este obligat în mod permanent să rămână în contact cu acest punct, avînd însă posibilitatea de a se roti în jurul său. Articulația poate fi cilindrică sau sferică. În cazul articulației cilindrice, corpul se poate roti în jurul unei axe (fig. 3.17, a). În cazul articulației sferice, corpul se poate roti în jurul a trei axe concurente în spațiu (fig. 3.17, b).

Pentru a determina forțele de legătură cu care se înlocuiește o articulație ce impune restricție geometrică corpului ca punctul O al corpului să rămână mereu în aceeași poziție, se reduce sistemul de forțe $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$ ce acționează asupra rigidului, în raport cu acest punct. Se obține un torsor format din componentele : \bar{R} și \bar{M}_O . Efectul momentului \bar{M}_O de a imprima o rotire

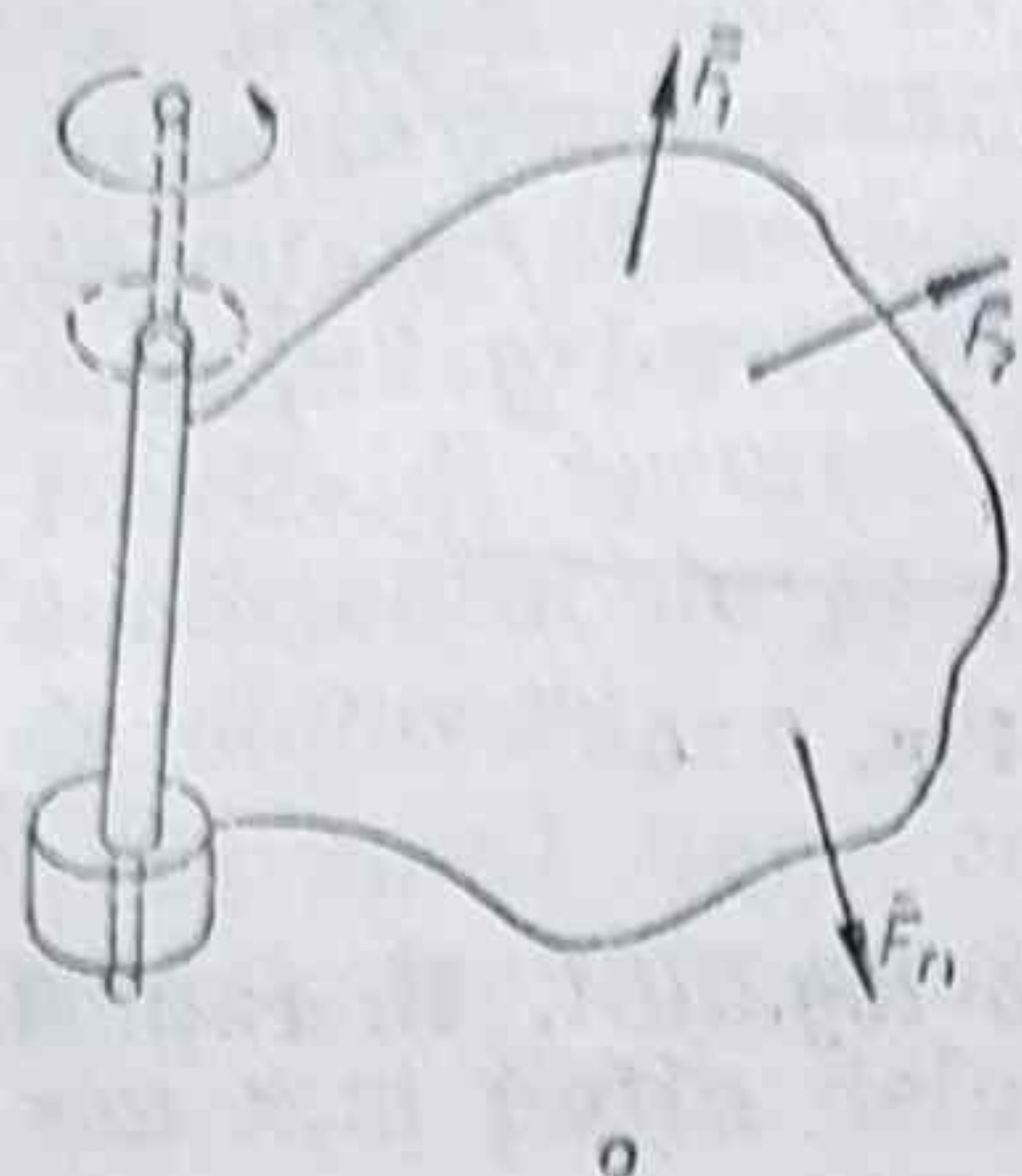


Fig. 3.17

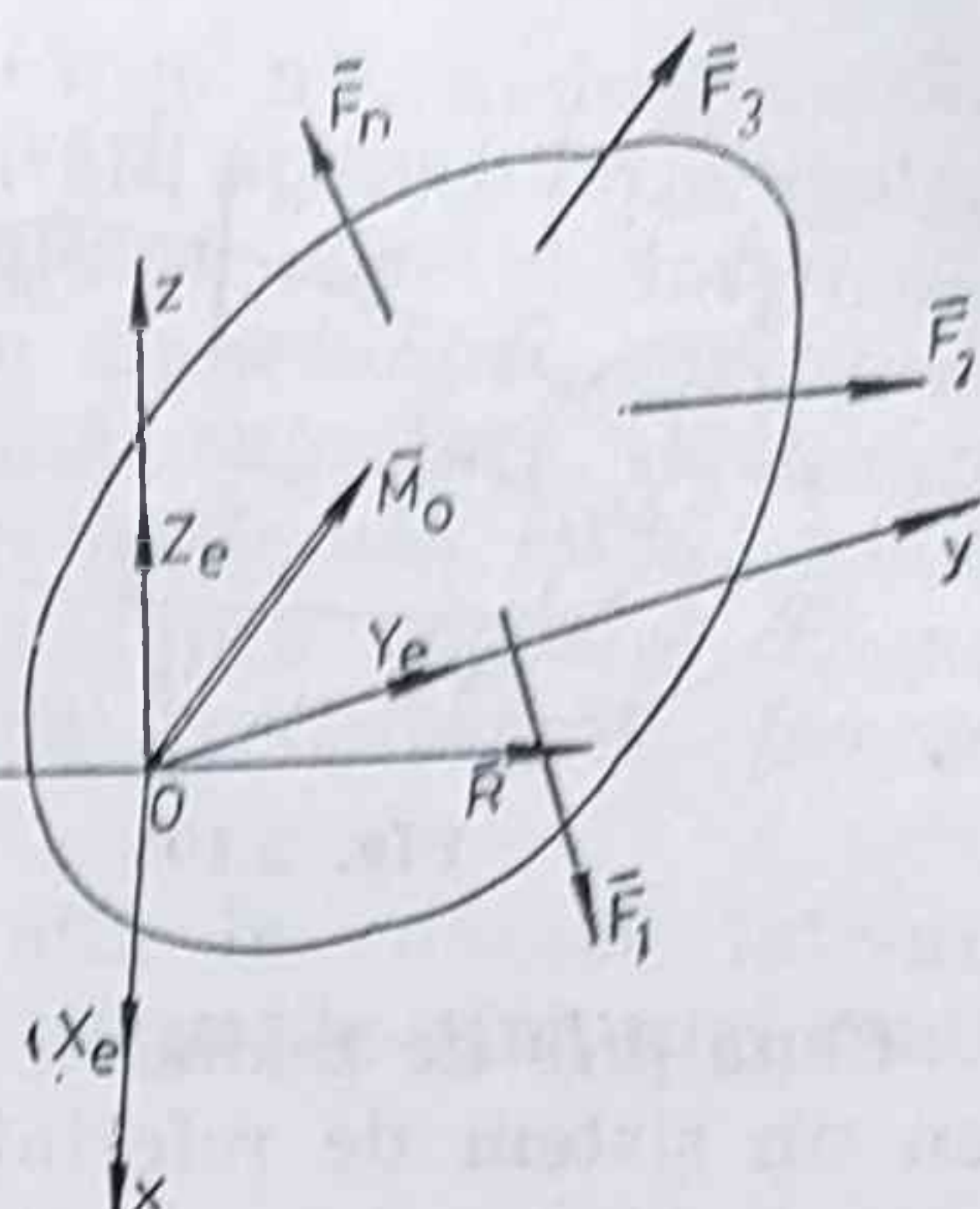
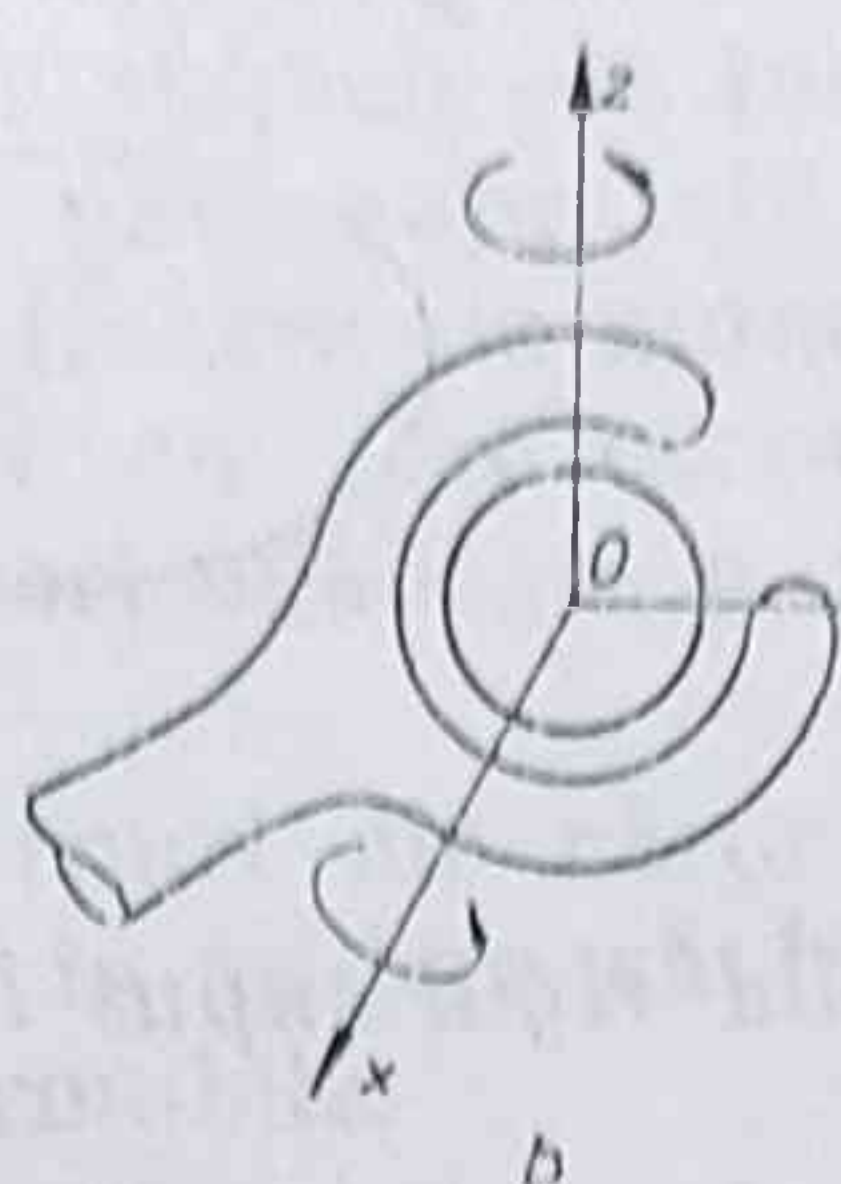


Fig. 3.18

corpului nu este împiedicat de articulație, în schimb efectul de a da o deplasare corpului sub acțiunea forței rezultante \bar{R} este anulat de legătura prin articulație. Este evident că în locul articulației trebuie introdusă o forță de legătură \bar{R}_e , de mărime și direcție egală cu \bar{R} , dar de sens contrar, astfel ca să se păstreze condiția de echilibru $\bar{R} + \bar{R}_e = 0$.

Deoarece la rezolvarea unei aplicații concrete nu se cunoaște dintr-un început mărimea, direcția și sensul rezultantei \bar{R} și deci a reacțiunii \bar{R}_e , în locul articulației se introduce o forță de mărime și direcție necunoscută (fig. 3.18).

Deoarece în ecuațiile scalare ce exprimă echilibrul sau modul de mișcare este mai puțin comod a se introduce unghiurile de direcție, forța de legătură \bar{R}_e se înlocuiește prin componentele sale după axele $Oxyz$: X_e , Y_e , Z_e în cazul forțelor oarecare în spațiu, sau X_e , Y_e după axele Oxy în cazul sistemului de forțe plane.

Încăstrarea (fig. 3.19). Legătura prin care un corp solid rigid este înțepenit rigid într-un alt corp într-un punct O , astfel că nu mai are nici o posibilitate de mișcare, poartă numele de *încăstrare*.

Dacă se reduce sistemul de forțe active $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ care acționează asupra corpului în raport cu punctul de încăstrare O se obțin rezultanta \bar{R} și momentul \bar{M}_o .

Deoarece legătura prin încăstrare nu permite nici o mobilitate pentru corp, este evident că această legătură anulează efectul tursorului ce rezultă din reducerea sistemului în raport cu O . Rezultă că, o legătură prin încăstrare se înlocuiește cu o forță de legătură \bar{R}_e egală și [de sens] contrar cu rezultanta \bar{R} și un moment resultant \bar{M}_e egal și de sens contrar cu \bar{M}_o .

Deoarece la rezolvarea problemelor nu se cunoaște de la început mărimea, direcția și sensul acestor vectori, ei se înlocuiesc prin componentele lor \bar{R}_e (X_e, Y_e, Z_e) și \bar{M}_e (M_{ex}, M_{ey}, M_{ez}).

Legături prin fire. În cazul corpului solid rigid susținut prin fire, trebuie avut în vedere faptul că firul nu poate fi solicitat decât la întindere, el fiind, prin definiție, un corp flexibil. În acest caz, dacă se taie firul el se înlocuiește cu o forță (reacțiune) de mărime necunoscută ce are direcția firului și sensul astfel încât să întindă firul (fig. 3.20).

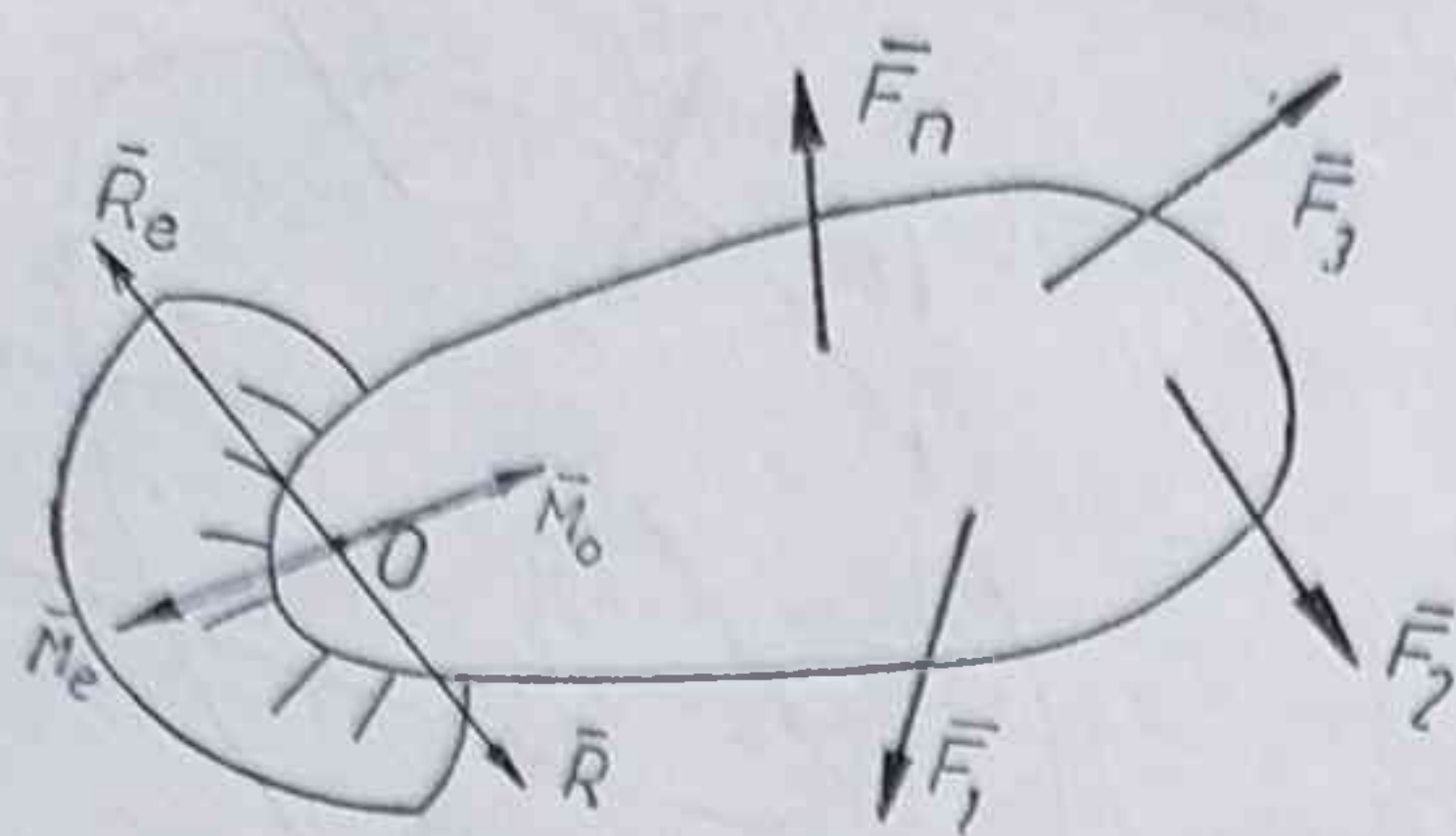


Fig. 3.19

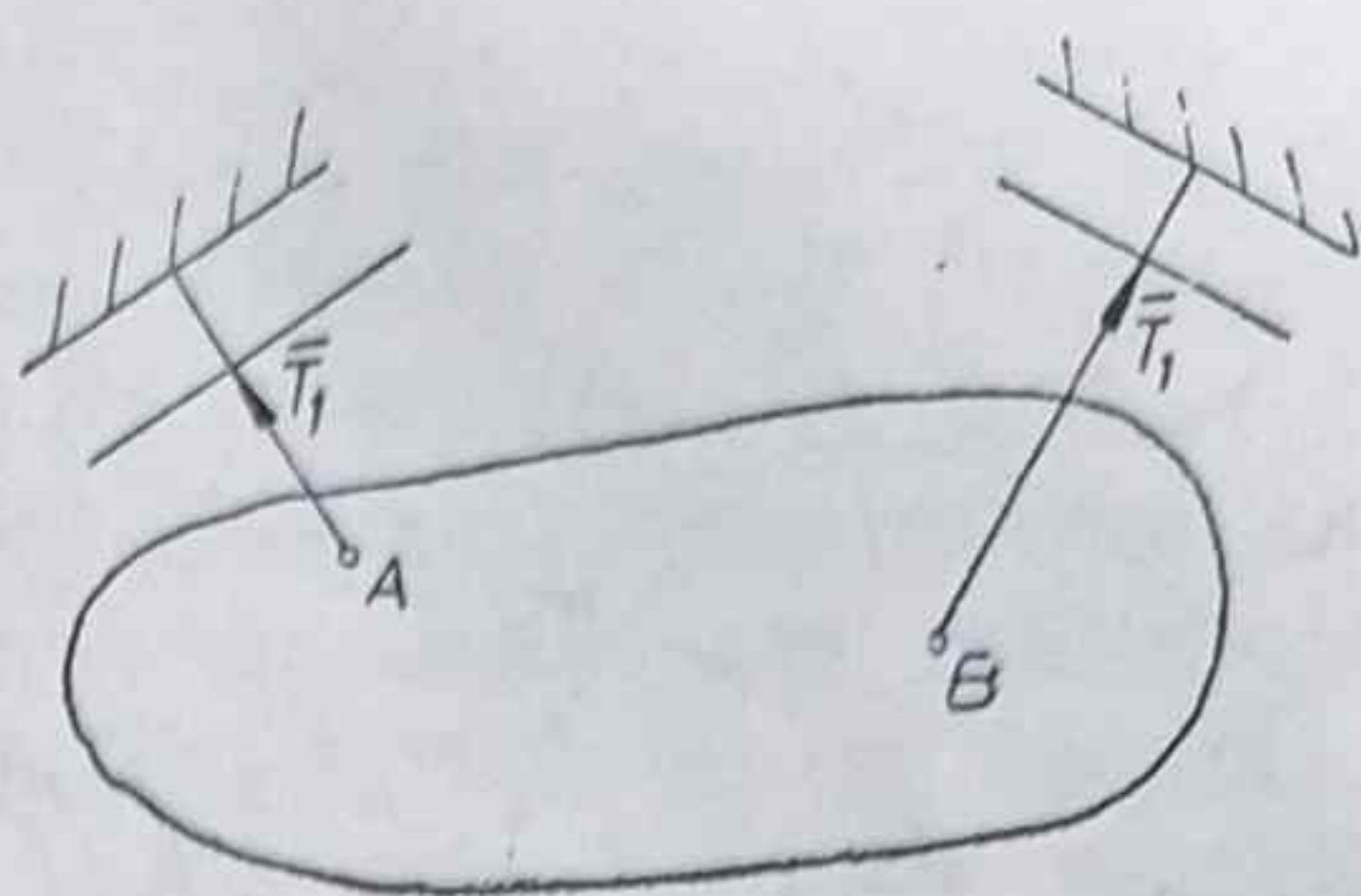


Fig. 3.20

Condițiile de echilibru pentru corpul solid rigid supus la legături, în raport cu un sistem de referință $Oxyz$, sînt :

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i + \bar{R}_e = 0, \quad \bar{R} + \bar{R}_e = 0,$$

sau :

$$\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i + \bar{M}_e = 0, \quad \bar{M}_0 + \bar{M}_e = 0.$$

Ecuațiile scalare corespunzătoare sînt :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i + X_e &= 0, & \sum_{i=1}^n M_{ix} + M_{ex} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n Y_i + Y_e &= 0, & \sum_{i=1}^n M_{iy} + M_{ey} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n Z_i + Z_e &= 0, & \sum_{i=1}^n M_{iz} + M_{ez} &= 0. \end{aligned}$$

Ele sînt în număr de șase ecuații în cazul forțelor oarecare în spațiu sau în număr de trei în cazul unui sistem de forțe plane aflate în planul Oxy :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i + X_e &= 0; \\ \sum_{i=1}^n Y_i + Y_e &= 0; \\ \sum_{i=1}^n M_{iz} + M_e &= 0. \end{aligned}$$

3.9. ECHILIBRUL CORPULUI SOLID RIGID CU FRECARÉ

Ipoteza făcută anterior că suprafețele a două corpuri aflate în contact sînt perfect netede, nu corespunde realității. În realitate, suprafețele aflate în contact nu sînt perfect netede și prezintă unele asperități care se opun deplasării unui corp față de alt corp.

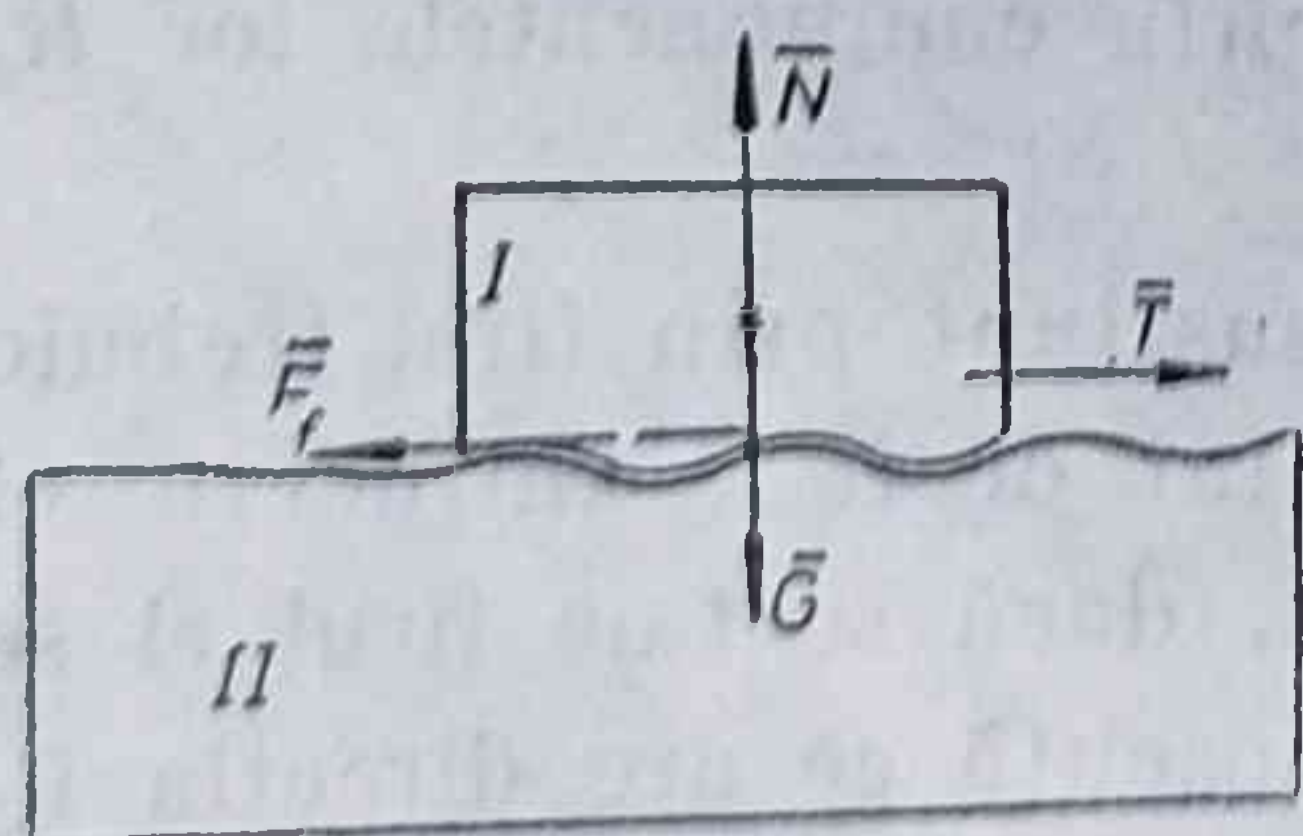


Fig. 3.21

Se consideră două corpuri aflate în contact după o suprafață plană orizontală aspră, ca în figura 3.21. Corpul I se sprijină pe corpul II și are o greutate G . Asupra corpului I acționează o forță activă orizontală T a cărei mărime variază crescînd de la 0 pînă la o anumită valoare la

care corpul tinde să se miște. Corpul stă în echilibru și nu se deplasează, deoarece în suprafața de contact, care prezintă asperități, apare o forță egală, de aceeași direcție, dar de sens contrar, care anulează efectul forței \bar{T} . Această forță poartă numele de forță de frecare de alunecare \bar{F}_f , deoarece se opune alunecării unei suprafețe tangente pe altă suprafață. Mărimea maximă a forței de frecare de alunecare \bar{F}_f este proporțională cu mărimea reacțiunii normale \bar{N} cu care corpul II acționează asupra corpului I, iar coeficientul de proporționalitate μ poartă numele de *coeficient de frecare de alunecare*.

În cazul unor corpuri ale căror suprafețe s-ar afla în contact într-un punct, trebuie avut în vedere că în realitate toate corpurile sînt mai mult sau mai puțin deformabile.

Ipoteza corpului solid rigid a fost utilizată în cadrul unui proces de abstractizare ce a urmărit simplificarea anumitor calcule, urmărind însă ca să nu se introducă erori în soluțiile găsite.

Pe un element din suprafața de contact de pe corpul I va acționa o forță de legătură normală $d\bar{N}$ pe elementul de suprafață ds și o forță de frecare $d\bar{F}_f$ ($|d\bar{F}_f| \leq \mu |d\bar{N}|$, forță de legătură tangențială) care se va opune tendinței de alunecare a elementului de suprafață considerat al corpului I peste elementul de suprafață al corpului II cu care el se află în contact (fig. 3.22).

Dacă în baza axiomei legăturilor se izolează corpul I, atunci se înlocuiește corpul II cu forțele de legătură corespunzătoare, astfel că asupra corpului izolat devenit liber acționează un sistem de forțe format din forțele active $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$, forțele de legătură elementare $d\bar{N}$ și forțele de legătură tangențiale $|d\bar{F}_f| \leq \mu |d\bar{N}|$. Este evident că acest sistem se reduce în raport cu punctul de contact O la un torsesor al sistemului de forțe active $\tau(\bar{R}, \bar{M}_{ao})$ și un torsesor al forțelor de legătură $\tau_e(\bar{R}_e$ și $\bar{M}_{eo})$.

Condiția de echilibru este dată de ecuațiile (fig. 3.23):

$$\bar{R}_a + \bar{R}_e = 0; \quad (3.22, a)$$

$$\bar{M}_{ao} + \bar{M}_{eo} = 0,$$

completate cu inecuațiile

$$|\bar{R}_t| \leq \mu |\bar{R}_n|; \quad (3.22, b)$$

$$|\bar{M}_{eo}| \leq |\bar{M}_{ao}|.$$

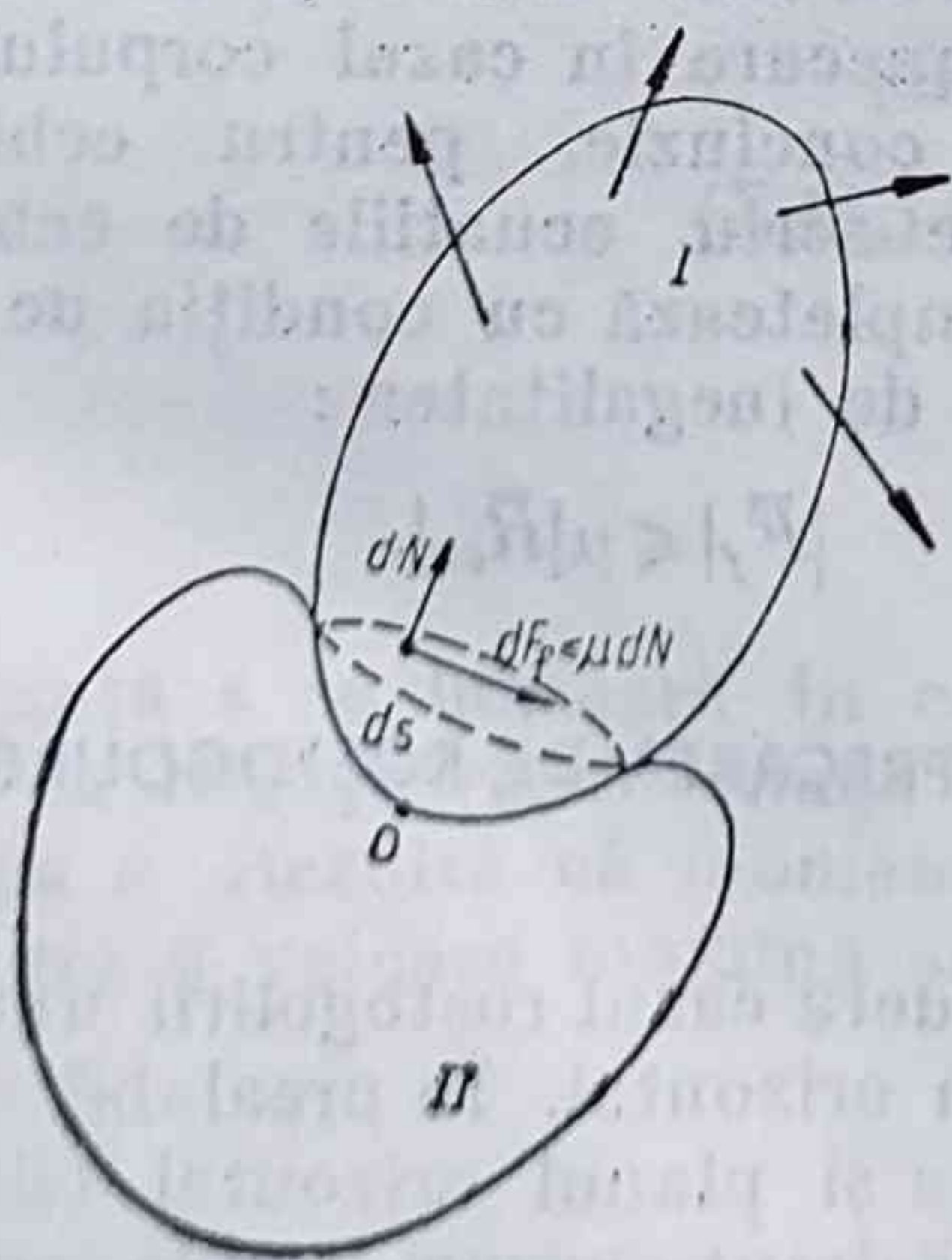


Fig. 3.22

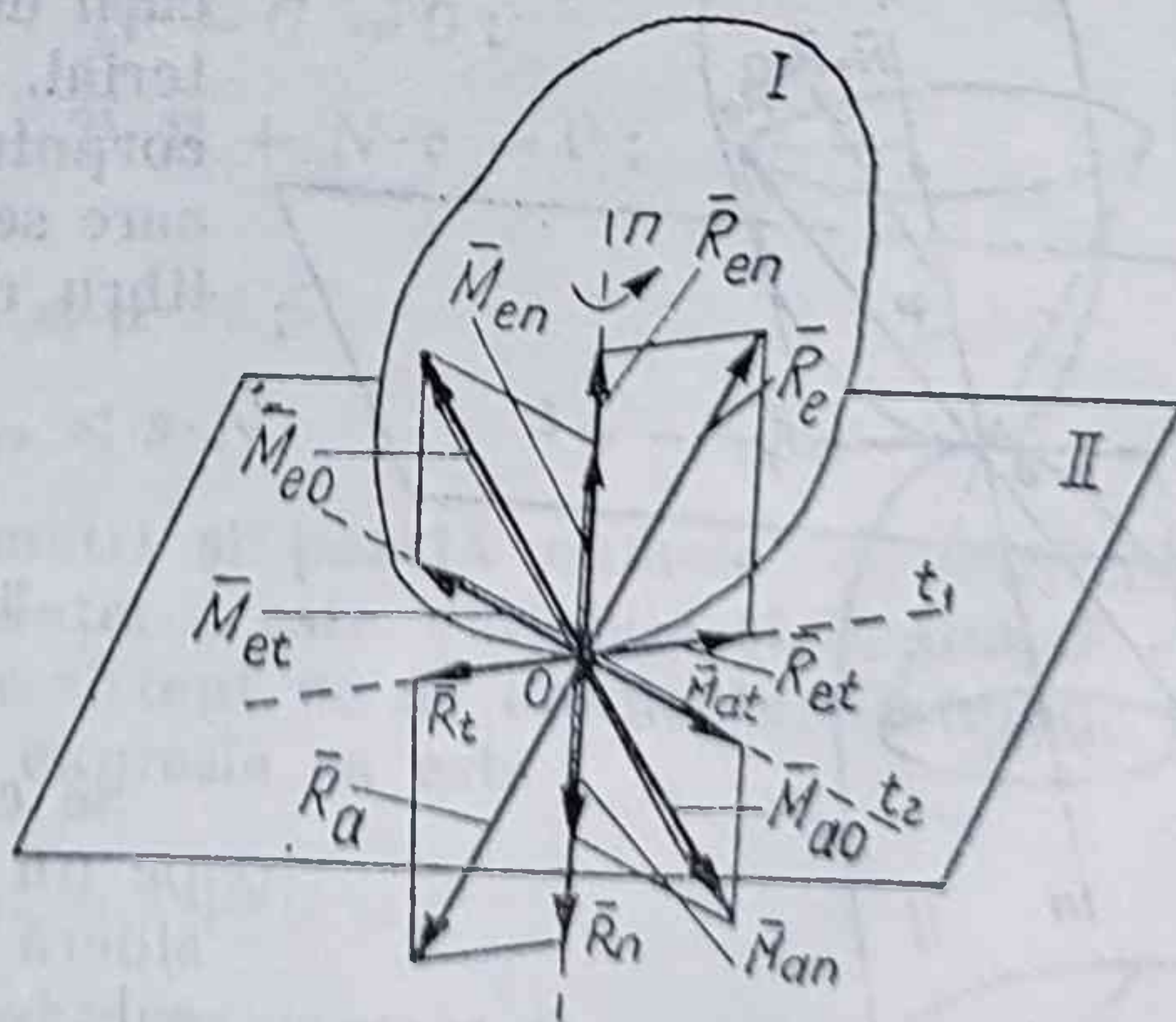


Fig. 3.23

Componenta \bar{R}_t este tocmai forța de frecare de alunecare. Componenta \bar{R}_n este reacțiunea normală. Momentele rezultante \bar{M}_{eo} și \bar{M}_{ao} corespunzătoare forțelor de legătură și forțelor active, se descompun în două componente, după normala comună la suprafețele de contact și după o direcție în planul tangent în O la suprafața de contact. Componentele după normala comună corespund unei mișcări de pivotare a corpului I pe corpul II, iar componentele după planul tangent corespund unei mișcări de rostogolire a corpului I pe planul tangent în O . Componentele corespunzătoare forțelor de frecare poartă, corespunzător, numele de frecare de rostogolire și frecare de pivotare.

Pentru echilibru este necesar să se îndeplinească, în afara ecuațiilor (3.22, a) de echilibru, și inecuațiile

$$|\bar{M}_{en}| \leq |\bar{M}_{an}|; |\bar{M}_{et}| \leq |\bar{M}_{at}|; |\bar{R}_{et}| \leq \mu |\bar{R}_{en}|. \quad (3.23)$$

Pentru a înțelege și a studia mai în fond modul de rezolvare a problemelor legate de echilibrul corpului cu frecare este util a studia fiecare gen de frecare separat.

3.9.1. FRECARA DE ALUNECARE

Frecarea de alunecare corespunde cazului în care torsorul de reducere al forțelor active se reduce în raport cu punctul de contact O numai la o rezultantă unică care trece prin punctul O . Forțele de legătură se reduc la rezultanta \bar{R}_e care se descompune în componentele \bar{R}_{en} și \bar{F}_f (fig. 3.24). Mărimea forței de frecare \bar{F}_f este dată de relația

$$|\bar{F}_f| \leq \mu \cdot |\bar{R}_{en}|.$$

Sensul ei care întotdeauna contrar tendinței de mișcare a corpului I sub acțiunea componentei \bar{R}_t . Dacă se rotește rezultanta activă \bar{R} în jurul normalei, în mod similar se rotește și cea a forțelor de legătură. Se descrie astfel conul de frecare. Acest mod de comportare este identic cu cel prezentat în cazul echilibrului punctului material cu frecare. Legile

frecării uscate stabilite de Coulomb și arătate la capitolul echilibrului punctului material sînt valabile și în cazul frecării de alunecare în cazul corpului material. În concluzie, pentru echilibrul corpului se scriu ecuațiile de echilibru care se completează cu condiția de echilibru dată de inegalitatea :

$$|\bar{F}_f| \leq \mu |\bar{R}_{en}|.$$

3.9.2. FRECARA DE ROSTOGOLIRE

Se consideră cazul rostogolirii unei roți pe un plan orizontal. În prealabil se consideră roata și planul orizontal (șina de cale ferată) drept corpuri solide nedefor-mabile (fig. 3.25, a).

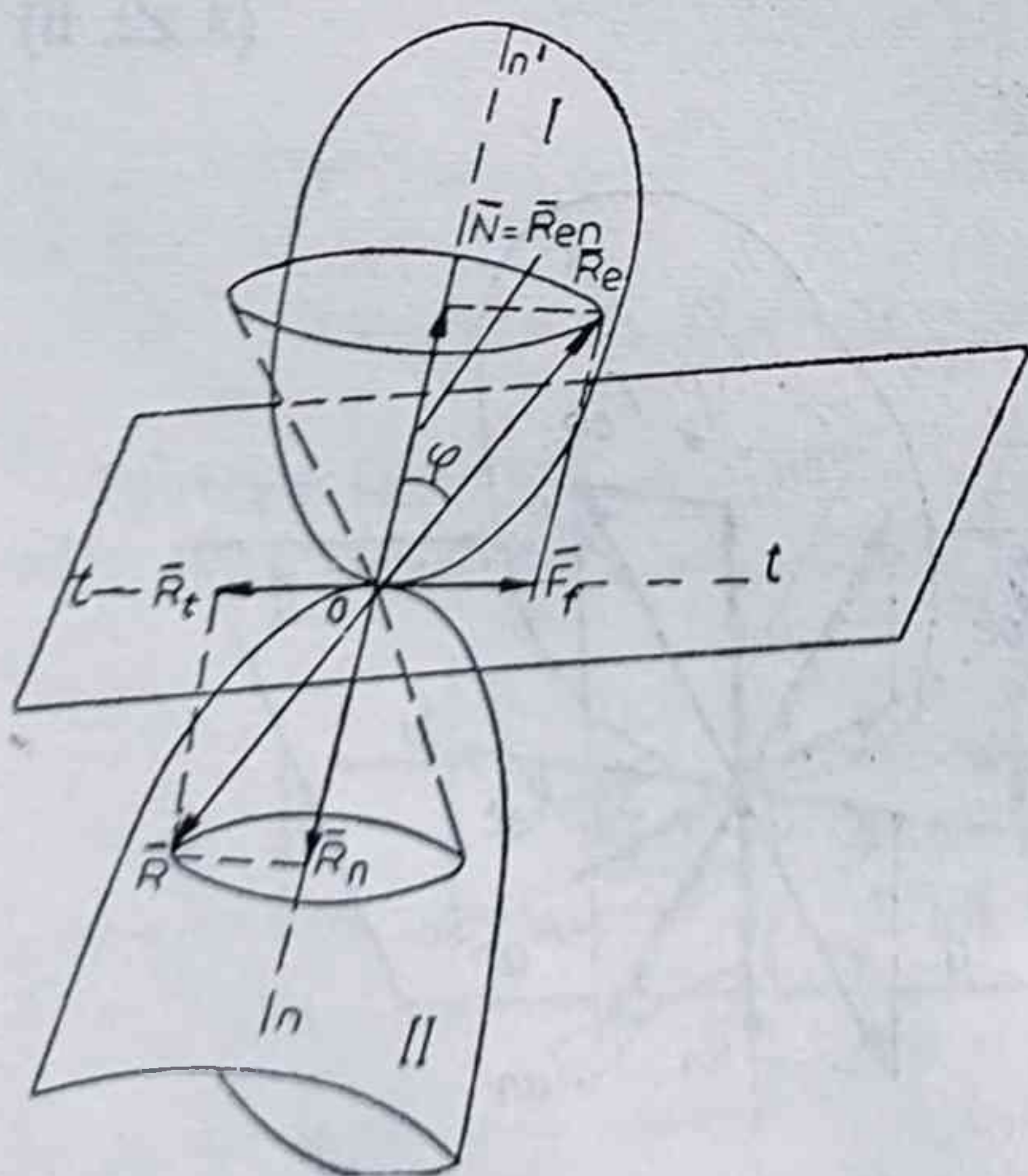


Fig. 3.24

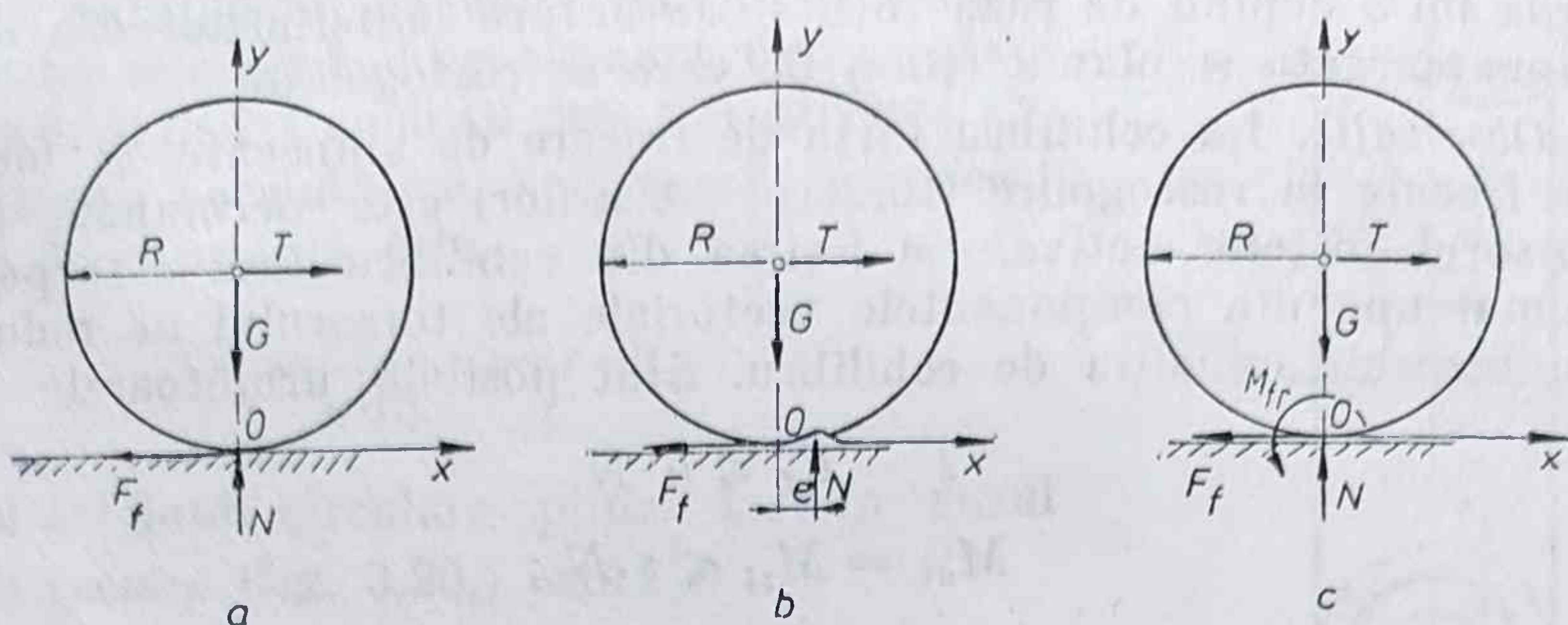


Fig. 3.25

Roata, de rază R , are greutatea \bar{G} și este trasă orizontal cu o forță \bar{T} . Practic se observă că dacă forța \bar{T} este mică, roata nu se mișcă și că se pune în mișcare abia atunci când \bar{T} are o mărime corespunzătoare. Din condițiile de echilibru ale roții față de sistemul Oxy , originea sistemului fiind în punctul de contact, rezultă :

$$(\Sigma X) : T - F_f = 0 ;$$

$$(\Sigma Y) : N - G = 0 ;$$

$$(\Sigma M_O) : T \cdot R = 0 ;$$

și

$$F_f \leq \mu \cdot N.$$

Se observă imediat din aceste condiții că echilibrul nu este posibil decât dacă forța T este nulă $T = 0$. Această concluzie este însă în contradicție cu realitatea. Pentru a putea scrie un sistem de ecuații de echilibru care să fie în concordanță cu realitatea, este necesar să se țină seama de deformarea roții și a șinei. Se observă că amîndouă se deformează, astfel că în fața roții în direcția de avansare prezintă un mic prag ca în figura 3.25, b , astfel că forța de legătură normală \bar{N} este deplasată paralel la o distanță e .

Scriind din nou condițiile de echilibru se obține :

$$(\Sigma X) : T - F_f = 0 ;$$

$$(\Sigma Y) : N - G = 0 ; \quad (3.24)$$

$$(\Sigma M_O) : -T \cdot R + N \cdot e = 0 ;$$

și

$$F_f \leq \mu \cdot N ;$$

$$M_{fr} \leq s \cdot N.$$

Distanța s se măsoară în centimetri și poartă numele de *coeficient de frecare la rostogolire*. Mărimea distanței e este variabilă și la limită ea are valoarea s . Rezultă că momentul rezistent ce se opune tendinței de rostogolire are o valoare maximă și că expresia sa este :

$$|\bar{M}_{fr}| \leq s \cdot |\bar{N}|.$$

Făcînd reducerea în punctul teoretic de contact O , se obține situația din figura 3.25, c .

Valorile lui s depind de raza roții și de natura materialelor din care sînt confecționate roata și planul (șina) pe care se rostogolește.

Observație. La echilibru forța de frecare de alunecare și momentul de frecare la rostogolire (torsorul frecărilor) este permanent egal cu torsorul forțelor active. La ieșirea din echilibru însă este posibil ca numai una din componentele vectoriale ale torsorului de reducere să nu respecte condiția de echilibru. Sînt posibile următoarele cazuri:

$$T = F_f \leq \mu \cdot N$$

$$M_{at} = M_{et} \leq s \cdot N ;$$

în acest caz roata este în echilibru, ea nu alunecă și nu se rostogolește ;

$$T = F_f \geq \mu \cdot N$$

$$M_{at} = M_{et} \leq s \cdot N ;$$

în acest caz roata alunecă fără să se rostogolească ;

$$T = F_f \leq \mu \cdot N$$

$$M_{at} = M_{et} \geq s \cdot N ;$$

în acest caz roata se rostogolește fără să alunece ;

$$T = F_f \geq \mu \cdot N$$

$$M_{at} = M_{et} \geq s \cdot N ;$$

în acest caz roata alunecă și se rostogolește în același timp.

3.9.3. FRECAREA DE PIVOTARE

În acest caz, torsorul forțelor active ce acționează asupra corpului se reduce la doi vectori coliniari ce au direcția normalei comună la suprafața de contact \vec{R}_{an} și \vec{M}_{an} . Torsorul forțelor de legătură, în cazul echilibrului, este de asemenea compus din doi vectori coliniari ce au tot direcția normalei comună la suprafața de contact \vec{R}_{en} și \vec{M}_{en} . Pentru echilibru este necesar să fie îndeplinite condițiile

$$\vec{R}_{an} + \vec{R}_{en} = 0$$

și

$$\vec{M}_{an} + \vec{M}_{en} = 0.$$

Se studiază cazul lagărului vertical cu secțiunea inelară, și razele R_1 și R_2 , încărcat cu forța axială Q și momentul M , coeficientul de frecare de alunecare fiind μ .

Se face ipoteza că presiunea este uniform repartizată și deci egală cu :

$$p = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Pentru a stabili momentul rezistent de frecare de pivotare, se consideră un element de suprafață de forma unui inel circular cu raza r și grosime dr .

Reacțiunea normală ce acționează pe acest element de suprafață este :

$$dN = \frac{Q}{\pi \cdot R^2} \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr,$$

în cazul secțiunii circulare pline, iar în cazul secțiunii inelare (fig. 3.26,) este :

$$dN = \frac{Q \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Momentul de frecare de pivotare elementar este

$$dM_p = r \cdot \mu \cdot dN = 2\mu \frac{Q}{R^2} r^2 \cdot dr,$$

respectiv :

$$\frac{2\mu \cdot Q}{R_2^2 - R_1^2} \cdot r^2 \cdot dr.$$

Momentul total de frecare de pivotare, în cazul secțiunii circulare pline, la limită este :

$$M_p = 2\mu \frac{Q}{R^2} \int_0^R r^2 \cdot dr = \frac{2\mu}{3} Q \cdot R. \quad (3.25, a)$$

În cazul pivotului cu secțiune inelară, momentul este :

$$M_p = 2 \frac{\mu Q}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot dr = \frac{2\mu}{3} \cdot Q \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Introducând relația razei medii $R_m = \frac{R_1 + R_2}{2}$, expresia momentului de frecare de pivotare se poate considera cu aproximație :

$$M_p = \frac{4}{3} \mu \cdot Q \cdot R_m. \quad (3.25, b)$$

Pentru echilibru este necesar ca să se respecte permanent condiția :

$$M_a \leq M_p.$$

3.9.4. FRECAREA IN ARTICULAȚII ȘI LAGĂRE

Axul cilindric orizontal al unei articulații cilindrice se rotește în interiorul unui locaș cilindric între cele două corpuri, realizându-se un contact după o generatoare comună. Într-o secțiune transversală (fig. 3.27) acest contact se realizează într-un punct. În mod asemănător, un arbore (ax) al unui

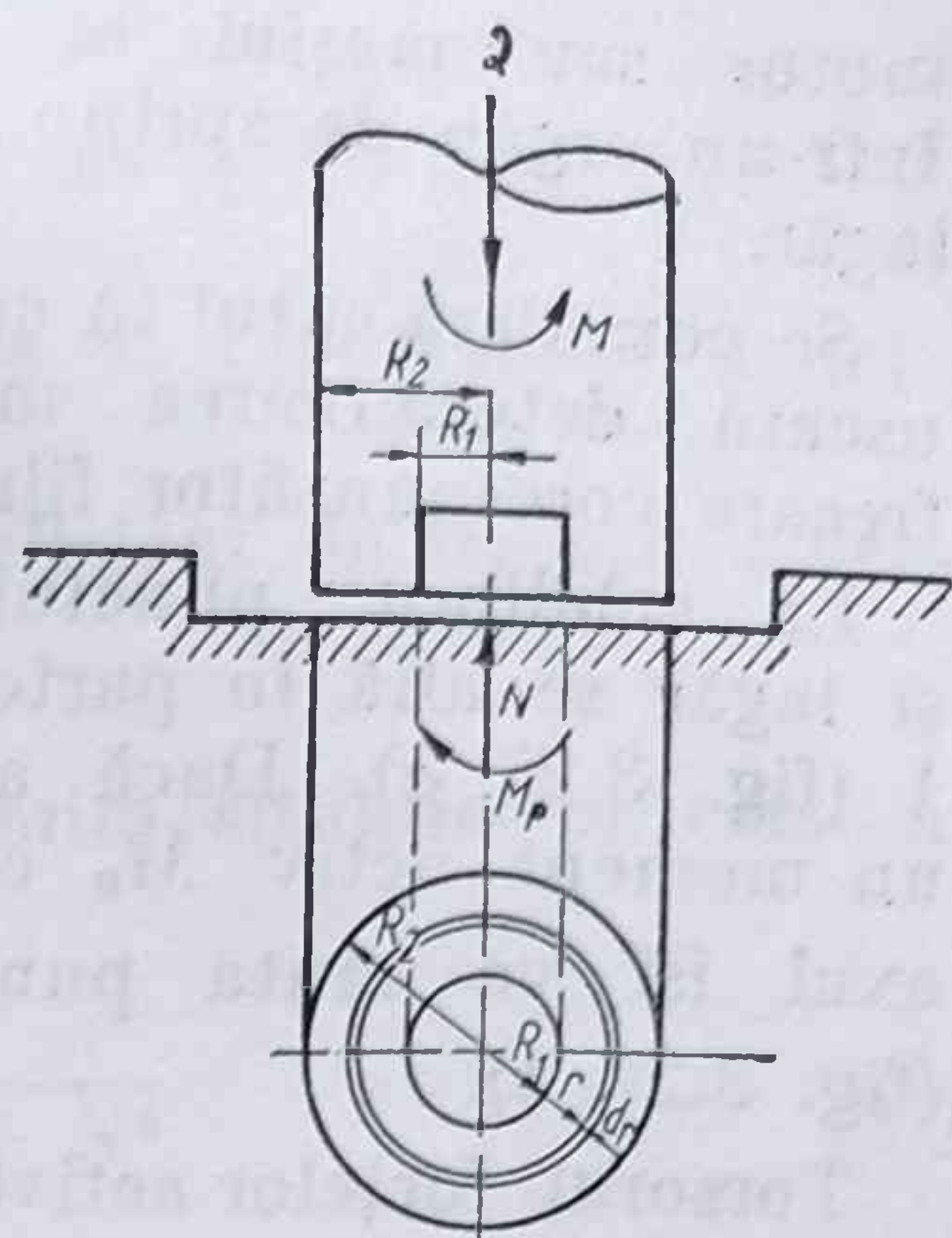


Fig. 3.26

motor sau mașini se sprijină și se rotește într-un organ de sprijin care poartă numele de lagăr.

Se consideră cazul în care frecarea în lagăr este uscată, determinarea momentului rezistent la frecare corespunzător fiind mai simplă.

La echilibru, punctul de contact între ax și lagăr se află în partea inferioară în punctul I (fig. 3.27, a). Dacă asupra axului acționează un moment activ M_0 care tinde să-l rotească, axul își va muta punctul de contact în A (fig. 3.27, b).

Torsorul forțelor active se compune din rezultanta \bar{R} ce are o direcție cuprinsă în planul secțiunii transversale și momentul forțelor active \bar{M}_0 al cărui suport are direcția axei arborelui, perpendiculară în O pe secțiunea transversală.

Deoarece în punctul de contact A se realizează o frecare de alunecare și una de rostogolire, torsorul forțelor de legătură se compune din o rezultantă \bar{R}_e ale cărei componente sînt reacțiunea normală \bar{N} și forța de frecare de alunecare \bar{F}_f , a cărei mărime maximă este $\mu \bar{N} \geq F_f$, și un moment de frecare la rostogolire a cărei mărime maximă este $M_{fr} \leq s \cdot N$. În raport cu sistemul de referință Axy , condițiile de echilibru pentru axul a căruia rază este a sînt :

$$(\Sigma X) : F_f - R \sin \alpha = 0 ;$$

$$(\Sigma Y) : N - R \cos \alpha = 0 ;$$

$$(\Sigma M_A) : M_{fr} - M_0 + R \cdot a \sin \alpha = 0$$

și

$$F_f \leq \mu \cdot N ;$$

$$M_{fr} \leq s \cdot N.$$

Din ecuațiile de echilibru se obține :

$$F_f = R \sin \alpha ;$$

$$N = R \cos \alpha ;$$

$$M_{fr} = M_0 - R \cdot a \sin \alpha.$$

Din ultimele două condiții date de inegalități rezultă :

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu$$

și

$$M_0 \leq R \cdot a \left(\sin \alpha + \frac{s}{a} \cos \alpha \right).$$

Observînd că unghiul α este suficient de mic se poate scrie :

$$\cos \alpha \approx 1 \text{ și } \sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \mu,$$

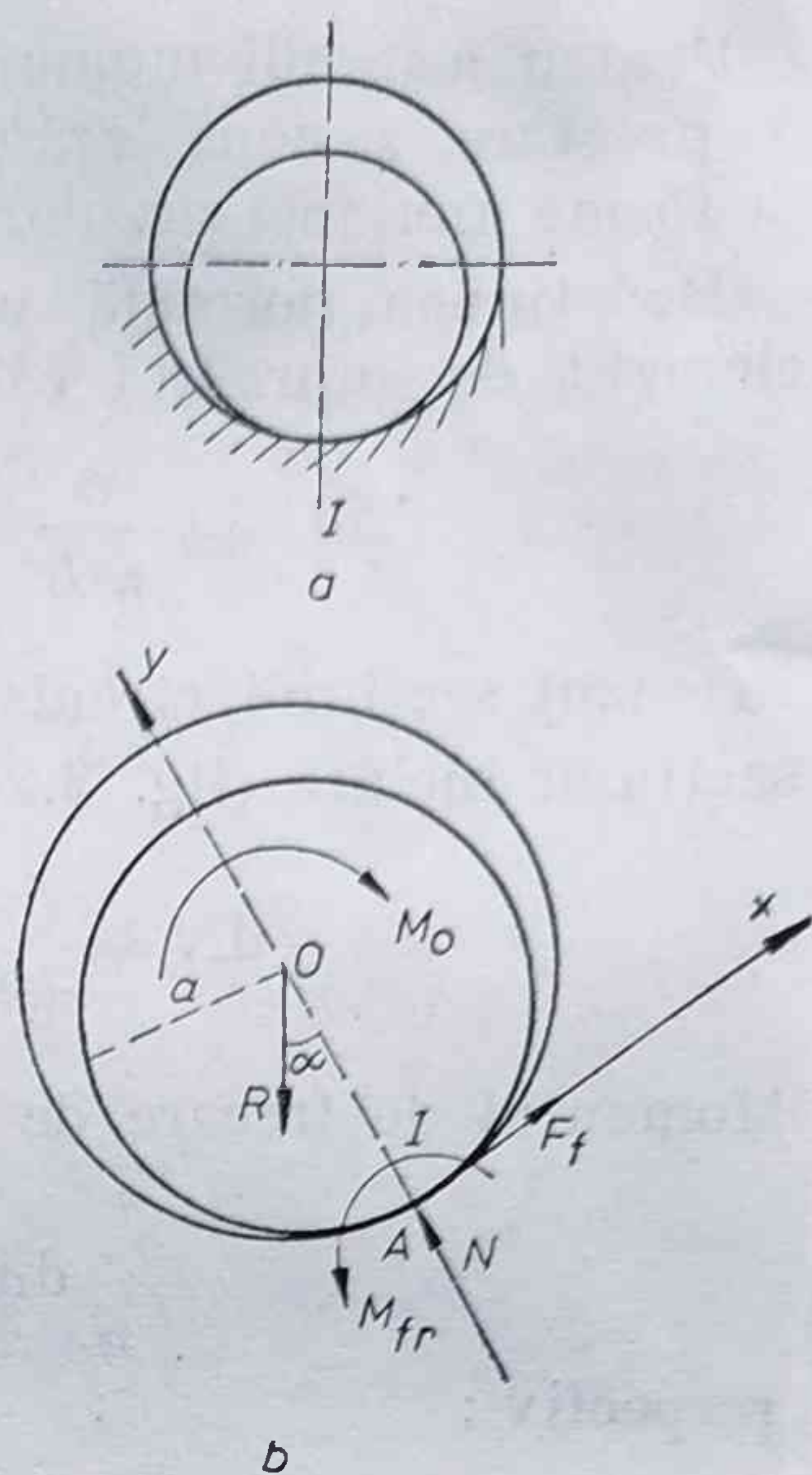


Fig. 3.27

iar relația devine :

$$M_0 \leq R \cdot a \left(\mu + \frac{s}{a} \right) = R \cdot a \cdot \mu'.$$

Coeficientul de frecare μ este adimensional ca și raportul $\frac{s}{a}$, astfel că se poate nota $\mu' = \mu + \frac{s}{a}$ echivalent cu un coeficient de frecare adimensional μ' .

Mărimea momentului de frecare maxim, la limita situației de echilibru, rezultă din egalitatea $M_0 = M_{fr}$.

Deci :

$$M_{fr} \leq \mu' a \cdot R = \mu' a \sqrt{F_f^2 + N^2}. \quad (3.26)$$

3.9.5. FRECAREA ÎN SCRIPETI

Scripetele este format dintr-un disc rotund ce se poate roti în jurul unei axe perpendiculare pe planul discului (fig. 3.28). Peste circumferința discului este trecut un fir flexibil și inextensibil, astfel că de un capăt al firului poate acționa o forță activă \bar{F} care să țină în echilibru sau să ridice o sarcină \bar{Q} . Prin acționarea cu forța \bar{F} discul scripetelui de rază r se rotește fără ca firul să alunece față de circumferința discului. În articulația discului scripetelui cu axul său apare o rezistență de frecare. Se constată că forța activă \bar{F} este mai mare decât sarcina \bar{Q} .

Pentru a determina forța activă \bar{F} , se va considera cazul ipotezelor celor mai nefavorabile :

- în articulația de rază a apare un moment rezistent de frecare ;
- firul nu este perfect flexibil și se abate față de tangentele duse la capetele diametrului orizontal cu distanțele mici ε_1 și ε_2 către interiorul și către exteriorul diametrului AB .

Ecuatiile de echilibru sînt :

$$(\Sigma X) : X = 0 ;$$

$$(\Sigma Y) : Y - F - Q = 0 ;$$

$$(\Sigma M) : Q(r + \varepsilon_2) - F(r - \varepsilon_1) + R \cdot a \cdot \mu' = 0.$$

Rezultă :

$$X = 0 ;$$

$$Y = F + Q ;$$

$$R = F + Q ;$$

$$F = \frac{r + \varepsilon_2 + \mu' \cdot a}{r - \varepsilon_1 - \mu' \cdot a} Q = \lambda \cdot Q. \quad (3.27)$$

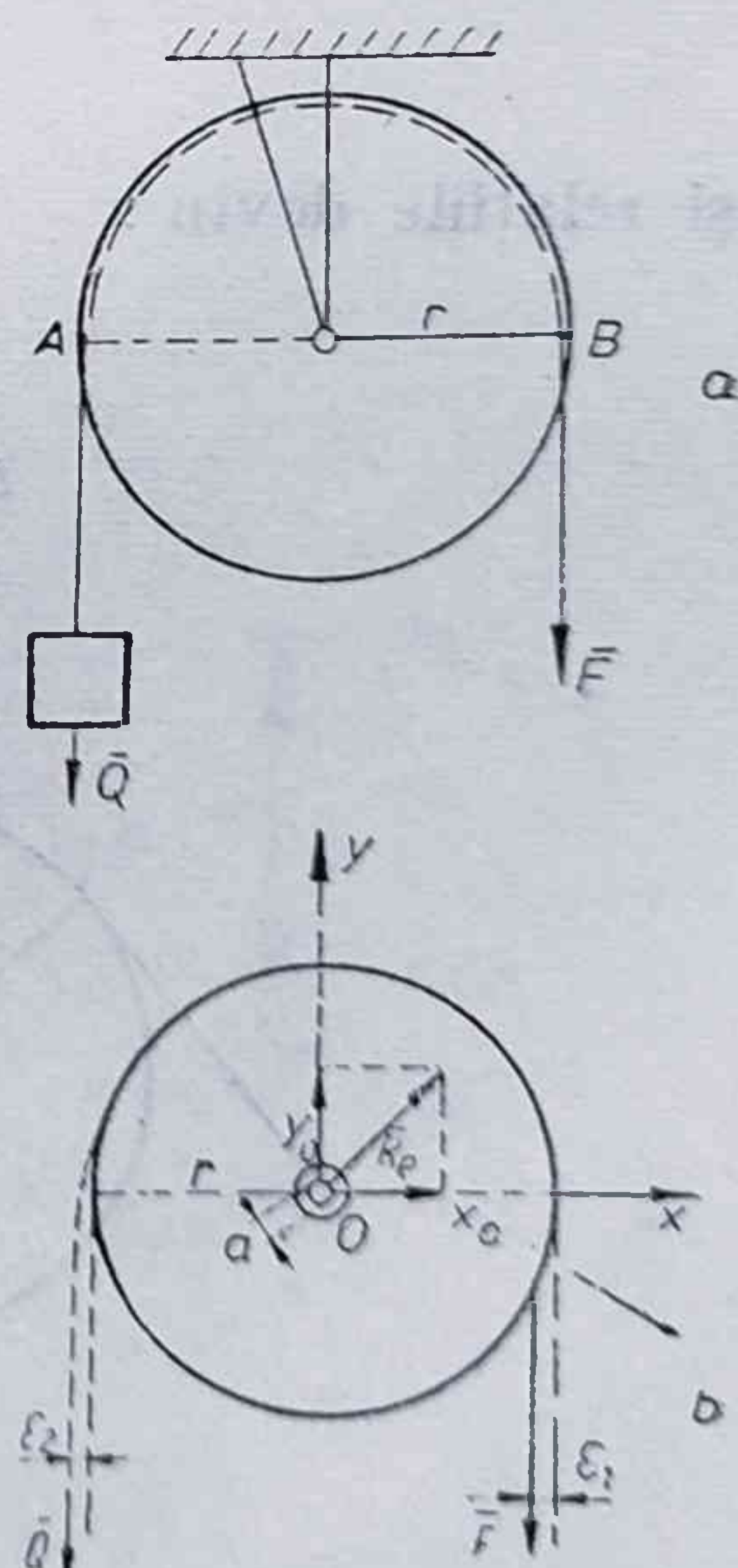


Fig. 3.28

Coeficientul : $\lambda = \frac{r + \varepsilon_1 + \mu'a}{r - \varepsilon_1 - \mu'a}$ este supraunitar și poartă numele de *coeficient de multiplicare*. Valoarea sa este practic egală cu $\lambda \approx 1,1, \dots, 1,3$.

Relația $F = \lambda \cdot Q$ se folosește în aplicații în locul ecuației de momente față de axul scripetelui.

3.9.6. FRECAREA FIRELOR

În acest caz, discul peste care se înfășoară firul este fixat, iar dacă firul este tras de un capăt, are tendința să alunece cu frecare peste disc. Între fir și disc apare o frecare de alunecare caracterizată printr-un coeficient de frecare μ (fig. 3.29, a).

Tensiunea în capătul de care acționează firul este mai mare decât în partea opusă, deoarece trebuie învinsă rezistența la frecarea de alunecare a firului. Pentru a determina relația dintre tensiunile ce se produc în cele două ramuri, se ia în considerare un element din fir (fig. 3.29, b), pe o lungime de arc cu unghiul la vîrf $d\theta$, și se scriu condițiile de echilibru față de un sistem de axe format din tangenta și normala duse în punctul din mijlocul elementului de fir.

Se obține :

$$(\Sigma X): (T + \Delta T) \cos \frac{d\theta}{2} - T \cos \frac{d\theta}{2} - \Delta F_f = 0 ;$$

$$(\Sigma Y): \Delta N - (T + \Delta T) \sin \frac{d\theta}{2} - T \sin \frac{d\theta}{2} = 0 ;$$

$$\Delta F_f \leq \mu \cdot \Delta N.$$

Deoarece s-a considerat un unghi $d\theta$ mic, se poate aproxima :

$$\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2} \text{ și } \cos \frac{d\theta}{2} \approx 1$$

și relațiile devin :

$$T + \Delta T - T - \Delta F_f = 0 ;$$

$$\Delta N - T \frac{d\theta}{2} - \Delta T \cdot \frac{d\theta}{2} - T \frac{d\theta}{2} = 0 ;$$

$$\Delta F_f \leq \mu \cdot \Delta N$$

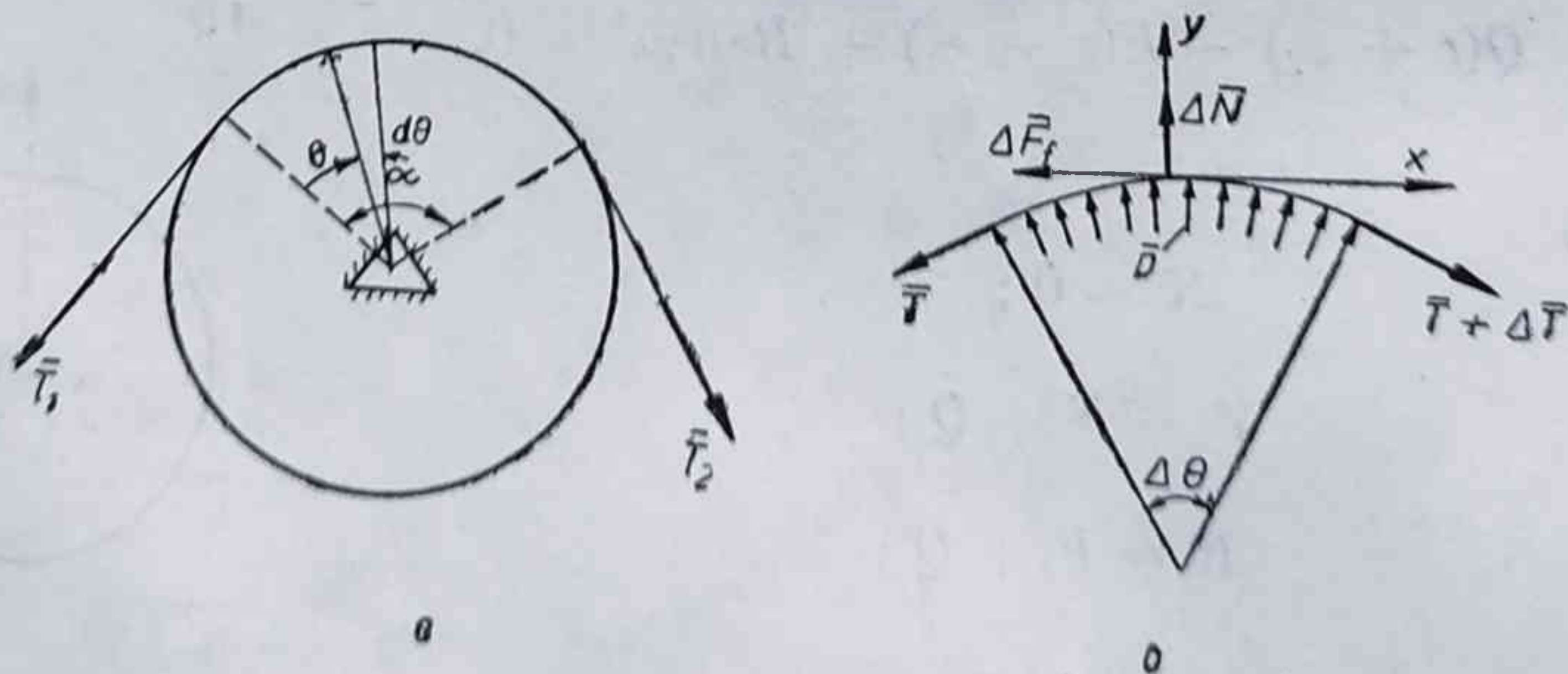


Fig. 3.29

și considerînd

$$\Delta T \frac{d\theta}{2} \approx 0$$

se obține :

$$\Delta T \leq \mu \cdot T \cdot d\theta$$

sau :

$$\frac{\Delta T}{T} \leq \mu \cdot d\theta.$$

Luînd în considerare un fir întreg înfășurat pe un unghi α se obține .

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} \leq \int_0^\alpha \mu \cdot d\theta,$$

ceea ce conduce la relația (Euler) :

$$T_2 \leq T_1 \cdot e^{\mu\alpha}$$

la echilibru.

APLICAȚIA 1

Se dă cubul cu latură a acționat ca în figura 3.30, a de forțele

$$|\bar{F}_1| = F\sqrt{3};$$

$$|\bar{F}_2| = F\sqrt{2}$$

și cuplul

$$|\bar{M}| = F \cdot a \sqrt{2}.$$

Se cere :

- să se reducă sistemul în punctul 0 ;
- să se determine torsorul minimal ;
- să se determine ecuația axei centrale.

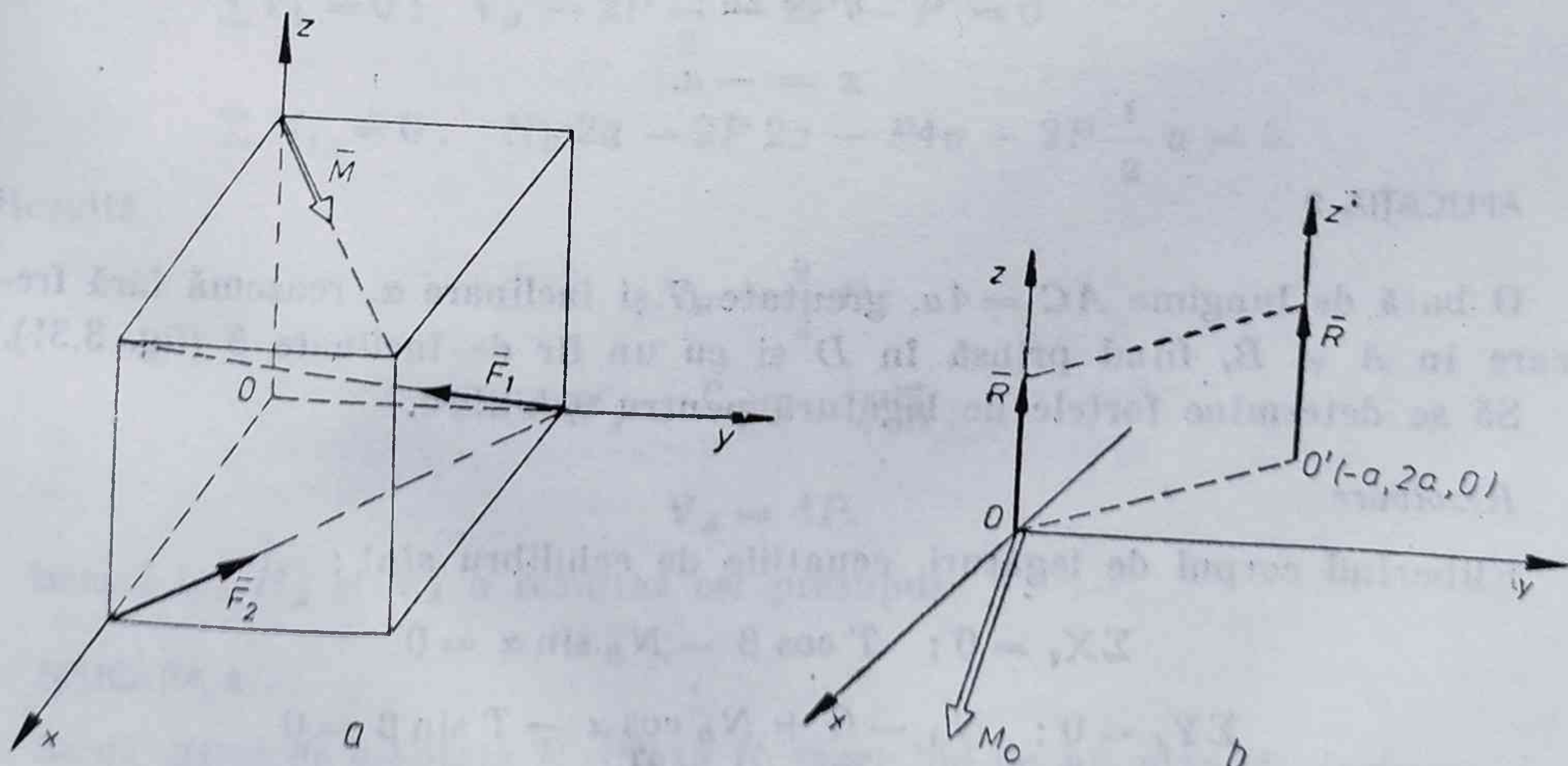


Fig. 3.30

Rezolvare

Pentru determinarea elementelor torsorului de reducere în O , se calculează vectorul rezultat \bar{R} și momentul rezultat \bar{M}_O , cu ajutorul componentelor acestora pe cele trei axe ale sistemului $Oxyz$.

$$\bar{R} \begin{cases} X = \sum X_i = 0 \\ Y = \sum Y_i = 0 \\ Z = \sum Z_i = F \end{cases}$$

$$\bar{M}_O \begin{cases} M_{Ox} = 2F \cdot a \\ M_{Oy} = F \cdot a \\ M_{Oz} = 0. \end{cases}$$

Deci, torsorul în O are următoarele componente :

$$\bar{R} = F \cdot \bar{k};$$

$$\bar{M}_O = 2F \cdot a \cdot \bar{i} + F \cdot a \cdot \bar{j}.$$

Deci :

$$\bar{R} \neq 0;$$

$$\bar{M}_O \neq 0;$$

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0,$$

astfel încît sistemul se reduce la un vector rezultat unic \bar{R} pe axa centrală, momentul minim $M_R = 0$.

Pentru determinarea ecuației axei centrale (fig. 3.30, b) se folosește :

$$\frac{2F \cdot a - y \cdot F}{0} = \frac{F \cdot a + x \cdot F}{0} = \frac{0}{F}$$

de unde :

$$y = 2a;$$

$$x = -a.$$

APLICAȚIA 2

O bară de lungime $AC = 4a$, greutate G și înclinare α , reazemă fără frecare în A și B , fiind prinsă în D și cu un fir de înclinare β (fig. 3.31). Să se determine forțele de legătură pentru echilibru.

Rezolvare

Eliberînd corpul de legături, ecuațiile de echilibru sînt :

$$\sum X_i = 0; \quad T \cos \beta - N_B \sin \alpha = 0$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N_A - G + N_B \cos \alpha - T \sin \beta = 0$$

$$\sum M_{i_A} = 0; \quad N_B 3a - G 2a \cos \alpha - T \cdot a \sin (\alpha + \beta) = 0.$$

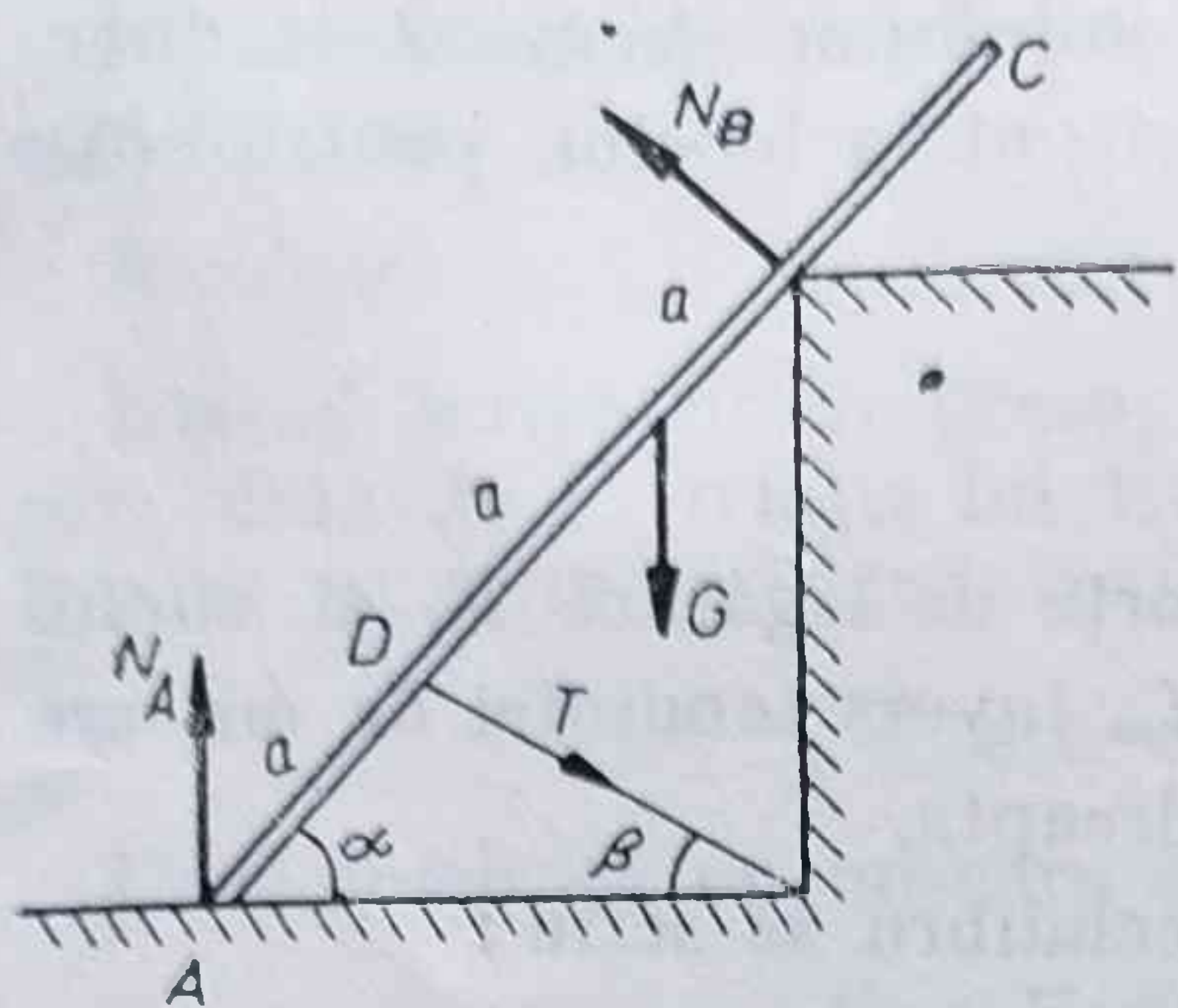


Fig. 3.31

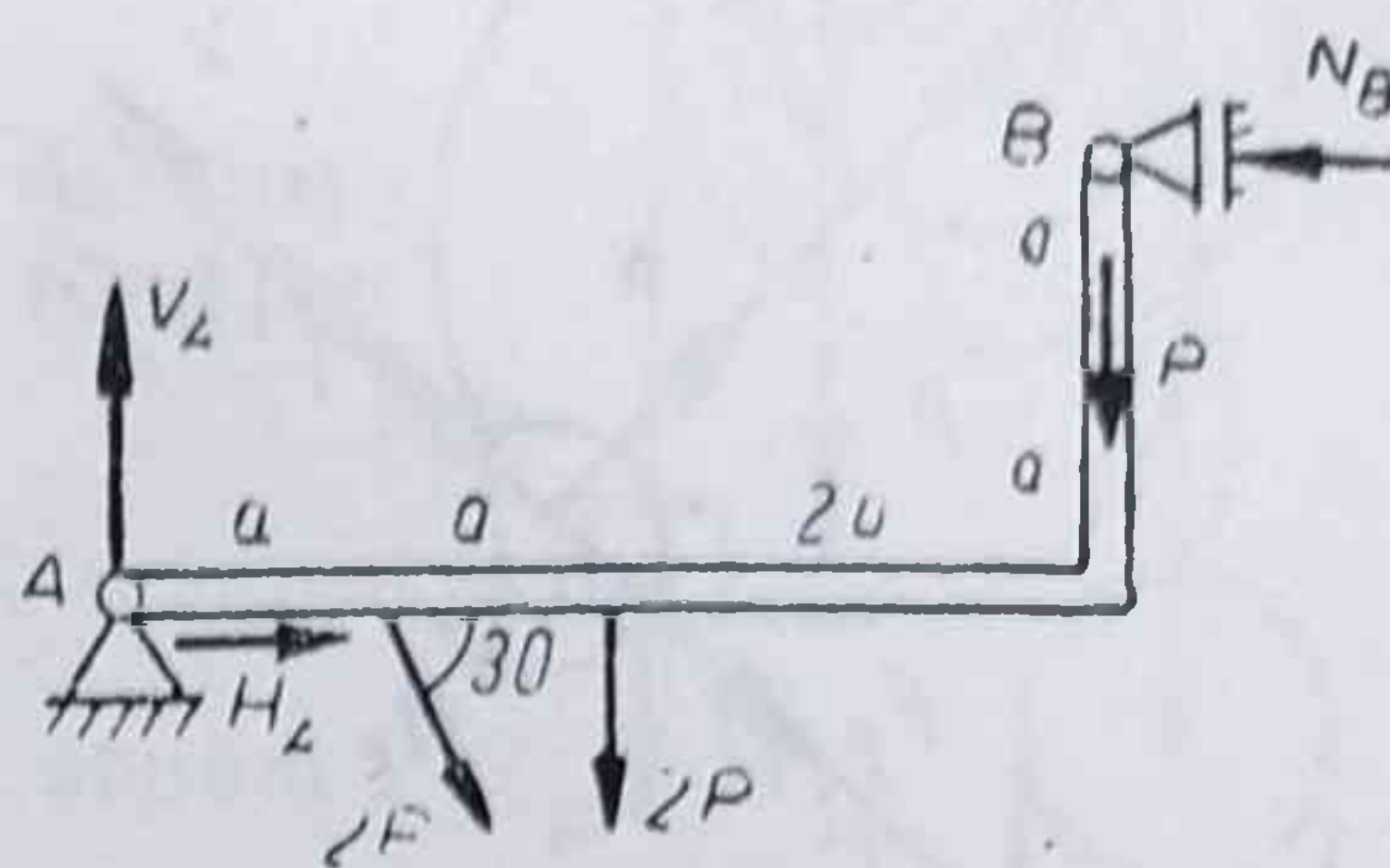


Fig. 3.32

Rezultă :

$$T = \frac{G \sin 2\alpha}{3 \cos \beta - \sin(\alpha + \beta)}.$$

$$N_B = \frac{2G \cos \alpha \cos \beta}{3 \cos \beta - \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)};$$

$$N_A = G \frac{1 + \sin 2\alpha \cdot \sin \beta - 2 \cos^2 \alpha \cdot \cos \beta}{3 \cos \beta - \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}.$$

APLICAȚIA 3

Să se determine forțele de legătură din articulația A și reazemul B, pentru echilibrul barei cotate (fig. 3.32).

Rezolvare

Se pun în evidență forțele de legătură N_B în reazem, H_A și V_A în articulație :

$$\sum X_i = 0; \quad H_A + 2P \frac{\sqrt{3}}{2} - N_B = 0$$

$$\sum Y_i = 0; \quad V_A - 2P \frac{1}{2} - 2P - P = 0$$

$$\sum M_{i_A} = 0; \quad N_B 2a - 2P 2a - P 4a - 2P \frac{1}{2} a = 0.$$

Rezultă :

$$N_B = \frac{9}{2} P;$$

$$H_A = \frac{P}{2} (9 - \sqrt{3});$$

$$V_A = 4P.$$

Sensul lui H_A și V_A a rezultat cel presupus.

APLICAȚIA 4

Se dă discul de greutate P și rază R , rezemînd pe un plan de înclinare α , cu frecări de coeficienți, μ de alunecare și s de rostogolire (fig. 3.33).

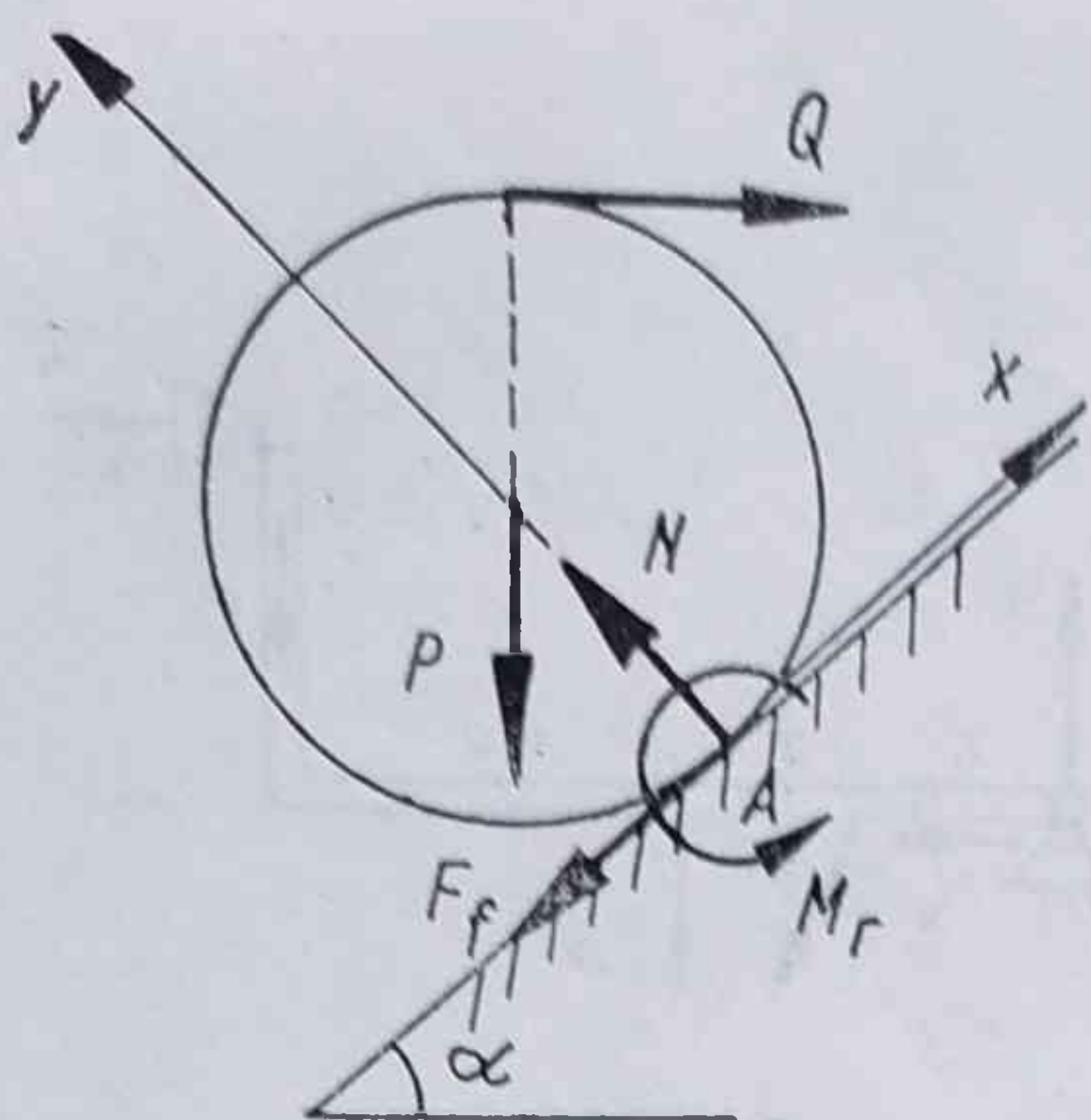


Fig. 3.33

Să se determine mărimea forței Q de direcție paralelă cu orizontala locului, pentru echilibru.

Rezolvare

Se figurează forța de legătură F_f și cuplul de rostogolire M_r , invers tendinței de mișcare presupuse spre dreapta.

Condițiile de echilibru se scriu :

$$(\sum X_i = 0) ; Q \cos \alpha - P \sin \alpha - F_f = 0 ;$$

$$(\sum Y_i = 0) ; N - P \cos \alpha - Q \sin \alpha = 0 ;$$

$$(\sum M_{i_A} = 0) ; Q(R + R \cos \alpha) - P \cdot R \sin \alpha - M_r = 0 ;$$

$$F_f \leq \mu \cdot N ;$$

$$M_r \leq s \cdot N.$$

Rezultă :

$$Q \leq P \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

condiție să nu alunece în sus ;

$$Q \leq P \frac{\sin \alpha + \frac{s}{R} \cos \alpha}{\cos \alpha - \frac{s}{R} \sin \alpha + 1}$$

condiție să nu se rostogolească în sus.

Schimbînd tendința de mișcare, se va schimba semnul din fața termenilor ce conțin pe μ și $\frac{s}{R}$, precum și sensul inecuației, putînd spune, în final, că, pentru echilibru Q va trebui să fie cuprins între :

$$P \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \leq Q \leq P \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

pentru a nu luneca ;

$$P \frac{\sin \alpha - \frac{s}{R} \cos \alpha}{\cos \alpha + \frac{s}{R} \sin \alpha + 1} \leq Q \leq P \frac{\sin \alpha + \frac{s}{R} \cos \alpha}{\cos \alpha - \frac{s}{R} \sin \alpha + 1}$$

pentru a nu se rostogoli.

APLICAȚIA 5

Se consideră trolul de greutate neglijabilă, cu razele r , R , raza fusului articulației a și coeficient de frecare în ax μ' . De firul din dreapta este prins un scripete de greutate neglijabilă, pe care este înfășurat un fir ce reazemă cu frecare μ , avînd atîrnată o greutate G (fig. 3.34).

Să se determine mărimile forțelor F și P pentru echilibru.

Rezolvare

Izolind scripetele și presupunând tendința de mișcare dată de F , relația lui Euler, aplicată la firul cu frecare pe scripete, conduce la :

$$F \leq G \cdot e^{\mu\pi}.$$

Dacă tendința de mișcare este dată de G , atunci :

$$G \leq F \cdot e^{\mu\pi}.$$

Deci, pentru echilibru :

$$\frac{G}{e^{\mu\pi}} \leq F \leq G \cdot e^{\mu\pi}.$$

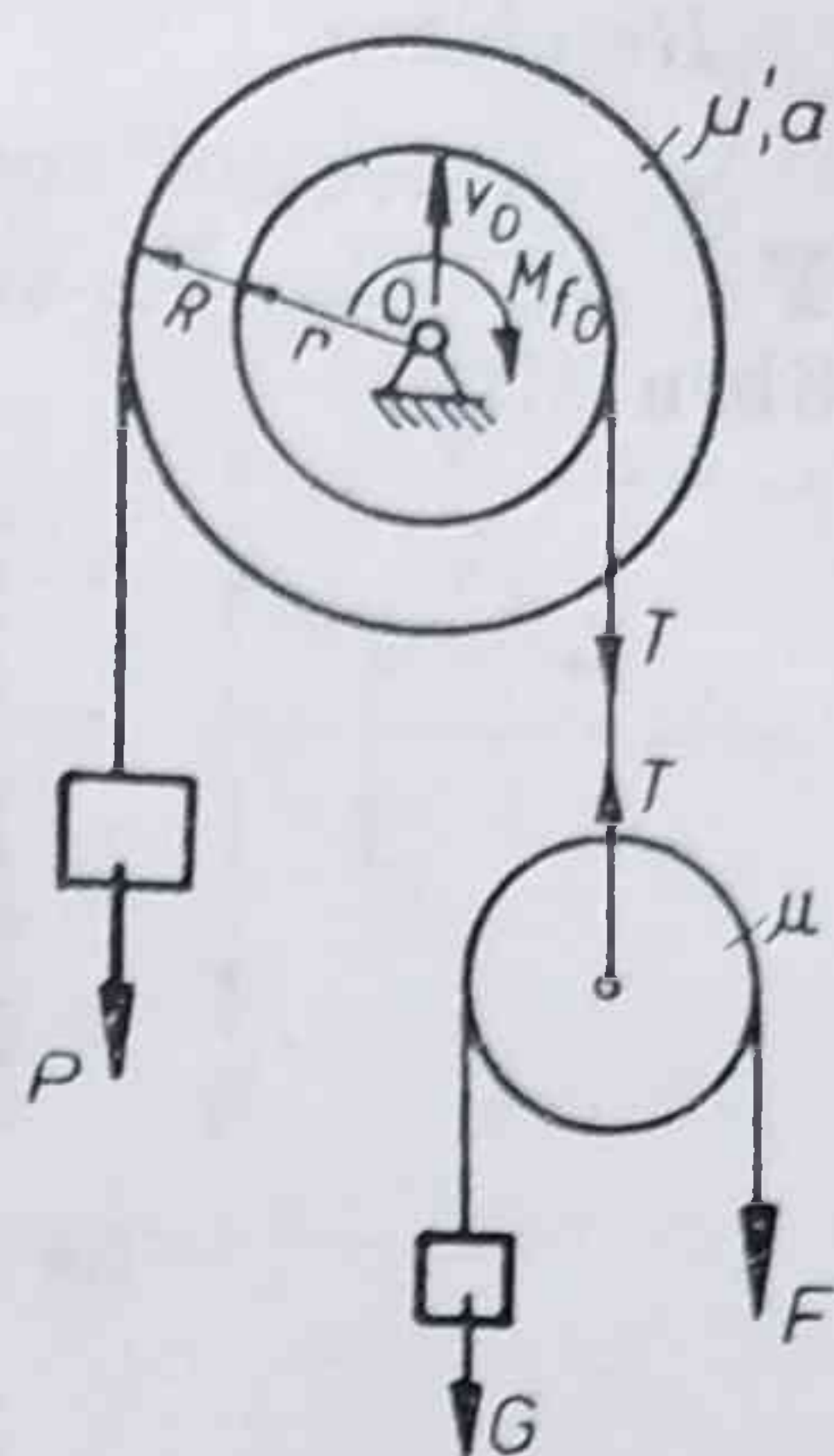


Fig. 3.34

Pentru troliu, tendința de mișcare fiind presupusă la stînga, se introduce cuplul de frecare M_{f0} invers tendinței de mișcare și se scriu ecuațiile de echilibru :

$$\Sigma X_i = 0 ; H_0 = 0 ;$$

$$\Sigma Y_i = 0 ; V_0 - G - T = 0 ;$$

$$\Sigma M_{i_0} = 0 ; P \cdot R - T \cdot r - M_{f0} = 0 ;$$

$$M_{f0} \leq \mu' \cdot a \cdot V_0.$$

Rezultă :

$$P \leq (G + F) \frac{r + \mu' \cdot a}{R - \mu' \cdot a}.$$

Schimbînd tendința de mișcare, se schimbă sensul din fața termenilor ce conțin coeficienți de frecare, precum și semnul inegalității, obținînd în final condiția de echilibru :

$$(G + F) \frac{(r - \mu' \cdot a)}{(R + \mu' \cdot a)} \leq P \leq (G + F) \frac{(r + \mu' \cdot a)}{(R + \mu' \cdot a)}.$$

APLICAȚIA 6

O placă pătrată de latură l și greutate G (fig. 3.35) este așezată vertical, rotindu-se în jurul axei verticale ce coincide cu latura AB . Cunoscînd raza lagărelor a și coeficientul de frecare μ' din lagărele A și B și coeficientul de frecare μ în reazemul A , să se determine valoarea momentului M al cuplului motor pentru ca placa să fie la limita rotirii.

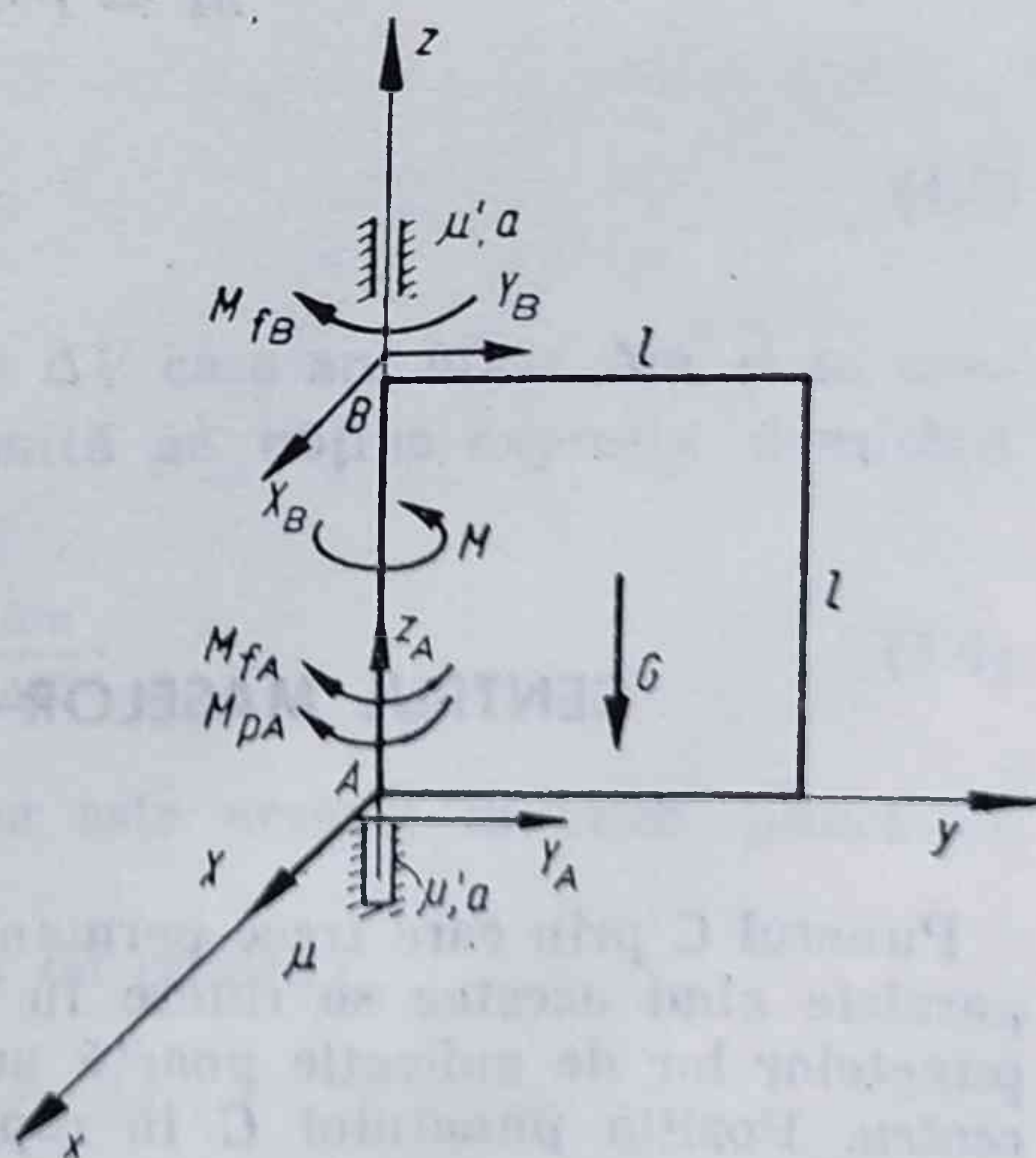


Fig. 3.35

Rezolvare

Se eliberează corpul de legături, punîndu-se în evidență reacțiunile X_A , Y_A , Z_A , X_B , Y_B și cuplurile de frecare M_{fA} , M_{fB} , M_{pA} . Ecuațiile de echilibru sînt:

$$\Sigma X_i = 0; X_A + X_B = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0; Y_A + Y_B = 0;$$

$$\Sigma Z_i = 0; Z_A - G = 0;$$

$$\Sigma M_{ix} = 0; X_B \cdot l - G \frac{l}{2} = 0;$$

$$\Sigma M_{iy} = 0; X_B \cdot l = 0;$$

$$\Sigma M_{iz} = 0; M_{fA} + M_{fB} + M_{pA} - M = 0.$$

La acestea se adaugă valorile la limită a momentelor de frecare:

$$M_{fA} = \mu' \cdot a \sqrt{X_A^2 + Y_A^2};$$

$$M_{fB} = \mu' \cdot a \sqrt{X_B^2 + Y_B^2};$$

$$M_{pA} = \frac{3}{2} \mu \cdot a \cdot Z_A.$$

Rezolvînd aceste ecuații, se obțin:

$$X_A = 0;$$

$$Y_A = \frac{P}{2};$$

$$Z_A = P;$$

$$X_B = 0;$$

$$Y_B = -\frac{P}{2};$$

$$M = P \cdot a \left[\mu' + \frac{2}{3} \mu \right].$$

4.

CENTRUL MASELOR (CENTRUL DE GREUTATE)

Punctul C prin care trece permanent linia de acțiune a rezultantei forțelor paralele cînd acestea se rotesc în același sens și cu același unghi în jurul punctelor lor de aplicație poartă numele de *centrul forțelor paralele* sau *baricentru*. Poziția punctului C în raport cu corpul este independentă de alegerea axelor de coordonate (fig. 4.1).

Se consideră un corp de masă M format dintr-un sistem de puncte materiale de masă m_i a căror poziție este determinată de vectorii de poziție \vec{r}_i . Vectorul de poziție al centrului de masă (de greutate) este dat de relația :

$$\bar{\rho}_c = \frac{\sum m_i \cdot g \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i \cdot g} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i} \quad \text{sau}$$

$$\bar{\rho}_c = \frac{\int_V \vec{r} \cdot dm}{\int_V dm}, \quad (4.1)$$

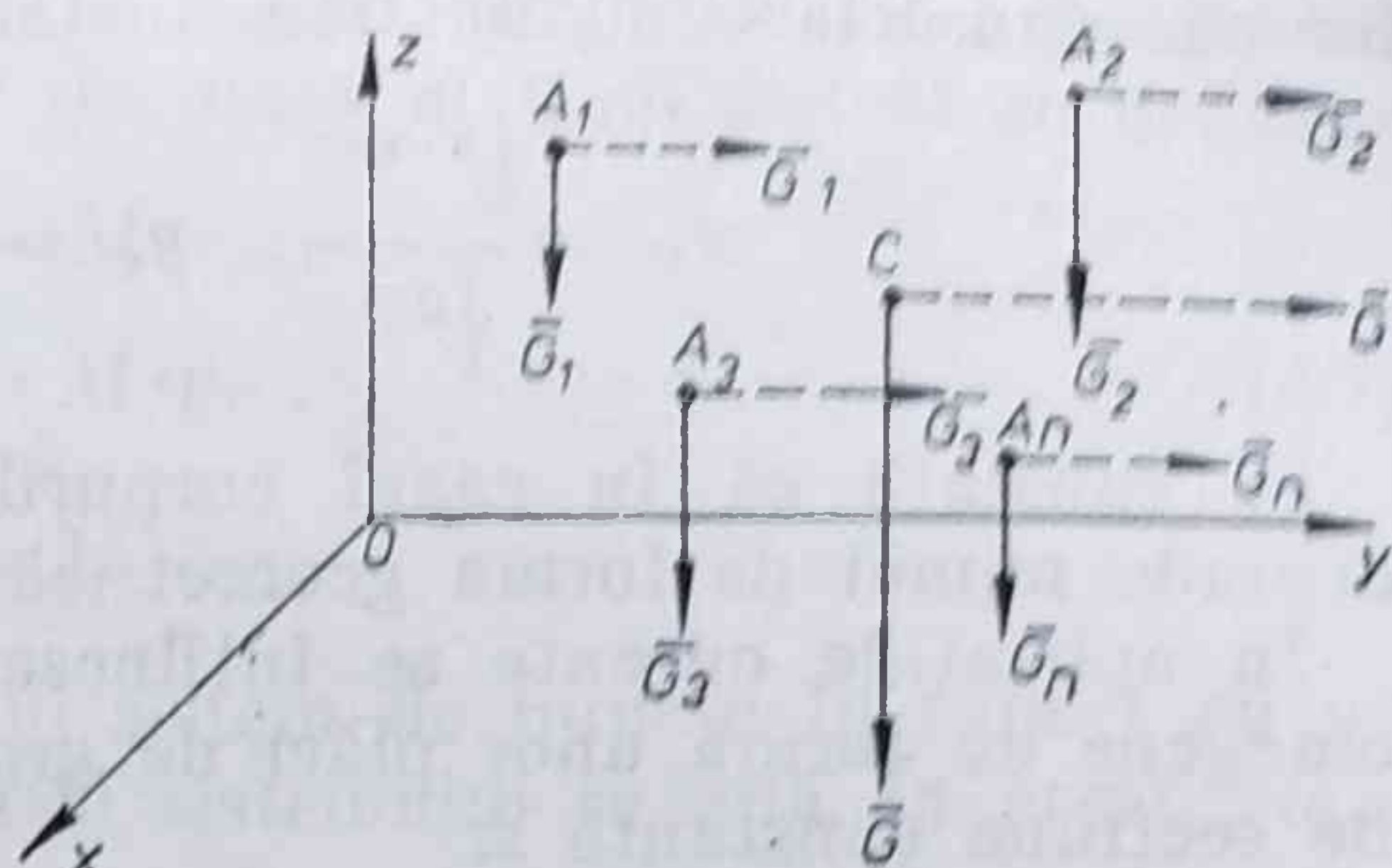


Fig. 4.1

dacă sistemul de puncte formează un continuu material.

După cum se vede în expresia vectorului de greutate, nu intervine direcția forțelor paralele.

Coordonatele centrului de greutate capătă expresia :

$$x_c = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{\sum m_i}; \quad y_c = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{\sum m_i}; \quad z_c = \frac{\sum m_i \cdot z_i}{\sum m_i}, \quad (4.2)$$

sau

$$x_c = \frac{\int x \cdot dm}{\int dm}; \quad y_c = \frac{\int y \cdot dm}{\int dm}; \quad z_c = \frac{\int z \cdot dm}{\int dm}.$$

4.1. COORDONATELE CENTRULUI DE GREUTATE ÎN CAZUL CORPURILOR OMOGENE

În cazul corpurilor omogene, masa m a unei părți oarecare este proporțională cu volumul său : $m_i = V_i \cdot \gamma$.

Rezultă relația :

$$\frac{m_i}{V_i} = \gamma. \quad (4.3)$$

Dacă se consideră un volum foarte mic ΔV care are masa Δm și se consideră un punct oarecare, atunci la limită se obține expresia densității într-un punct.

$$\gamma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (4.4)$$

În cazul unui corp omogen, densitatea este aceeași în orice punct al corpului.

Poziția centrului de greutate este dată de relația :

$$\vec{r}_c = \frac{\int_V \vec{r} \cdot dV}{\int_V dV} = \frac{\int_V \vec{r} \cdot \gamma \cdot dV}{\int_V \gamma \cdot dV}, \quad (4.5, a)$$

iar coordonatele centrului maselor sînt date de relația :

$$x_c = \frac{\int_V x \cdot dm}{\int_V dm}; \quad y_c = \frac{\int_V y \cdot dm}{\int_V dm}; \quad z_c = \frac{\int_V z \cdot dm}{\int_V dm}. \quad (4.5, b)$$

Se constată că în cazul corpurilor omogene poziția centrului de masă depinde numai de forma geometrică a corpurilor.

În aplicațiile curente se întîlnesc foarte multe cazuri în care corpurile omogene au forma unor plăci de grosime constantă δ sau forma unor bare de secțiune constantă s .

În aceste cazuri expresia volumelor forțelor componente se poate scrie sub forma :

$$V_n = A_n \cdot \delta \text{ și } V_n = l_n \cdot s,$$

unde A_n și l_n reprezintă suprafețele respectiv lungimile unor părți componente.

Vectorul de poziție al centrului maselor și coordonatele sale vor fi date în acest caz de relațiile :

$$\bar{r}_c = \frac{\int_A \bar{r} \cdot dA}{\int_A dA} \text{ și } \bar{r}_c = \frac{\int_L \bar{r} \cdot ds}{\int_L ds}, \quad (4.6, a)$$

și

$$x_c = \frac{\int_A x \cdot dA}{\int_A dA};$$

$$y_c = \frac{\int_A y \cdot dA}{\int_A dA}; \quad (4.6, b)$$

$$z_c = \frac{\int_A z \cdot dA}{\int_A dA},$$

respectiv :

$$x_c = \frac{\int_L x \cdot ds}{\int_L ds};$$

$$y_c = \frac{\int_L y \cdot ds}{\int_L ds}; \quad (4.6, c)$$

$$z_c = \frac{\int_L z \cdot ds}{\int_L ds}.$$

4.2. MOMENTE STATICE

În expresia coordonatelor x_c , y_c , z_c ale centrului maselor unui sistem de puncte materiale apar expresiile de forma :

$$\sum m_i \cdot x_i; \quad \sum m_i \cdot y_i; \quad \sum m_i \cdot z_i$$

care poartă numele de *momente statice în raport cu planele de coordonate*.
Din expresia coordonatelor centrului de masă al unui sistem se deduce :

$$\begin{aligned}\sum m_i \cdot x_i &= M \cdot x_c ; \\ \sum m_i \cdot y_i &= M \cdot y_c ; \\ \sum m_i \cdot z_i &= M \cdot z_c .\end{aligned}\tag{4.7}$$

Se deduce că momentul static al unui sistem de puncte în raport cu un plan este nul dacă centrul de greutate al sistemului se află în acest plan.

Observație. În mod asemănător se poate defini momentul static în raport cu o axă sau în raport cu un punct.

4.3. PROPRIETĂȚILE CENTRULUI MASELOR

1. În cazul corpurilor omogene sau a unui sistem de puncte materiale omogene, poziția centrului maselor depinde numai de forma geometrică a corpului sau a sistemului.

2. Dacă un sistem de puncte materiale sau un corp are un plan, o axă sau un centru de simetrie, centrul maselor se află în acel plan, pe acea axă sau în acel centru de simetrie.

3. Dacă un sistem de puncte materiale se poate împărți în mai multe grupuri de puncte cărora li se cunosc masele M_1, M_2, \dots, M_n și centrele de masă C_1, C_2, \dots, C_n , atunci centrul de masă al sistemului se poate obține considerînd că masele grupurilor componente M_j sînt concentrate în centrele lor de masă C_j .

Vectorul de poziție al centrului maselor pentru întreg sistemul este dat de expresia :

$$\bar{\rho}_c = \frac{\sum M_j \cdot \bar{\rho}_j}{\sum M_j}, \tag{4.8}$$

unde $\bar{\rho}_j$ reprezintă pozițiile centrelor de masă ale grupurilor de puncte componente, date la rîndul lor de expresia :

$$\bar{\rho}_j = \frac{\sum m_i \cdot \bar{r}_i}{\sum m_i}.$$

4. Dacă un sistem de puncte materiale poate fi considerat că este obținut dintr-un sistem de puncte a cărui masă este M_1 ce are centrul de masă în punctul C_1 din care a fost eliminat un alt sistem de masă M_2 ce are centrul de masă în C_2 , poziția centrului de masă C pentru corpul rezultat se obține din relația :

$$\bar{\rho}_c = \frac{M_1 \cdot \bar{\rho}_1 - M_2 \cdot \bar{\rho}_2}{M_1 - M_2}. \tag{4.9}$$

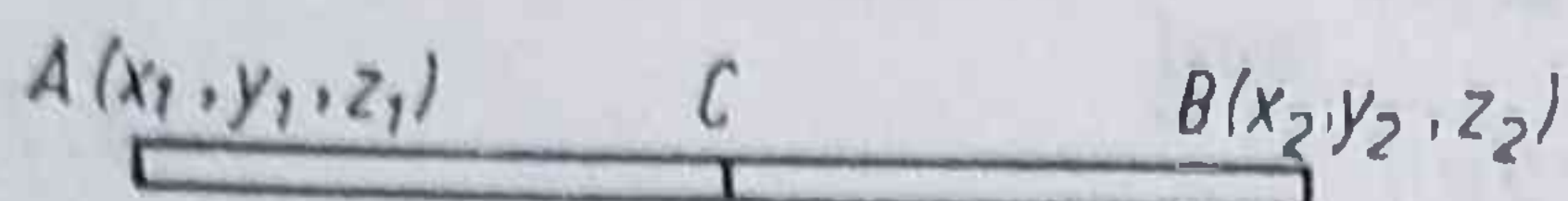


Fig. 4.2

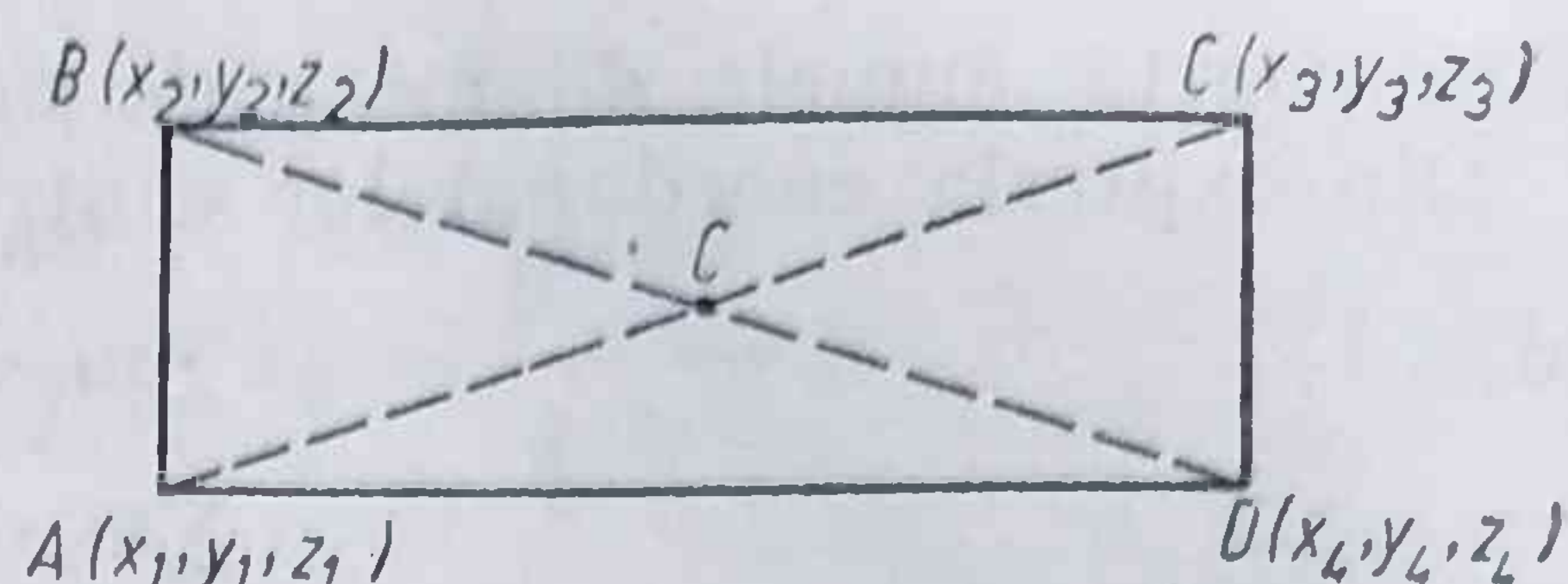


Fig. 4.3

4.4. EXEMPLE

Bară rectilinie omogenă (fig. 4.2). Bara are un centru de simetrie C , care este și centru de masă. Coordonatele sale vor fi :

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{x_1 + x_2}{2}; \\ y_C &= \frac{y_1 + y_2}{2}; \\ z_C &= \frac{z_1 + z_2}{2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Placă omogenă dreptunghiulară (fig. 4.3). Centrul de simetrie se află în punctul C la intersecția diagonalelor. Coordonatele centrului de masă C sînt date deci de relațiile :

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{x_2 + x_4}{2}; \\ y_C &= \frac{y_1 + y_3}{2} = \frac{y_2 + y_4}{2}; \\ z_C &= \frac{z_1 + z_3}{2} = \frac{z_2 + z_4}{2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Placă omogenă triunghiulară (fig. 4.4). Pentru a determina centrul de masă, se poate împărți placa triunghiulară ABC în fișii paralele cu una din laturi, de exemplu AB . Pentru fiecare fișie centrul de masă se află în mijloc, ca la o bară omogenă dreaptă. Rezultă că centrul de masă pentru întreg triunghiul se află în planul ce cuprinde mediana CC' . Deoarece acest raționament este valabil dacă se împarte în fișii paralele cu celelalte laturi, se deduce că centrul de masă al unei plăci triunghiulare se află la intersecția medianelor.

Coordonatele centrului de masă al plăcii triunghiulare sînt date de relațiile :

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \\ y_C &= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \\ z_C &= \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

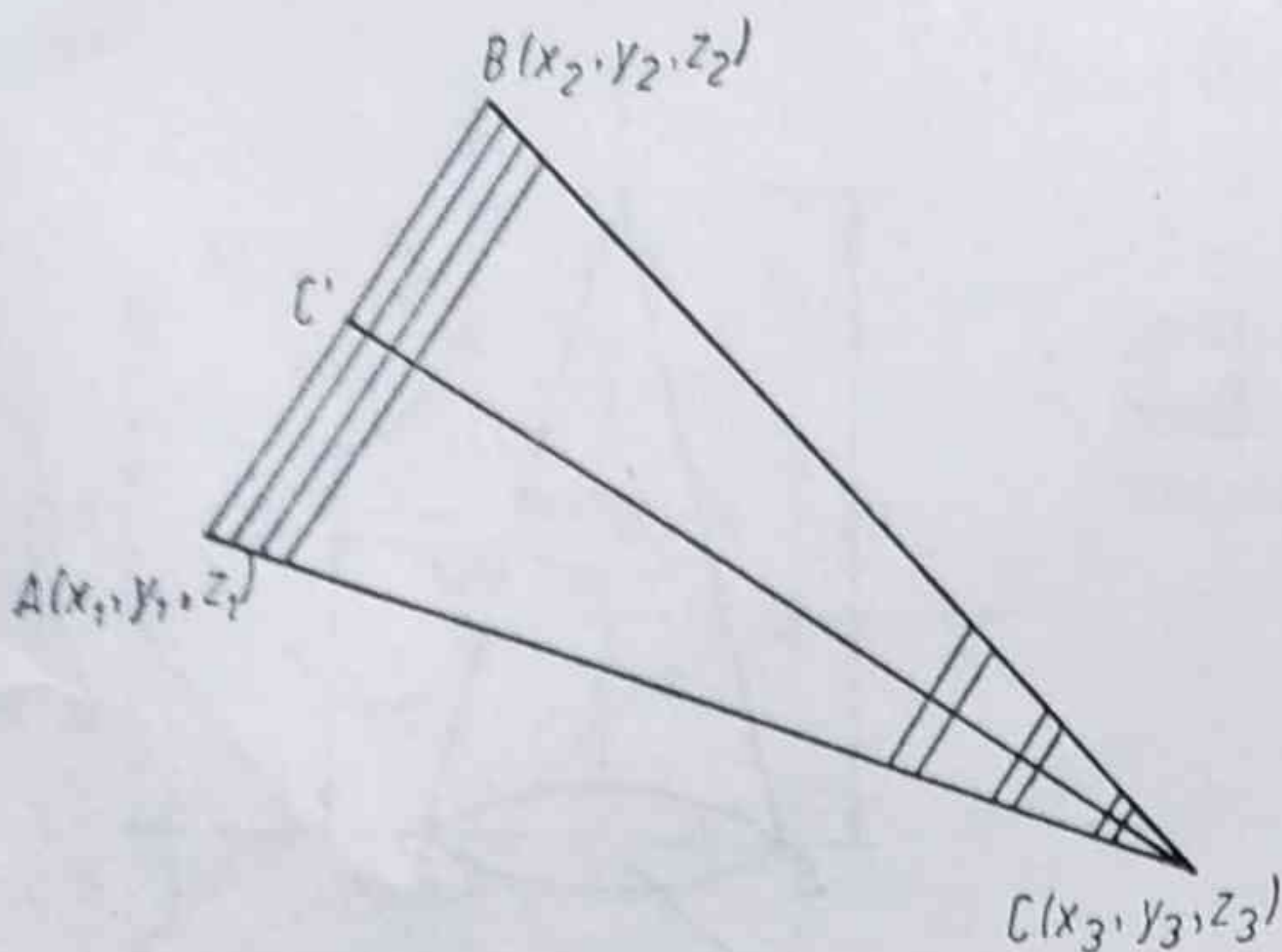


Fig. 4.4

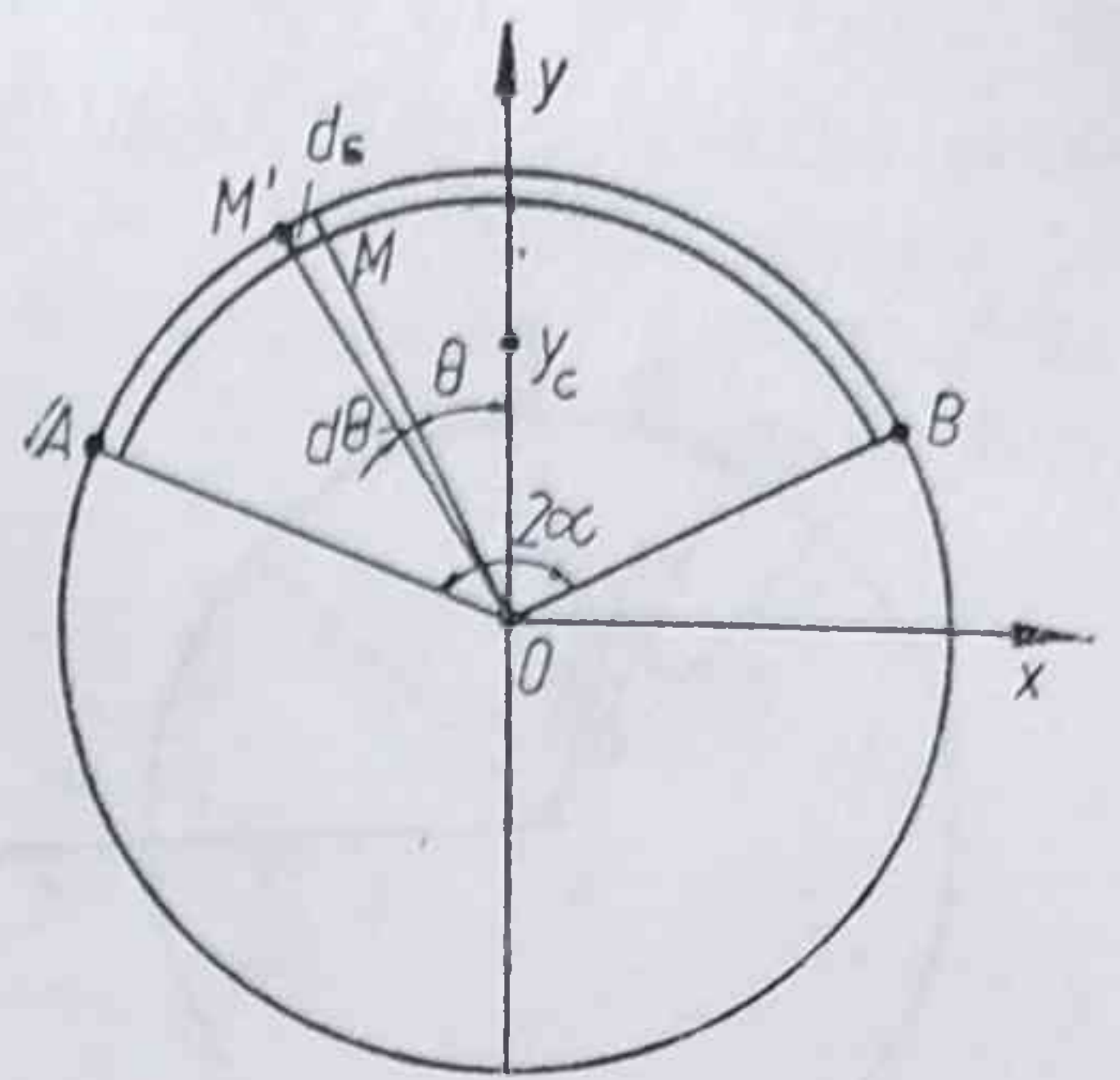


Fig. 4.5

Bară omogenă în formă de arc (fig. 4.5). Bara cuprinde un unghi la centru 2α și are raza R . Se alege un sistem de referință xOy cu originea în centrul cercului și cu axa Oy drept axă de simetrie a barei în formă de arc de cerc. Rezultă că centrul de masă C al barei se află pe axa de simetrie, adică pe axa Oy și deci $x_c = 0$.

Pentru determinarea ordonatei centrului de masă se aplică relația :

$$y_c = \frac{\int y \cdot ds}{\int ds} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \theta R \cdot d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} R \cdot d\theta} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (4.13)$$

Placă omogenă plană în formă de sector circular (fig. 4.6). Se alege un sistem de referință xOy cu originea în centrul cercului de rază R și cu axa Oy drept axa de simetrie a sectorului circular cu unghiul la vîrf 2α . Elementul de arie infinitezimal OM_1M_2 se poate considera drept un triunghi isoscel a cărui suprafață este :

$$dA = \frac{1}{2} |\overline{M_1M_2}| \cdot |\overline{OM}| = \frac{1}{2} R^2 \cdot d\theta,$$

unghiul la vîrf fiind $d\theta$. Centrul de masă al triunghiului considerat se va afla pe mediana OM la două treimi, astfel că ordonata sa y este dată de relația :

$$y = \frac{2}{3} R \cdot \cos \theta.$$

Expresia ordonatei centrului de masă pentru sectorul circular este dată de relația :

$$y_c = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} R \cos \theta \frac{1}{2} R^2 \cdot d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} R^2 \cdot d\theta} = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}. \quad (4.14)$$

Corp omogen în formă de con circular drept (fig. 4.7). Se alege un sistem de referință $Oxyz$, astfel încît originea O să se afle în centrul cercului de

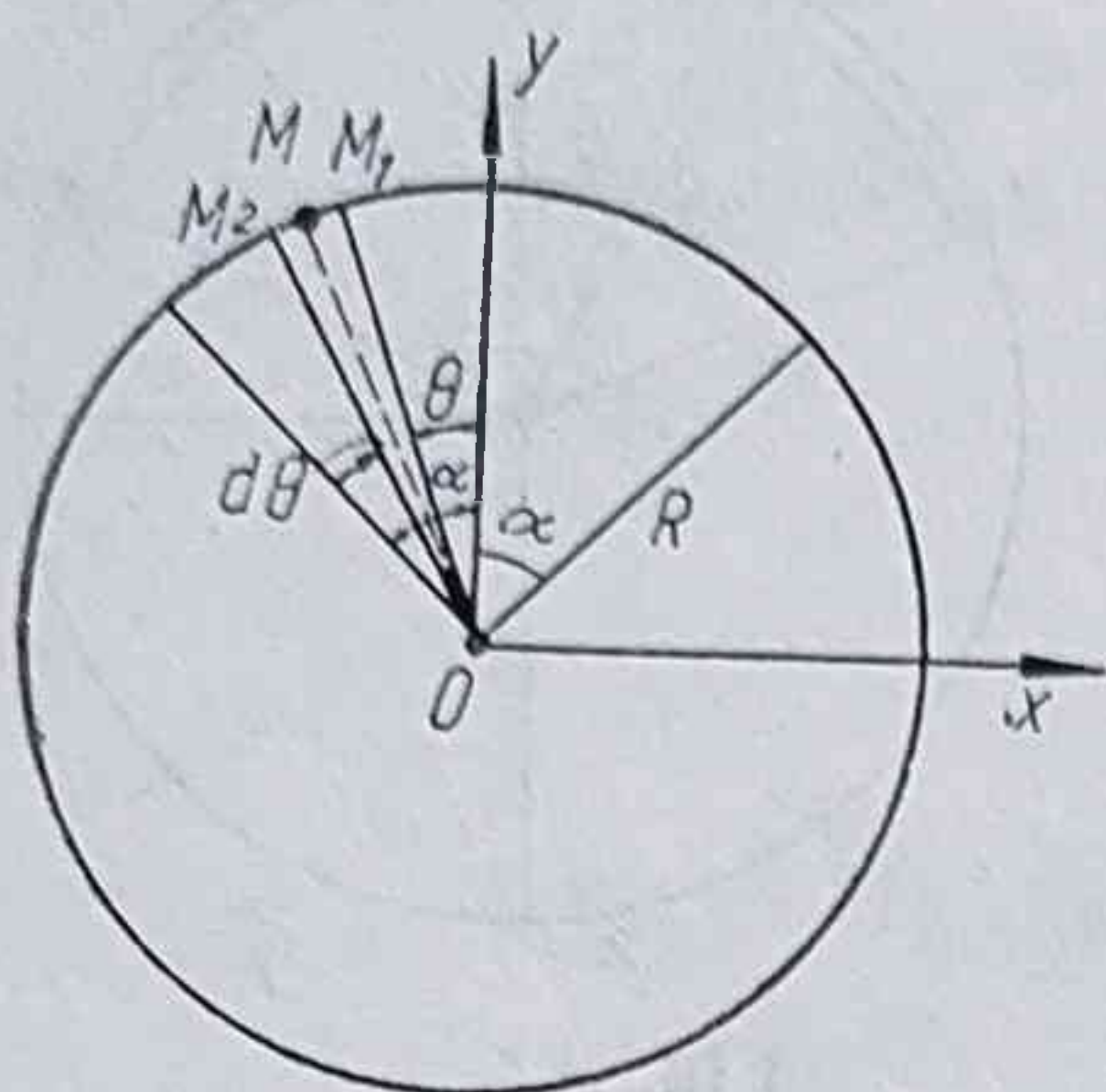


Fig. 4.6

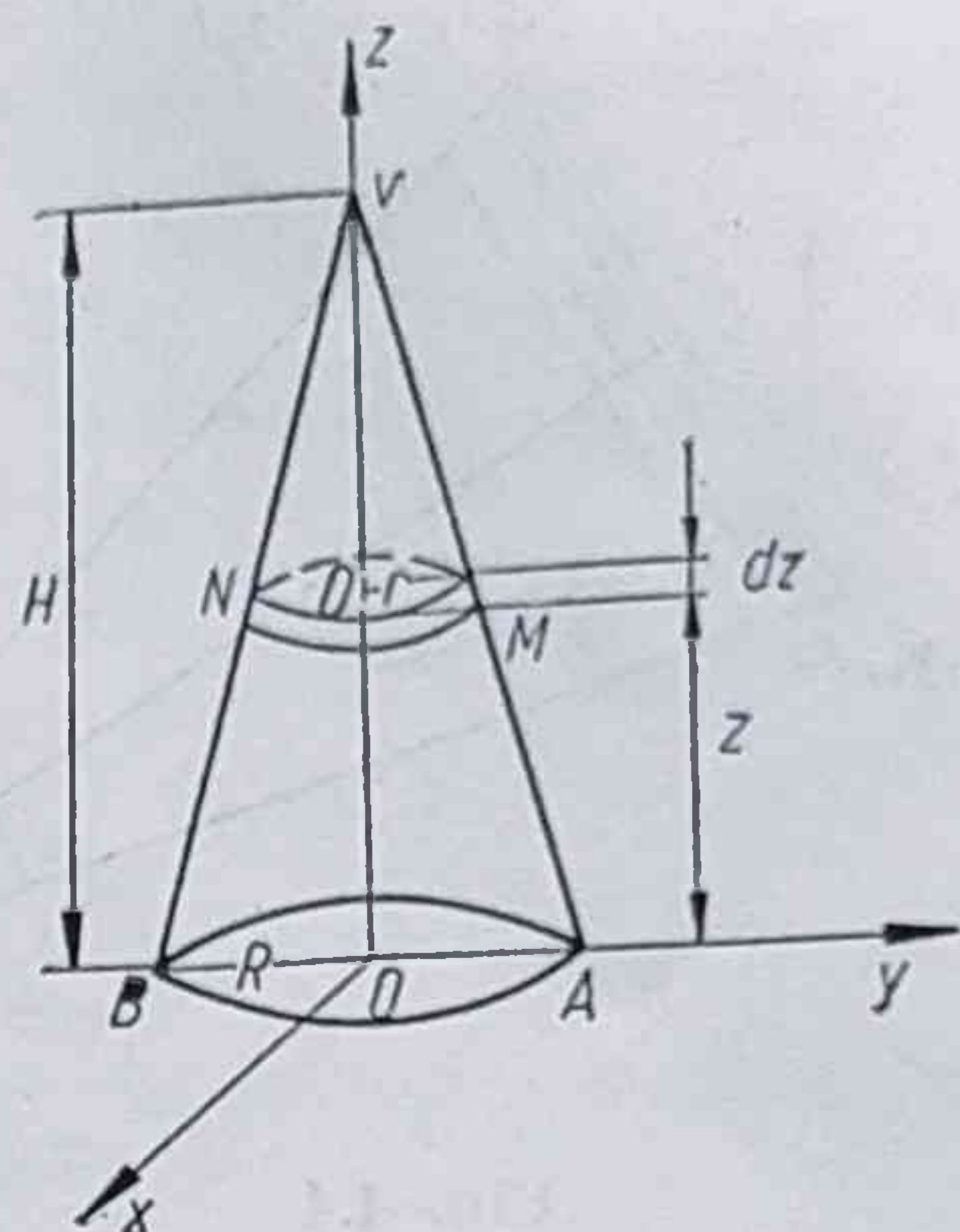


Fig. 4.7

bază al conului de înălțime H , iar axa Oz să coincidă cu axa de simetrie a conului.

Se consideră ca element de volum trunchiul de con infinitezimal obținut prin secționarea conului cu planele paralele cu baza aflate la cotele z și $z + dz$. Acesta se poate asimila drept un cilindru elementar de raza r și înălțime dz . Volumul elementar respectiv este exprimat prin relația :

$$dV = \pi \cdot r^2 \cdot dz.$$

Din asemănarea triunghiurilor VOA și VDM se obține :

$$\frac{r}{R} = \frac{H - z}{H}$$

sau :

$$r = \frac{R}{H} (H - z).$$

Coordonatele centrului de masă pentru con sînt date de relațiile :

$$x_c = 0 ; y_c = 0 ; z_c = \frac{\int_V z \cdot dV}{\int_V dV} = \frac{\int_0^H \pi \frac{R^2}{H^2} (H - z)^2 z \cdot dz}{\int_0^H \pi \frac{R^2}{H^2} (H - z)^2 \cdot dz} = \frac{H}{4}.$$

În anexa 1 sînt date relațiile pentru determinarea poziției centrelor de masă pentru cîteva figuri ce se întîlnesc uzual.

APLICAȚIA 1

Să se determine centrul de greutate la placa omogenă (hașurată) din figura 4.8.

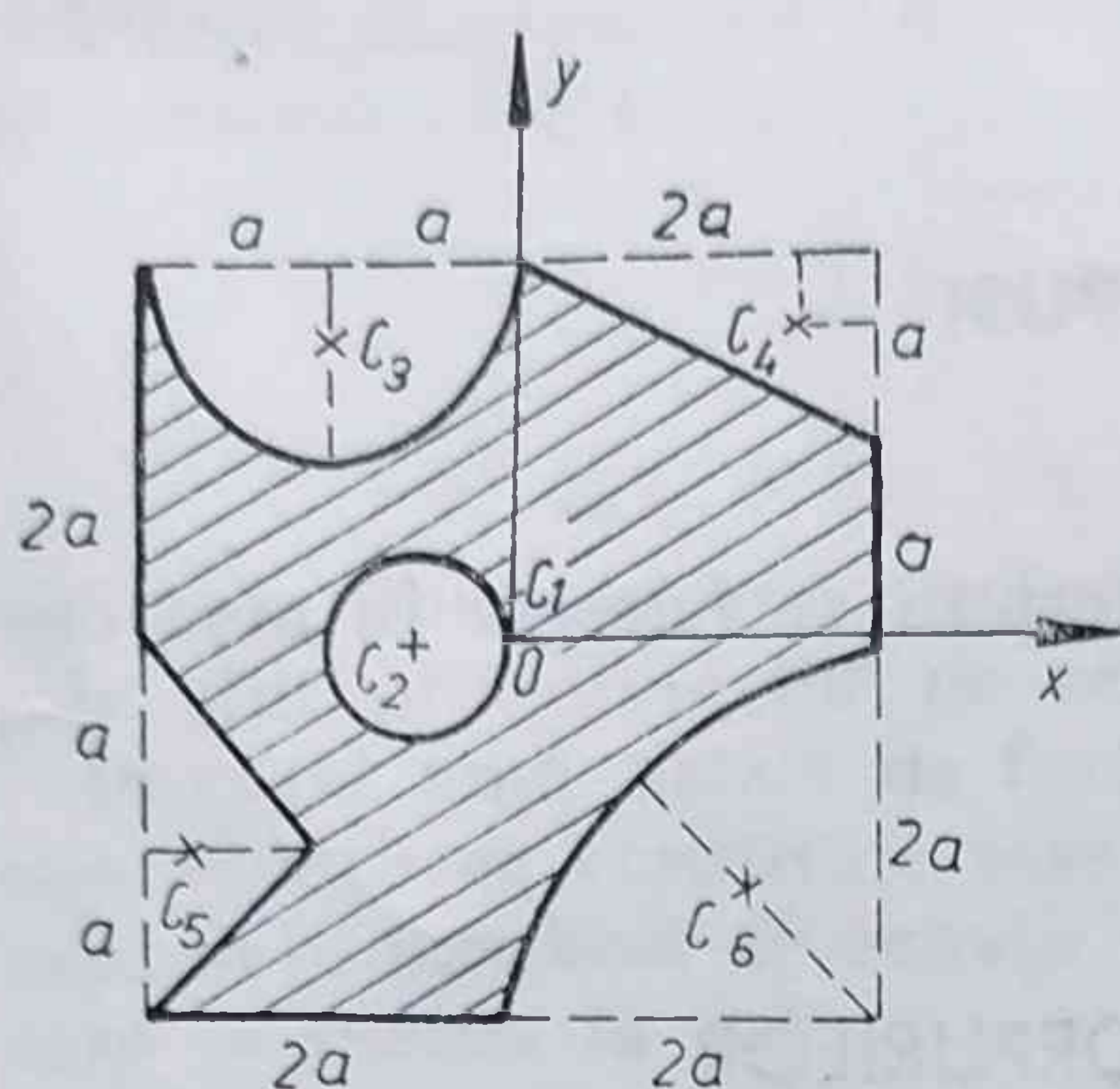


Fig. 4.8

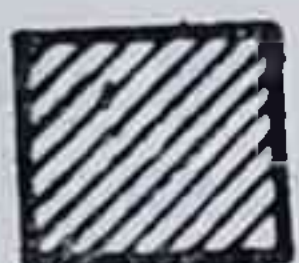


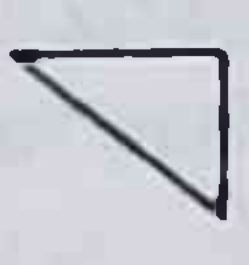
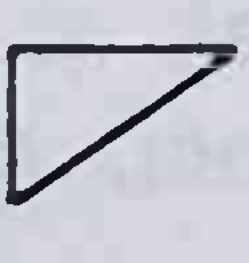
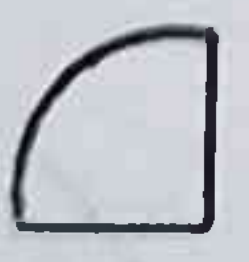
Rezolvare :

Se consideră o împărțire a plăcii, convenabilă, în suprafețe la care se cunoaște poziția centrului de greutate. Coordonatele centrului de greutate C vor fi date de formulele :

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^6 A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^6 A_i} ;$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^6 A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^6 A_i} .$$

Calcululele se fac sub formă de tabel :

Nr. crt.	Corpul x_i	y_i	A_i	$A_i \cdot x_i$	$A_i \cdot y_i$
1	 0	0	$16 a^2$	0	0
2	 $-\frac{a}{2}$	0	$-\frac{\pi \cdot a^2}{4}$	$-\frac{\pi}{8} a^3$	0
3	 $-a$	$2a - \frac{4a}{3\pi}$	$-\frac{\pi \cdot a^2}{2}$	$-\frac{\pi}{2} a^3$	$-\pi a^3 + \frac{2}{3} a^3$
4	 $\frac{4}{3} a$	$\frac{5}{3} a$	$-a^2$	$-\frac{4}{3} a^3$	$-\frac{5}{3} a^3$
5	 $-\frac{5}{3} a$	$-a$	$-a^2$	$\frac{5}{3} a^3$	a^3
6	 $2a - \frac{8a}{3\pi}$	$-\left(2a - \frac{8a}{3\pi}\right)$	$-\pi a^2$	$-2\pi a^3 + \frac{8}{3} a^3$	$2\pi a^3 - \frac{8}{3} a^3$
			$\frac{56-7\pi}{4} a^2$	$(24-11\pi) \frac{a^3}{8}$	$(3\pi-8) \frac{a^3}{8}$

$$x_c = \frac{24-11\pi}{56-7\pi} \cdot \frac{a}{2} ;$$

$$y_c = \frac{3\pi-8}{56-7\pi} \cdot \frac{a}{2} .$$

5.

5. SISTEME DE CORPURI

Pentru studiul echilibrului unui sistem de corpuri se folosesc în mod curent două metode :

- metoda izolării corpurilor ;
- metoda solidificării părților.

5.1. METODA IZOLĂRII CORPURILOR

Dacă se pune condiția ca un sistem de corpuri să fie în echilibru, atunci se poate deduce că fiecare corp în parte se află și el în echilibru.

Se consideră un sistem de corpuri oarecare ca în figura 5.1. Asupra corpurilor din sistem acționează forțele exterioare indicate în figură.

Pentru studiul condițiilor de echilibru se izolează fiecare corp în parte, se desface de legături și se introduc forțele de legătură, adică forțele de interacțiune dintre corpul studiat și corpurile învecinate. Se obține astfel,

pentru fiecare corp în parte, un corp solid rigid liber asupra căruia acționează un sistem de forțe format din forțele active exterioare ce lucrează asupra corpului și forțele de legătură care sînt forțele interioare ale sistemului ce lucrează asupra corpului respectiv. Condiția de echilibru se exprimă prin condiția ca torsiul de reducere a sistemului de forțe astfel obținut ce lucrează asupra corpului în raport cu un punct oarecare să fie nul.

Dacă se ia de exemplu corpul III din sistemul dat și se izolează (fig. 5.2) atunci, efectuînd

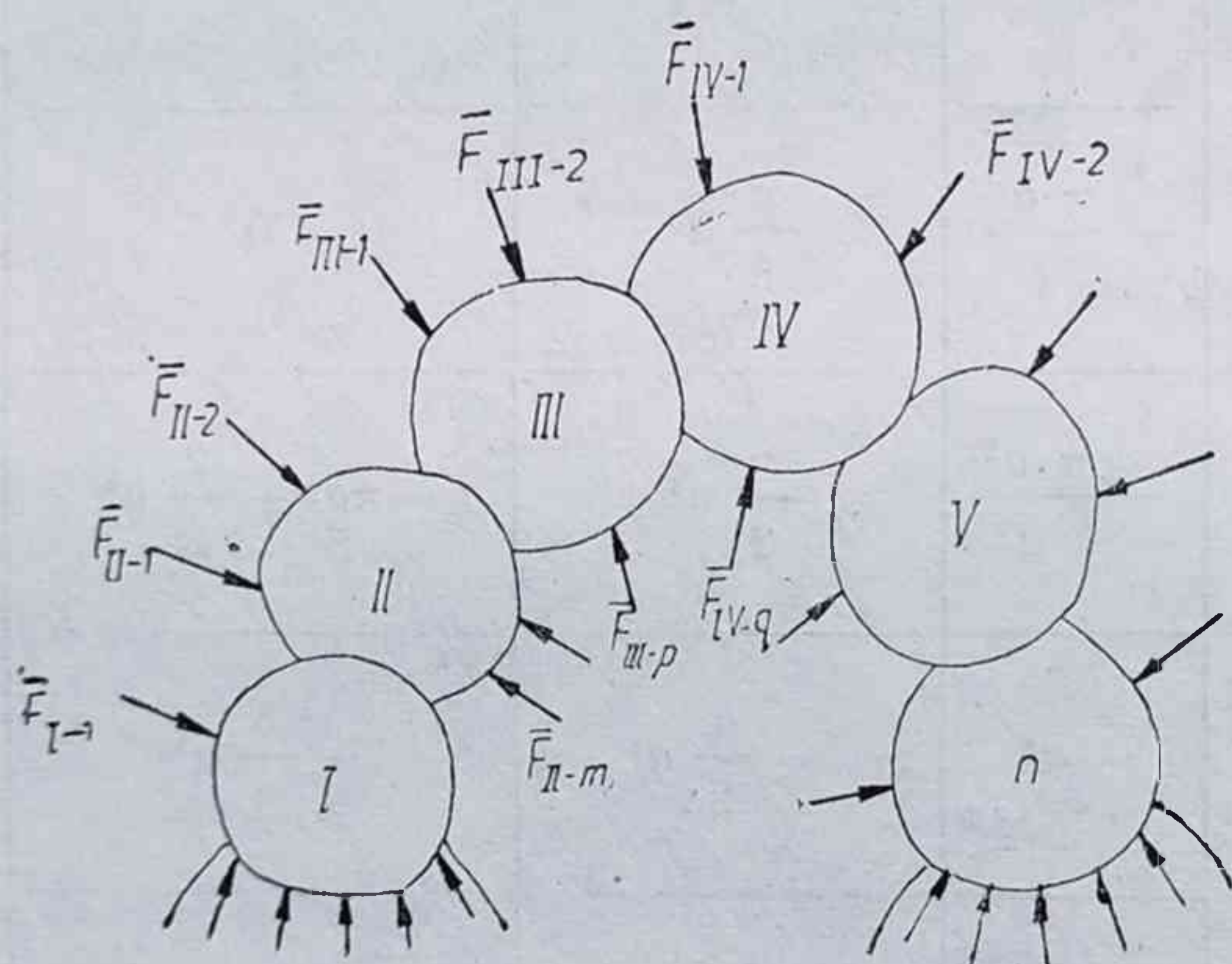


Fig. 5.1

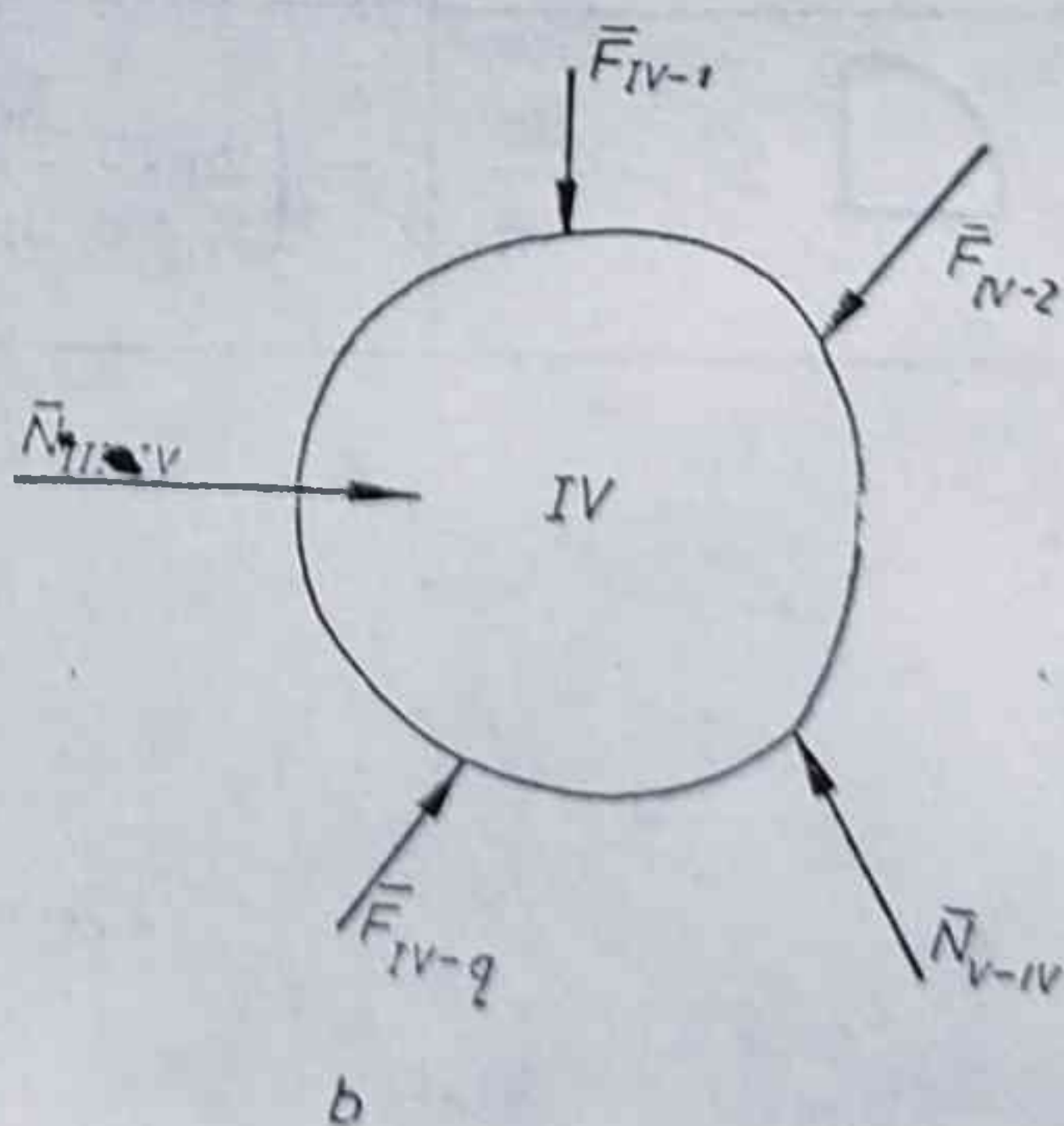
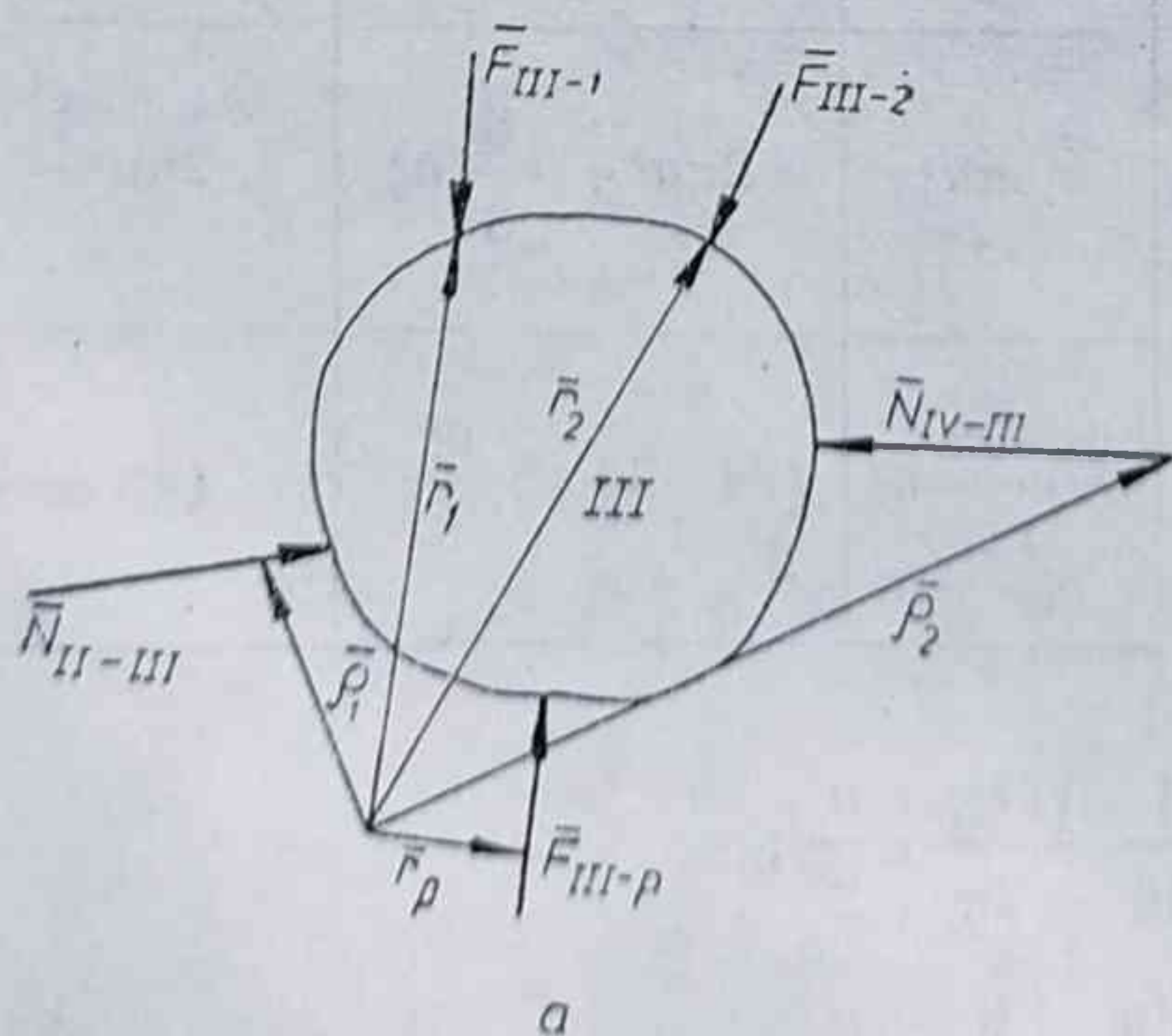


Fig. 5.2

reducerea în raport cu un punct oarecare O , se poate scrie pentru echilibru că torsorul este nul :

$$\sum_{i=1}^p \bar{F}_{III-i} + \bar{N}_{II-III} + \bar{N}_{IV-III} = 0 ;$$

$$\sum \bar{r}_i \times \bar{F}_{III-i} + \bar{\rho} \times \bar{N}_{II-III} + \bar{\rho}_2 \times \bar{N}_{IV-III} = 0.$$

Aceste două ecuații vectoriale sînt echivalente cu șase ecuații scalare care sînt proiecțiile lor pe cele trei axe ale sistemului de referință.

În cazul unui sistem de forțe oarecare în spațiu se obțin pentru un corp șase ecuații ce constituie șase condiții de echilibru. Dacă sistemul de forțe este plan, numărul de ecuații ce constituie condițiile de echilibru pentru un corp se reduce la trei.

Pentru un sistem format din n corpuri se vor obține $6n$, respectiv $3n$ ecuații, condiții de echilibru.

Este necesar a se avea în vedere respectarea principiului acțiunii și reacțiunii. Atunci cînd se trece de la un corp la corpul învecinat trebuie avut în vedere că forța interioară este egală, pe aceeași direcție și același suport, dar de sens contrar.

Deoarece ele acționează pe corpuri diferite ele nu-și fac echilibru, adică nu se anulează. De exemplu, forța \bar{N}_{IV-III} ce acționează asupra corpului III este egală și de sens contrar și pe același suport cu forța \bar{N}_{III-IV} .

5.2. METODA SOLIDIFICĂRII PĂRȚILOR

Dacă se consideră sistemul de corpuri din figura 5.1 care se află în echilibru, atunci se poate izola un grup de corpuri alăturate care se află la rîndul său în echilibru și acest grup poate fi considerat drept un corp obținut prin solidificarea lui. Se consideră, de exemplu, grupul format din corpurile II, III și IV care se consideră că formează prin solidificare un singur corp (fig. 5.3). Se disting trei categorii de forțe ce acționează asupra corpului astfel obținut :

- forțe active exterioare : \bar{F}_{II-m} , \bar{F}_{III-p} , \bar{F}_{IV-q} ;
- forțe de legătură exterioare grupului : \bar{N}_{I-II} și \bar{N}_{V-IV} ;
- forțe de legătură interioare : \bar{N}_{II-III} , \bar{N}_{III-II} , \bar{N}_{III-IV} și \bar{N}_{IV-III} .

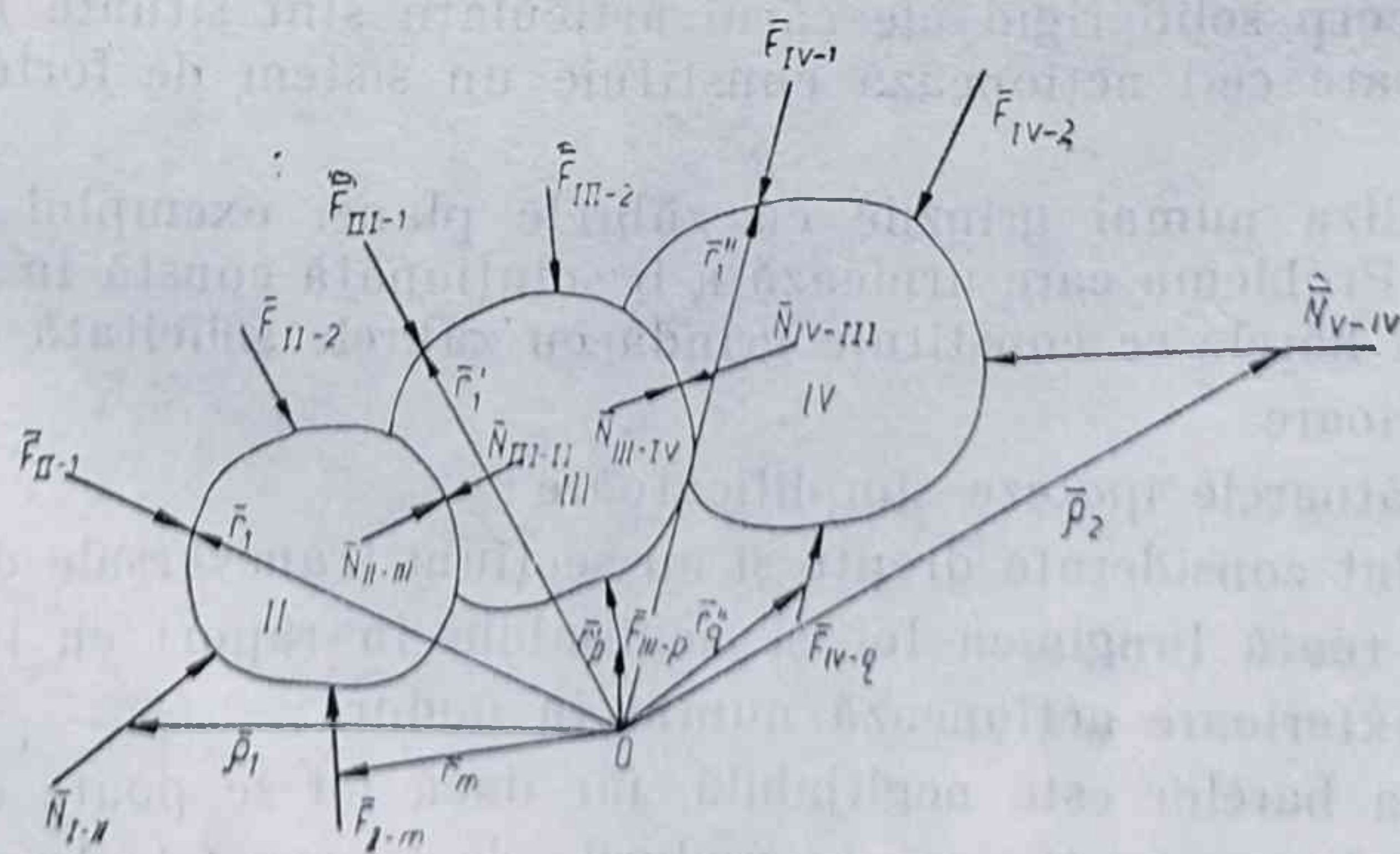


Fig. 5.3

Forțele de legătură interioare sînt două cîte două egale și de sens opus și lucrează asupra aceluiași corp obținut prin solidificarea grupului de trei corpuri, astfel că efectul lor se anulează reciproc. Se deduce că în expresia condițiilor de echilibru vor apărea numai forțele active exterioare și forțele de legătură exterioare grupului. Torsorul de reducere a sistemului de forțe astfel format în raport cu un punct oarecare trebuie să fie nul. Se poate scrie :

$$\sum \bar{F}_{II-m} + \sum \bar{F}_{III-p} + \sum \bar{F}_{IV-q} + \bar{N}_{I-II} + \bar{N}_{V-IV} = 0 ;$$

$$\sum \bar{r}_m \times \bar{F}_{II-m} + \sum \bar{r}_p' \times \bar{F}_{III-p} + \sum \bar{r}_q'' \times \bar{F}_{IV-q} + \bar{\rho}_1' \times \bar{N}_{I-II} + \bar{\rho}_2 \times \bar{N}_{V-IV} = 0.$$

Acest sistem de două ecuații vectoriale poate fi scris sub forma a șase ecuații scalare, în cazul unui sistem de forțe oarecare în spațiu, sau de trei ecuații scalare, în cazul unui sistem de forțe plane.

În caz că numărul de ecuații nu este satisfăcător, se poate proceda tot prin metoda solidificării la stabilirea condițiilor de echilibru pentru un alt grup de corpuri din sistem sau chiar la solidificarea întregului sistem de corpuri.

5.3. GRINZI CU ZĂBRELE

5.3.1. CONSIDERAȚII GENERALE

Un sistem de bare drepte articulate la capete, care formează un ansamblu rigid, poartă numele de *grindă cu zăbrele*. Punctul unde se articulează mai multe bare poartă denumirea curentă de *nod*.

Dacă ansamblul barelor articulate nu formează un corp solid rigid, atunci sistemul devine un mecanism.

În cazul grinzilor cu zăbrele se disting grinzi cu zăbrele plane și grinzi cu zăbrele spațiale.

Se numește grindă cu zăbrele plană sistemul de bare articulate care formează un corp solid rigid ale cărui articulații (noduri) sînt situate într-un singur plan, iar forțele exterioare ce acționează asupra grinzii acționează în același plan.

Se numește grindă cu zăbrele spațială sistemul de bare articulate care formează un corp solid rigid ale cărui articulații sînt situate în spațiu, iar forțele exterioare ce-l acționează constituie un sistem de forțe oarecare în spațiu.

Se vor analiza numai grinzile cu zăbrele plane, exemplul fiind indicat în figura 5.5. Problema care urmează a fi soluționată constă în determinarea eforturilor din barele ce constituie grinda cu zăbrele solicitată de un sistem de forțe exterioare.

Se fac următoarele ipoteze simplificatoare :

- barele sînt considerate drepte și au secțiuni transversale de dimensiuni constante pe toată lungimea lor și neglijabile în raport cu lungimea lor ;
- forțele exterioare acționează numai în noduri ;
- greutatea barelor este neglijabilă, iar dacă nu se poate considera neglijabilă, atunci se repartizează în nodurile de la capetele barei ;
- legăturile în noduri se consideră articulații fără frecare.

5.3.2. DETERMINAREA EFORTURILOR IN BARE

Dacă se izolează o bară oarecare (fig. 5.4), se constată că asupra barei acționează două forțe \bar{R}_1 și \bar{R}_2 la capete, în cele două articulații. Forțele \bar{R}_1 și \bar{R}_2 sînt rezultantele forțelor date și de legătura ce acționează în cele două (noduri) articulații. Deoarece se consideră că grinda din care face parte bara articulată este în echilibru, rezultă că și bara articulată considerată este tot în echilibru. Deoarece bara nu este în echilibru decît dacă cele două forțe \bar{R}_1 și \bar{R}_2 sînt egale, de sens contrar pe același suport, rezultă că bara AB este solicitată fie la întindere fie la compresiune. În cazul barei întinse bara trage de nod, iar în cazul barei comprimate bara împinge în nod. Se face convenția ca forțele de întindere să fie considerate pozitive, iar cele de compresiune negative.

Pentru determinarea eforturilor din barele grinzii cu zăbrele se folosesc diverse metode.

5.3.2.1. Metoda izolării nodurilor

Metoda se bazează pe simplul raționament că dacă întregul sistem de bare articulate și fiecare bară izolată rămîne în repaus, atunci și fiecare nod izolat rămîne în repaus, sub acțiunea forțelor exterioare și a eforturilor din barele articulate aplicate în nod.

Se determină forțele de legătură exterioare scriind condițiile de echilibru pentru întreaga grindă cu zăbrele aflată în repaus și considerată ca un corp solid rigid.

Se notează toate cele n noduri ale grinzii cu zăbrele, de exemplu cu literele A, B, C, D etc. într-o ordine anumită și se numerează și barele, ținîndu-se seama de ordinea în care au fost notate nodurile (fig. 5.5, a).

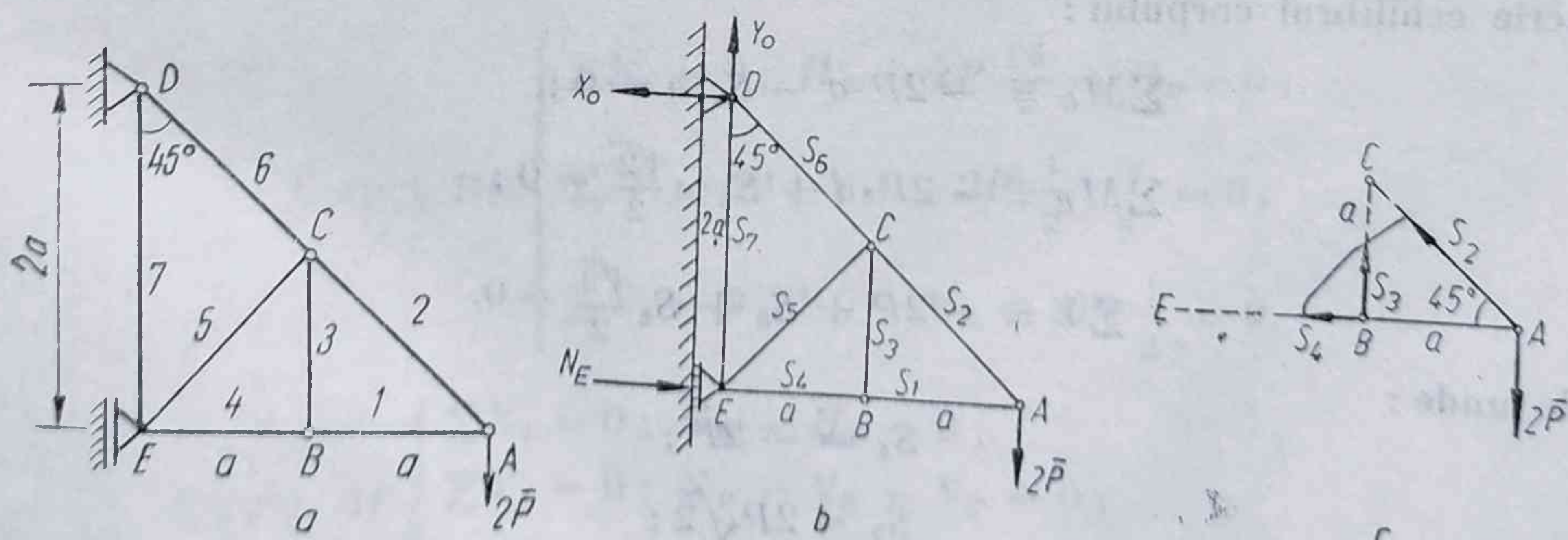


Fig. 5.5

Se izolează succesiv fiecare nod în parte, înlocuindu-se barele prin eforturi cu indicele barei respective. Deoarece în cazul unui sistem de forțe concurente plane condițiile de echilibru sînt formate de egalarea sumei proiecțiilor pe cele două axe de coordonate, deci două ecuații, rezultă că nu putem rezolva un astfel de sistem decît dacă avem cel mult două necunoscute, adică în nodul respectiv sînt două tensiuni necunoscute.

După rezolvarea sistemului de ecuații ce se formează pe un nod se trece la nodul următor. Se are în vedere că dacă din rezolvarea sistemului efortul într-o bară rezultă pozitiv, atunci efortul este de întindere și sensul ales arbitrar la început este bun, iar dacă rezultă negativ atunci el este de compresiune, iar sensul ales la început trebuie inversat astfel ca să împingă în nodurile de la capetele barei articulate.

Se procedează succesiv la fel pentru toate nodurile pînă la ultimul unde trebuie să se verifice condițiile de echilibru.

5.3.3.2. Metoda secțiunilor

În cazul metodei secțiunilor se procedează la tăierea grinzii cu zăbrele în două, astfel că se obțin două corpuri. Pentru a păstra echilibrul celor două corpuri se înlocuiesc barele tăiate prin eforturile din aceste bare pe care, deoarece nu le cunoaștem, le considerăm pozitive, adică forțe de întindere a barelor (trag de noduri).

Din condițiile de echilibru pentru un corp acționat de un sistem de forțe plane rezultă că secțiunea în grindă trebuie să taie cel mult trei bare din care cel mult două să fie concurente într-un punct.

După ce se introduc eforturile necunoscute în bare și se aplică și forțele exterioare active și de legătură cunoscute, se scriu condițiile de echilibru considerînd că fiecare din părți este în echilibru. După cum este cazul, pentru a obține ecuații mai simple se pot scrie două ecuații de proiecții și una de momente în raport cu un punct, sau două de momente și una de proiecții sau chiar trei ecuații de momente în raport cu trei noduri necoliniare.

Ca aplicație se ia în considerare grinda cu zăbrele din figura 5.5, *b*.

Se taie cu o secțiune imaginară sistemul în două, astfel ca să se secționeze barele *CA*, *CB* și *BE*, în care se face verificarea. Secțiunea nu trebuie să taie mai mult de trei bare și barele tăiate nu trebuie să aparțină aceluiași nod. Se introduc în barele secționate eforturile S_2 , S_3 și S_4 și se scrie echilibrul corpului :

$$\sum M_C \equiv -2P \cdot a - S_4 \cdot a = 0 ;$$

$$\sum M_B \equiv -2P \cdot a + S_2 \cdot a \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 ;$$

$$\sum Y \equiv -2P + S_3 + S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

de unde :

$$S_4 = -2P ;$$

$$S_2 = 2P\sqrt{2} ;$$

$$S_3 = 0.$$

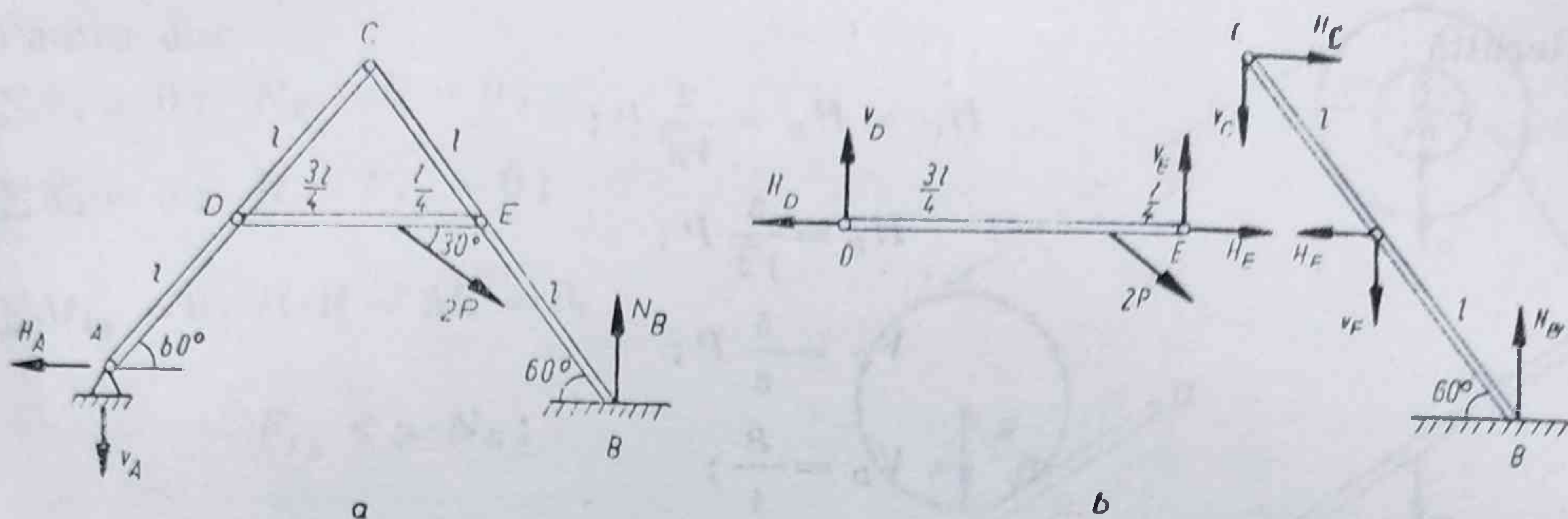


Fig. 5.6

APLICAȚIA 1

Se consideră sistemul din figură, cu greutatea și frecări neglijabile, acționat de forța exterioară $2P$ (fig. 5.6, a).

Să se determine toate forțele de legătură pentru echilibru.

Rezolvare

Se aplică metoda solidificării pentru obținerea celor trei reacțiuni exterioare sistemului N_B , V_A , H_A :

$$\sum X_i = 0; 2P \cos 30^\circ - H_A = 0.$$

$$\sum M_{i_A} = 0; N_B 4l \cos 60^\circ - 2P \sin 30^\circ \left(\frac{3l}{4} + \frac{l}{2} \right) - 2P \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \frac{\sqrt{3}}{2} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; N_B - 2P \sin 30^\circ - V_A = 0.$$

Rezultă:

$$H_A = P\sqrt{3};$$

$$N_B = \frac{11}{8} P;$$

$$V_A = \frac{3}{8} P.$$

Se izolează corpurile pentru punerea în evidență a reacțiunilor interioare, lucrându-se doar cu două corpuri, de exemplu barele DE și BC (fig. 5.6, b):

$$\text{Corpul } DE \begin{cases} \sum X_i = 0; H_E + 2P \frac{\sqrt{3}}{2} - H_D = 0; \\ \sum M_{i_D} = 0; V_E l - 2P \frac{1}{2} \cdot \frac{3l}{4} = 0; \\ \sum Y_i = 0; V_D + V_E - 2P \cdot \frac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

$$\text{Corpul } BC \begin{cases} \sum X_i = 0; H_C - H_E = 0; \\ \sum Y_i = 0; N_B - V_E - V_C = 0; \\ \sum M_{i_C} = 0; N_B 2l \cdot \frac{1}{2} - V_E l \cdot \frac{1}{2} - H_E l \frac{\sqrt{3}}{2} = 0. \end{cases}$$

Rezultă :

$$H_C = H_E = \frac{2}{\sqrt{3}} P ;$$

$$H_D = \frac{5}{\sqrt{3}} P ;$$

$$V_C = \frac{5}{8} P ;$$

$$V_D = \frac{P}{4} ;$$

$$V_E = \frac{3}{4} P .$$

APLICAȚIA 2

Se consideră sistemul format din bara de greutate G , lungime l , înclinare α și discul de greutate G și rază R (fig. 5.7, a).

Să se determine forțele de legătură și coeficienții de frecare μ de alunecare și s de rostogolire de la baza discului, pentru echilibru.

Rezolvare

Se folosește metoda izolării corpurilor, ecuațiile de echilibru fiind (fig. 5.7, b). Pentru bară :

$$\sum M_{i_0} = 0 ; N_A \frac{R}{\sin \alpha} - G \frac{l}{2} \cos \alpha = 0 ;$$

$$\sum X_i = 0 ; N_A \sin \alpha - H = 0 ;$$

$$\sum Y_i = 0 ; V - G + N_A \cos \alpha = 0 .$$

Rezultă :

$$N_A = \frac{G}{2} \frac{l}{R} \sin \alpha \cdot \cos \alpha ;$$

$$H = \frac{G}{2} \frac{l}{R} \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha ;$$

$$V = G \left(1 - \frac{l}{2R} \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \right) .$$

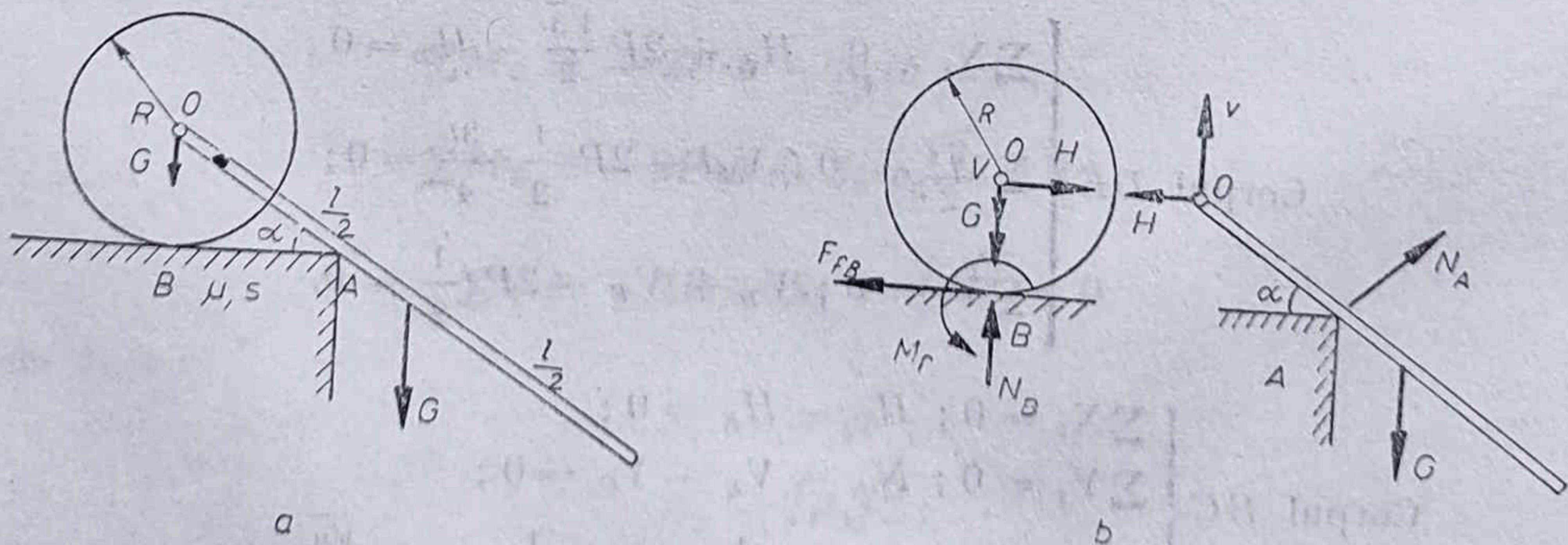


Fig. 5.7

Pentru disc :

$$\sum Y_i = 0 ; N_B - G = 0 ;$$

$$\sum X_i = 0 ; H - F_{fB} = 0 ;$$

$$\sum M_{iB} = 0 ; H \cdot R - M_r = 0,$$

$$F_{fB} \leq \mu \cdot N_B ;$$

$$M_r \leq s \cdot N_B.$$

Rezultă :

$$N_B = G ;$$

$$F_{fB} = \frac{G}{2} \cdot \frac{l}{R} \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha ;$$

$$M_r = \frac{Gl}{2} \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha ;$$

$$\mu \geq \frac{l}{2R} \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha ;$$

$$s \geq \frac{l}{2} \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha.$$

APLICAȚIA 3

Se dă sistemul din figură, cu elementele geometrice cunoscute (fig. 5.8). Să se determine toate forțele din legăturile sistemului de corpuri, precum și coeficienții de frecare μ și s de la baza discului, pentru echilibru.

Rezolvare

Se folosește metoda izolării corpurilor.

Bara O_1A (fig. 5.8, b) :

$$\sum M_{iO_1} = 0 ; T_1 \cdot 2a - P \cdot a \cdot \cos 60^\circ = 0 ; T_1 = \frac{P}{2} ;$$

$$\sum X_i = 0 ; H_1 - T_1 \sin 60^\circ = 0 ;$$

$$H_1 = \frac{P\sqrt{3}}{8} ;$$

$$\sum Y_i = 0 ; V_1 - P +$$

$$+ T_1 \cos 60^\circ = 0 ;$$

$$V_1 = \frac{7}{8} P.$$

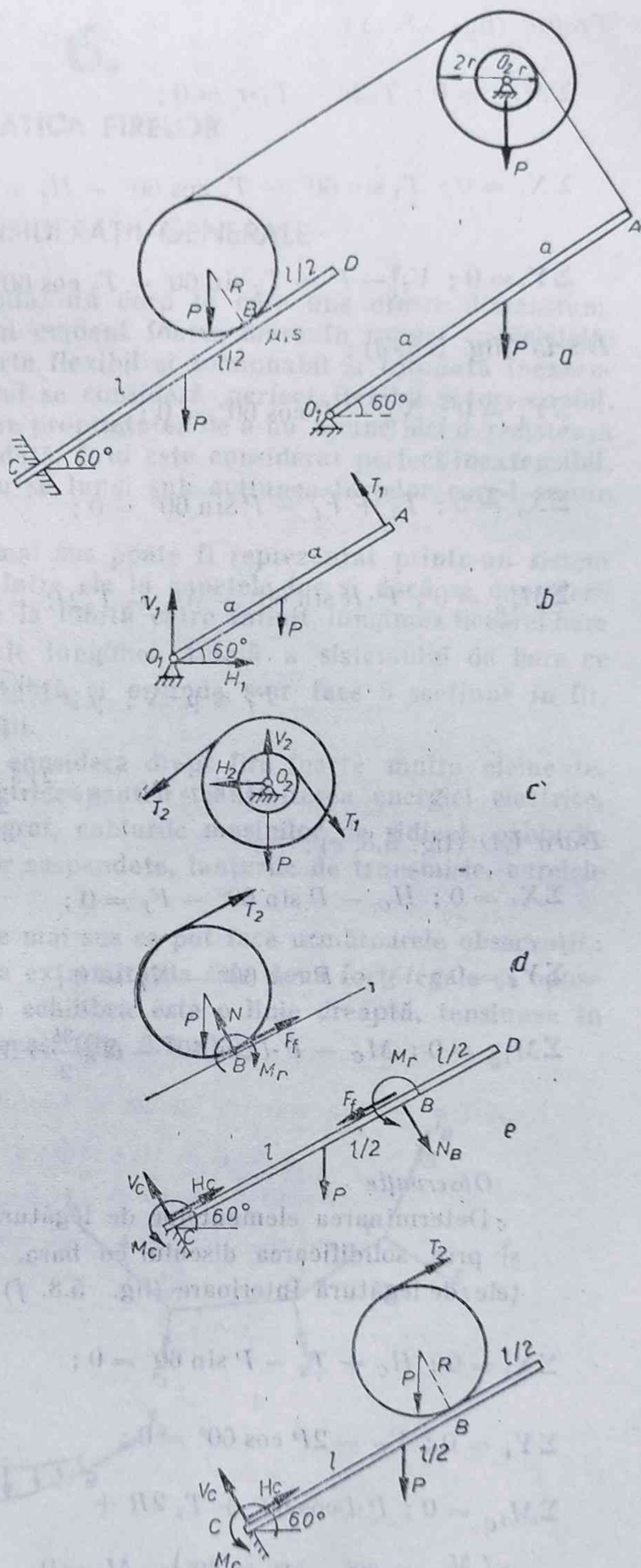


Fig. 5.8

Troliul (fig. 5.8, c) :

$$\Sigma M_{i_{02}} = 0 ; T_2 2r - T_1 \cdot r = 0 ;$$

$$T_2 = \frac{P}{8} ;$$

$$\Sigma X_i = 0 ; T_1 \sin 60^\circ - T_2 \cos 60^\circ - H_2 = 0 ; H_2 = \frac{P}{16} (2\sqrt{3} - 1) ;$$

$$\Sigma Y_i = 0 ; V_2 - P - T_2 \sin 60^\circ - T_1 \cos 60^\circ = 0 ; V_2 = \frac{P}{16} (18 + \sqrt{3}).$$

Discul (fig. 5.8, d) :

$$\Sigma Y_i = 0 ; N_B - P \cos 60^\circ = 0 ;$$

$$N_B = \frac{P}{2} ;$$

$$\Sigma X_i = 0 ; T_2 + F_f - P \sin 60^\circ = 0 ;$$

$$F_f = \frac{P}{8} (4\sqrt{3} - 1).$$

$$\Sigma M_{i_B} = 0 ; P \cdot R \sin 60^\circ - M_r - T_2 2R = 0 ; M_r = \frac{P \cdot R}{4} (2\sqrt{3} - 1).$$

$$F_f \leq \mu \cdot N ; \mu \geq \frac{4\sqrt{3} - 1}{4} ;$$

$$M_r \leq s \cdot N ; s \geq \frac{2\sqrt{3} - 1}{2} R.$$

Bara CD (fig. 5.8, e) :

$$\Sigma X_i = 0 ; H_C - P \sin 60^\circ - F_f = 0 ;$$

$$H_C = \frac{P}{8} (8\sqrt{3} - 1) ;$$

$$\Sigma Y_i = 0 ; V_C - P \cos 60^\circ - N_B = 0 ;$$

$$V_C = P ;$$

$$\Sigma M_{i_C} = 0 ; M_C - P \cdot l \cos 60^\circ - N_B \frac{3l}{2} + M_r = 0 ; M_C = \frac{P}{4} (5l + R - 2\sqrt{3} R).$$

Observație

Determinarea elementelor de legătură în încăstrarea C se putea face și prin solidificarea discului cu bara. În acest mod se eliminau forțele de legătură interioare (fig. 5.8, f) :

$$\Sigma X_i = 0 ; H_C + T_2 - P \sin 60^\circ = 0 ;$$

$$H_C = \frac{P}{8} (8\sqrt{3} - 1) ;$$

$$\Sigma Y_i = 0 ; V_C - 2P \cos 60^\circ = 0 ;$$

$$V_C = P ;$$

$$\Sigma M_{i_C} = 0 ; P \cdot l \cos 60^\circ + T_2 2R +$$

$$+ P \left(\frac{3l}{2} \cos 60^\circ - R \sin 60^\circ \right) - M_C = 0 ; M_C = \frac{P}{4} (5l + R - 2\sqrt{3} R).$$

6.

STATICA FIRELOR

6.1. CONSIDERAȚII GENERALE

Prin fir se înțelege, de regulă, un corp la care una dintre dimensiuni, lungimea, este în mod cu totul evident foarte mare în raport cu celelalte două dimensiuni, care este foarte flexibil și torsionabil și totodată inextensibil. În mecanica teoretică firul se consideră perfect flexibil și torsionabil, prin aceasta înțelegându-se că are proprietatea de a nu opune nici o rezistență când i se modifică forma. Totodată, firul este considerat perfect inextensibil, adică are proprietatea de a nu se lungi sub acțiunea forțelor care-l supun la întindere.

Conceptul de fir definit ca mai sus poate fi reprezentat printr-un sistem deformabil de bare articulate între ele la capetele lor și dacă se consideră că numărul acestor bare tinde la limită către infinit, lungimea fiecărei bare tinzând către zero, astfel încât lungimea totală a sistemului de bare ce constituie firul rămâne o constantă și oriunde s-ar face o secțiune în fir, ea ar corespunde unei articulații.

În aplicațiile tehnice se pot considera drept fire foarte multe elemente, ca, de exemplu: cablurile electrice pentru transmiterea energiei electrice, cablurile telefonice sau de telegraf, cablurile mașinilor de ridicat, cablurile funicularelor, cablurile podurilor suspendate, lanțurile de transmisie, curelele de transmisie etc.

În baza proprietăților arătate mai sus se pot face următoarele observații:

a) Dacă un fir are aplicate la extremitățile sale două forțe egale și opuse care întind firul, forma sa de echilibru este o linie dreaptă, tensiunea în fir în oricare secțiune fiind aceeași (fig. 6.1, a).

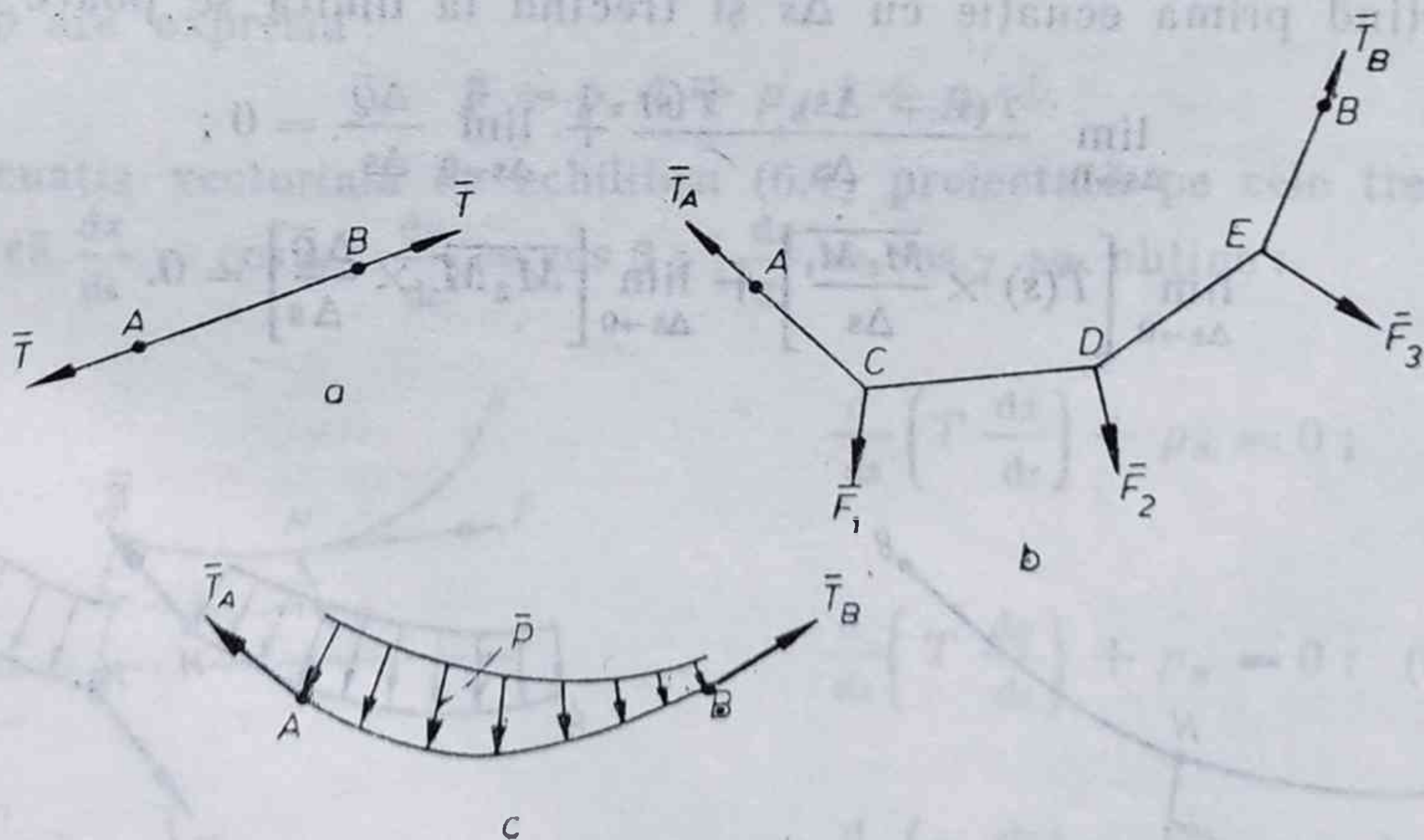


Fig. 6.1

b) Forma de echilibru a unui fir acționat de forțe concentrate este o linie poligonală (fig. 6.1, b).

c) Un fir acționat de sarcini continui are la echilibru forma unei curbe (fig. 6.1, c).

6.2. ECUAȚIA GENERALĂ A FIRELOR

Se ia în considerare un fir suspendat în două puncte A și B , avînd o încărcare oarecare repartizată pe toată lungimea firului (fig. 6.2).

Dacă se secționează firul în punctul M , se poate considera că s-a îndepărtat o articulație și că în acest punct apare o forță de legătură \bar{T} pentru porțiunea din stînga și o forță egală și opusă ($-\bar{T}$) pentru porțiunea din dreapta (fig. 6.2).

Expresia tensiunii din fir depinde de poziția punctului M determinată de coordonata curbilinie s :

$$\bar{T} = \bar{T}(s). \quad (6.1)$$

Problemele ce se pun la studiul echilibrului firului sînt:

- determinarea formei firului la echilibru;
- determinarea tensiunii într-un punct oarecare al firului.

Pentru a efectua acest studiu se consideră (fig. 6.3) un element din fir M_1M_2 de lungime infinit mică Δs , asupra căruia acționează:

- o sarcină exterioară \bar{p} sub forma unei sarcini repartizate pe unitatea de lungime, rezultanta acesteia fiind $\Delta\bar{Q} = \bar{p} \cdot \Delta s$;
- forțele de legătură din punctele M_1 și M_2 de mărimi ($-\bar{T}$) și respectiv, $\bar{T} + \Delta\bar{T}$.

Ecuatiile de echilibru pentru elementul de fir sînt date de expresia torzorului de reducere în raport cu un punct oarecare, de exemplu punctul M_2 :

$$(\Sigma \bar{F} = 0): \quad -\bar{T}(s) + \bar{T}(s + \Delta s) + \Delta\bar{Q} = 0; \quad (6.2)$$

$$(\Sigma \bar{M} = 0): \quad \overline{M_2M_1} \times [-\bar{T}(s)] + \overline{M_2M} \times \Delta\bar{Q} = 0.$$

Împărțind prima ecuație cu Δs și trecînd la limită se poate scrie:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\bar{T}(s + \Delta s) - \bar{T}(s)}{\Delta s} + \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{Q}}{\Delta s} = 0; \quad (6.3)$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\bar{T}(s) \times \frac{\overline{M_2M_1}}{\Delta s} \right] + \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\overline{M_2M} \times \frac{\Delta\bar{Q}}{\Delta s} \right] = 0.$$

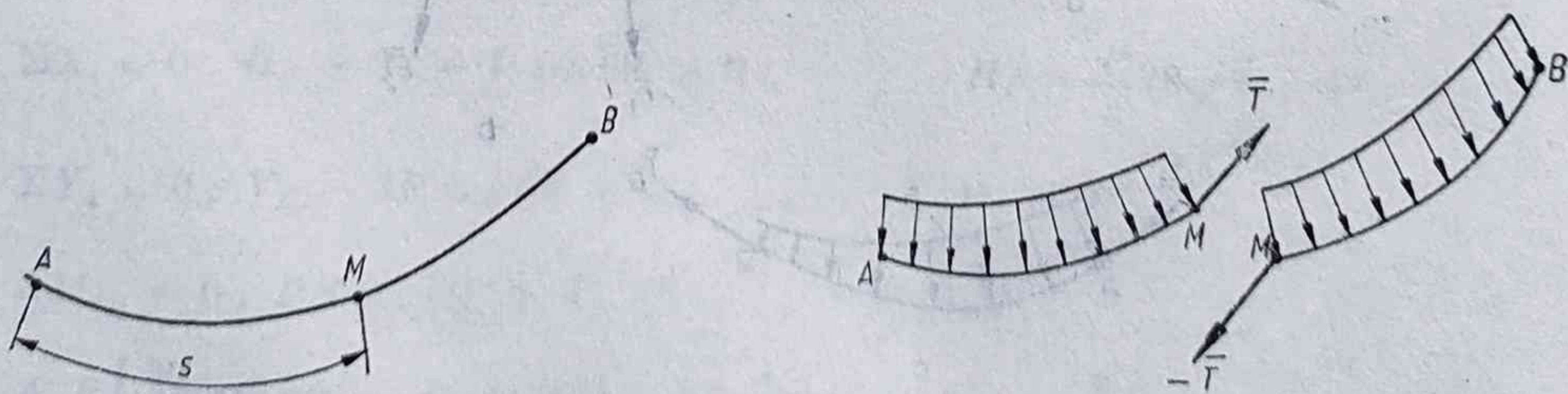


Fig. 6.2

Se observă că :

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\overline{M_1 M_2}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$$

este tocmai versorul tangentei la curba firului, și :

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \overline{M_2 M} = 0.$$

Cele două ecuații de echilibru capătă expresiile :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0 ; \vec{T}(s) \times \vec{\tau} = 0. \quad (6.4)$$

A doua ecuație se mai poate scrie :

$$\vec{T}(s) = T \cdot \vec{\tau}.$$

Se poate trage concluzia importantă că tensiunea în orice punct al firului este tangentă la curba de echilibru a firului în acest punct.

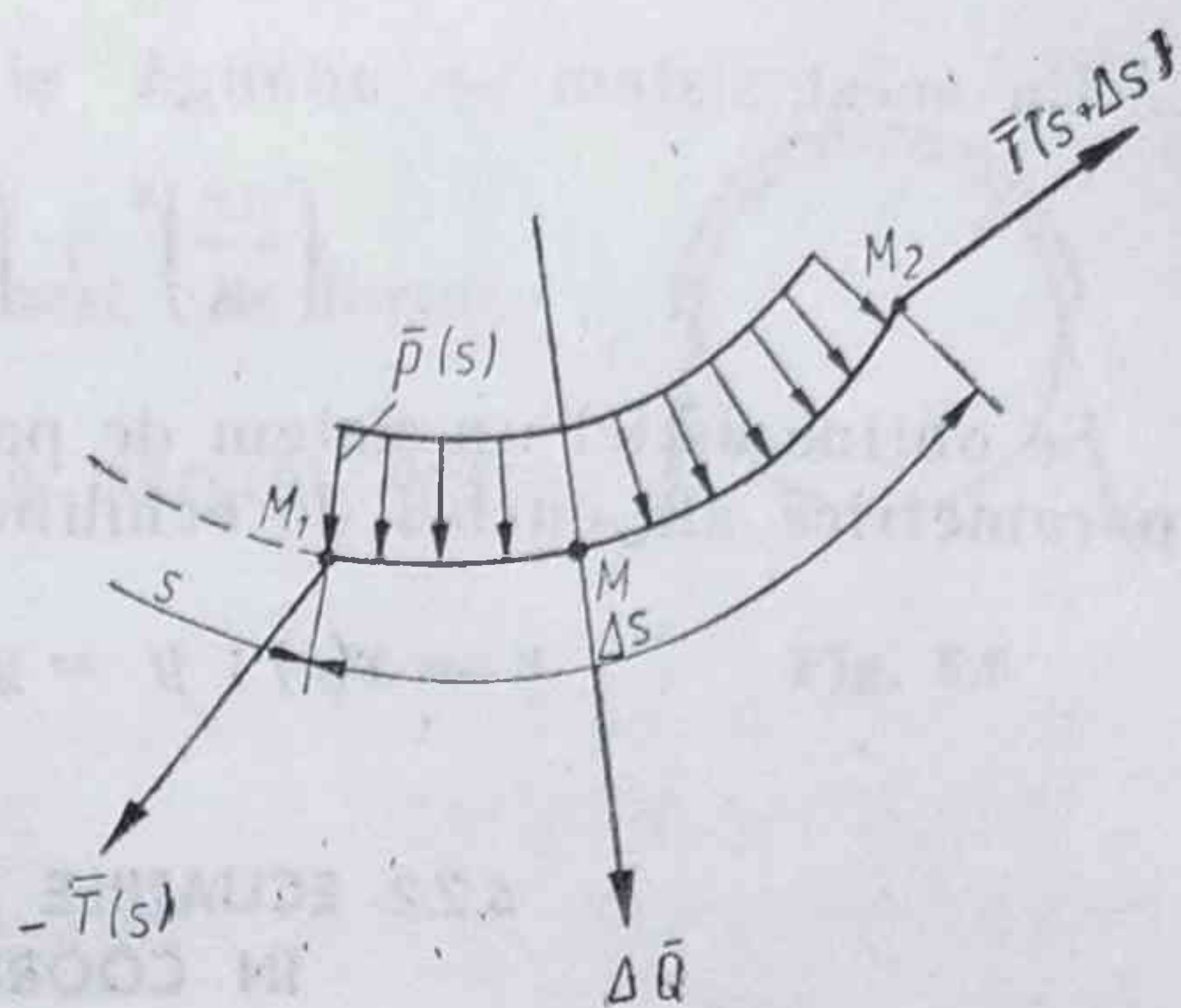


Fig. 6.3

6.2.1. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE FIRELOR ÎN SISTEMUL DE COORDONATE CARTEZIAN

Ecuatiile vectoriale stabilite mai sus pot fi exprimate scalar în raport cu un sistem de referință cartezian $Oxyz$ (fig. 6.4).

Se notează cu x, y, z coordonatele unui punct oarecare M al firului și cu α, β, γ unghiurile pe care le face tangenta la curba de echilibru cu axele sistemului de referință.

Sarcina repartizată pe unitatea de lungime \vec{p} are componentele după cele trei axe p_x, p_y și p_z . Cu aceste notații expresia tensiunii într-un punct al firului se poate scrie :

$$\vec{T} = T \cdot \vec{\tau} = T \cos \alpha \cdot \vec{i} + T \cos \beta \cdot \vec{j} + T \cos \gamma \cdot \vec{k}; \quad (6.5, a)$$

sarcina \vec{p} are expresia :

$$\vec{p} = p_x \cdot \vec{i} + p_y \cdot \vec{j} + p_z \cdot \vec{k}. \quad (6.5, b)$$

Din ecuația vectorială de echilibru (6.4) proiectată pe cele trei axe, observînd că $\frac{dx}{ds} = \cos \alpha$; $\frac{dy}{ds} = \cos \beta$; $\frac{dz}{ds} = \cos \gamma$ se obține :

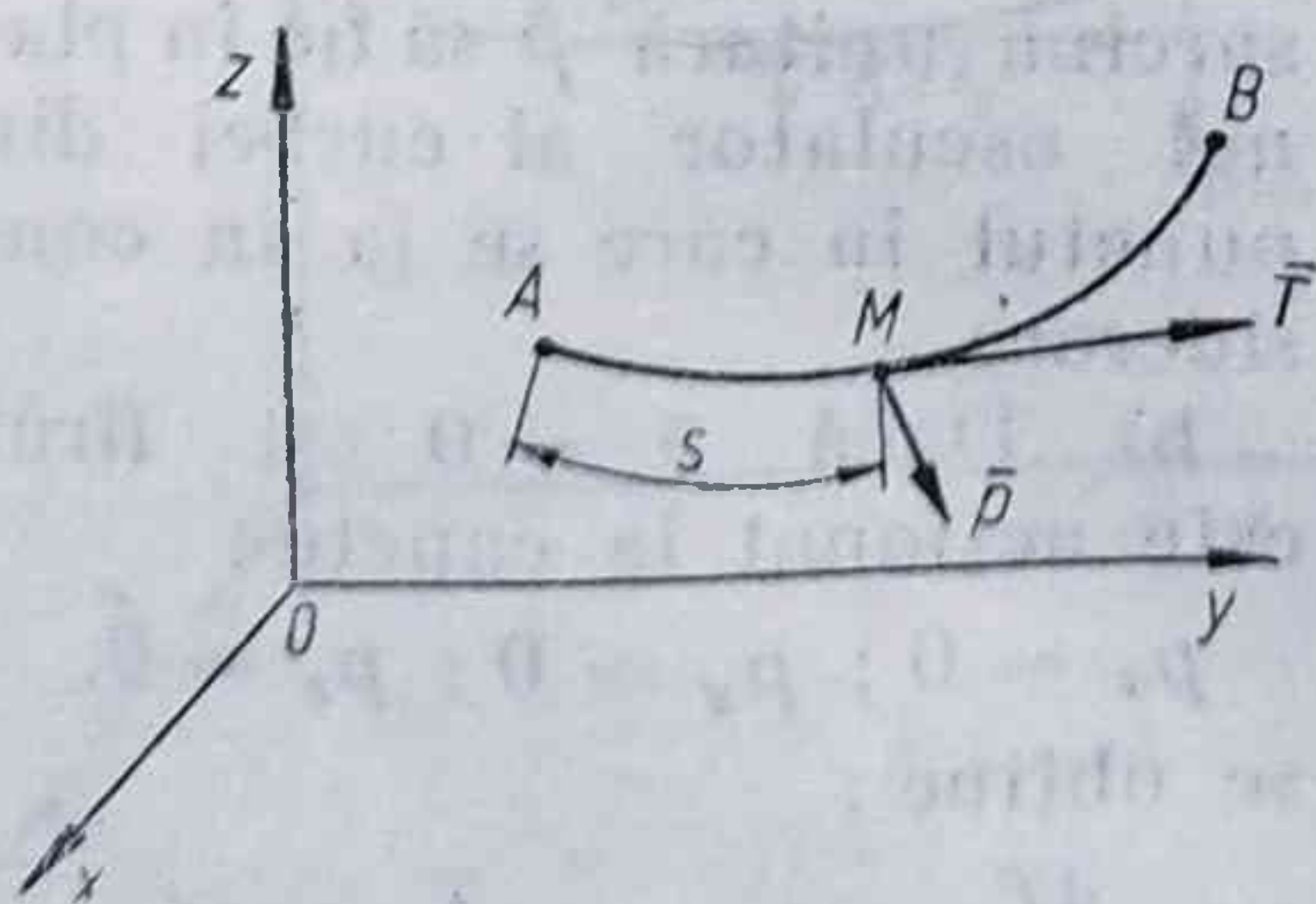


Fig. 6.4

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + p_x = 0 ;$$

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + p_y = 0 ; \quad (6.6, a, b, c)$$

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) + p_z = 0.$$

La acest sistem se adaugă și condiția geometrică :

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1. \quad (6.6. d)$$

Se obține astfel un sistem de patru ecuații din care se pot deduce ecuațiile parametrice ale curbei de echilibru a firului și expresia tensiunii în fir $\bar{T}(s)$

$$x = x(s) ; y = y(s) ; z = z(s) ; \bar{T} = \bar{T}(s). \quad (6.7)$$

6.2.2. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE FIRELOR ÎN COORDONATE INTRINSECI

În unele aplicații practice este nevoie să se proiecteze ecuația de echilibru pe un sistem de referință legat de punctul în care se face secțiunea firului. Un astfel de sistem de referință îl formează triedrul lui Frenet, compus din trei axe după : tangenta la fir, normala și binormala în punctul respectiv.

Poziția punctului pe fir este definită de lungimea arcului $\overline{AM} = s$, măsurat de la originea arcelor A (fig. 6.5).

Se notează cu $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ versorii acestor trei axe. Tensiunea în fir este exprimată prin vectorul :

$$\bar{T} = T \cdot \bar{\tau}.$$

Derivând expresia tensiunii din fir în raport cu variabila s se obține :

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = \frac{dT}{ds} \cdot \bar{\tau} + T \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{dT}{ds} \bar{\tau} + \frac{T}{\rho} \bar{\nu}, \quad (6.8, a)$$

unde ρ este raza de curbură a curbei de echilibru a firului în punctul M .

Sarcina cu care este încărcat firul se poate exprima, față de acest sistem, sub forma :

$$\bar{p} = p_{\tau} \cdot \bar{\tau} + p_{\nu} \cdot \bar{\nu} + p_{\beta} \cdot \bar{\beta}. \quad (6.8, b)$$

Ecuația vectorială de echilibru (6.2) proiectată pe cele trei axe ale triedrului Frenet conduce la sistemul de ecuații :

$$\frac{dT}{ds} + p_{\tau} = 0 ; \quad \frac{T}{\rho} + p_{\nu} = 0 ; \quad p_{\beta} = 0. \quad (6.9)$$

Observații

a) Forma de echilibru a firului trebuie să fie astfel încât sarcina unitară \bar{p} să fie în planul osculator al curbei din punctul în care se ia în considerare.

b) Dacă $\bar{p} = 0$ și firul este acționat la capete :

$p_x = 0 ; p_y = 0 ; p_z = 0$,
se obține :

$$\frac{dT}{ds} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{T}{\rho} = 0.$$

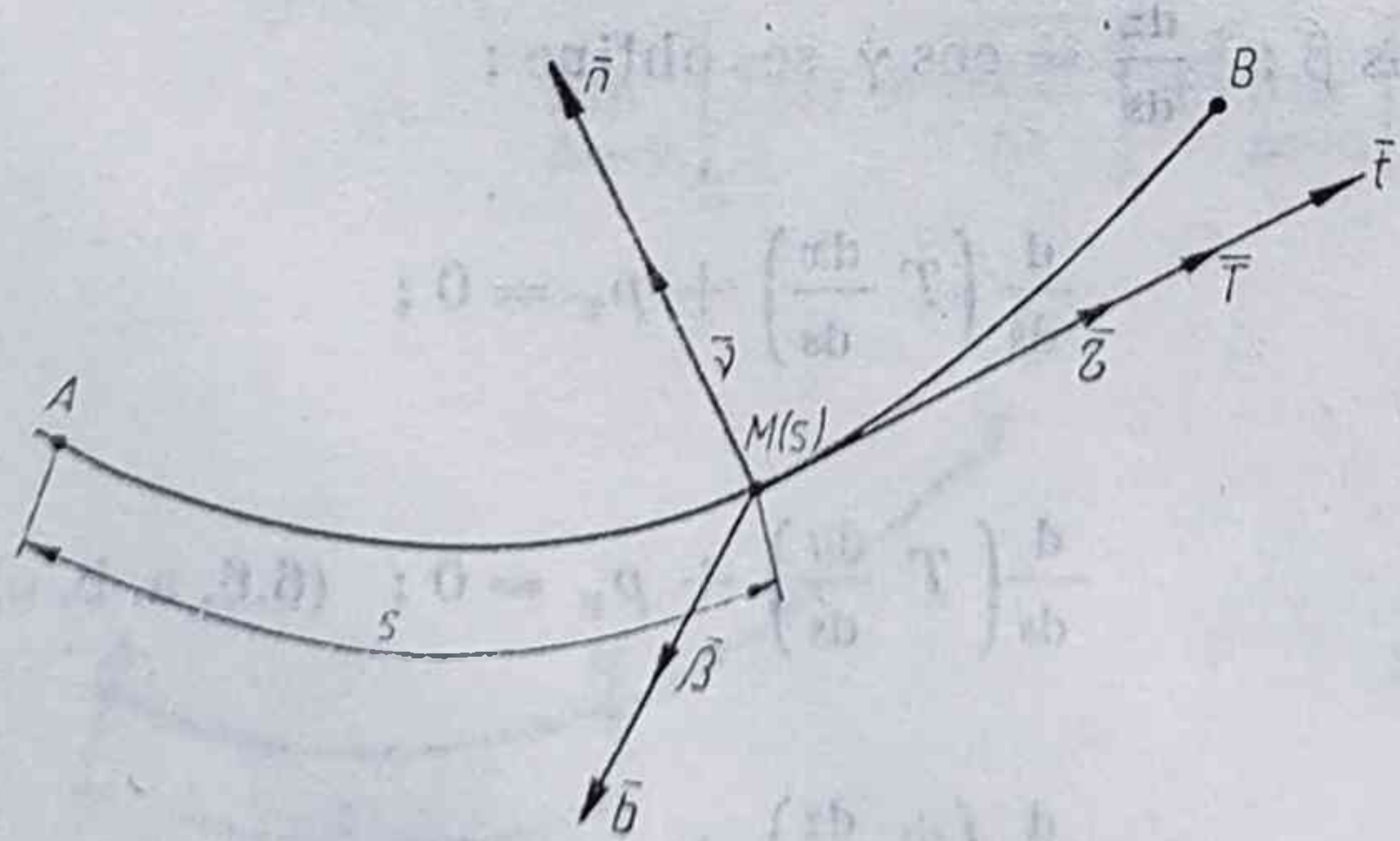


Fig. 6.5

Rezultă :

$$T = \text{const} ; \rho = \infty.$$

Din acest rezultat se reține că în acest caz forma de echilibru a firului este o dreaptă.

c) Dacă firul este acționat numai de sarcini normale, adică :

$$p_\tau = 0 ; p_v \neq 0 \text{ și } p_\beta = 0,$$

rezultă :

$$\frac{dT}{ds} = 0 ; \quad \frac{T}{\rho} = -p_v$$

și se deduce :

$$T = -p_v \cdot \rho = \text{constant}.$$

În acest caz se reține că tensiunea în fir este o constantă. Această situație se întâlnește curent în aplicațiile practice când firul este de greutate neglijabilă și este întins pe o suprafață curbă perfect netedă. În acest caz tensiunea aplicată la un capăt al firului este transmisă cu aceeași valoare, la celălalt capăt (fig. 6.6).

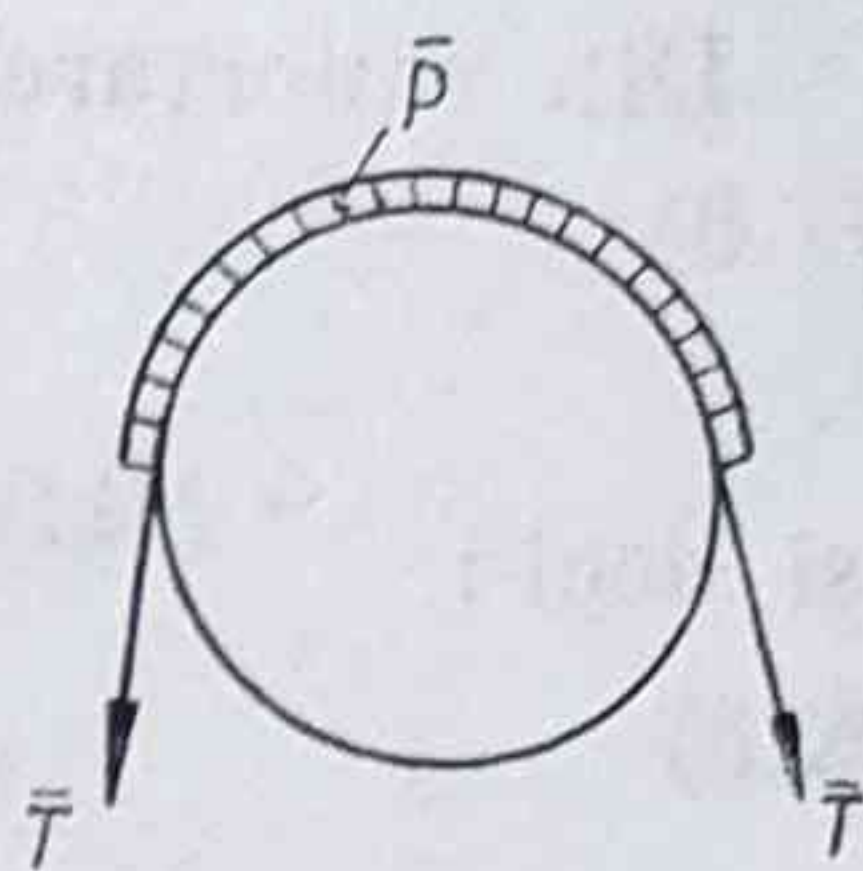


Fig. 6.6

6.2.3. CAZUL FIRULUI OMOGEN GREU. LĂNȚIȘORUL

În aplicațiile practice curente se pune problema determinării formei curbei de echilibru a unui fir omogen acționat numai de greutatea proprie și susținut în două puncte A și B. Greutatea proprie \bar{p} pe unitatea de lungime a firului se consideră constantă în lungul firului omogen. Lungimea L a firului este cunoscută.

Se consideră un sistem de referință trirectangular $Oxyz$ în care axa Oy este verticală (fig. 6.7).

Coordonatele punctelor A și B sînt cunoscute.

Ecuatiile vectoriale de echilibru (6.2), raportate în acest caz la sistemul de referință ales, conduc la sistemul :

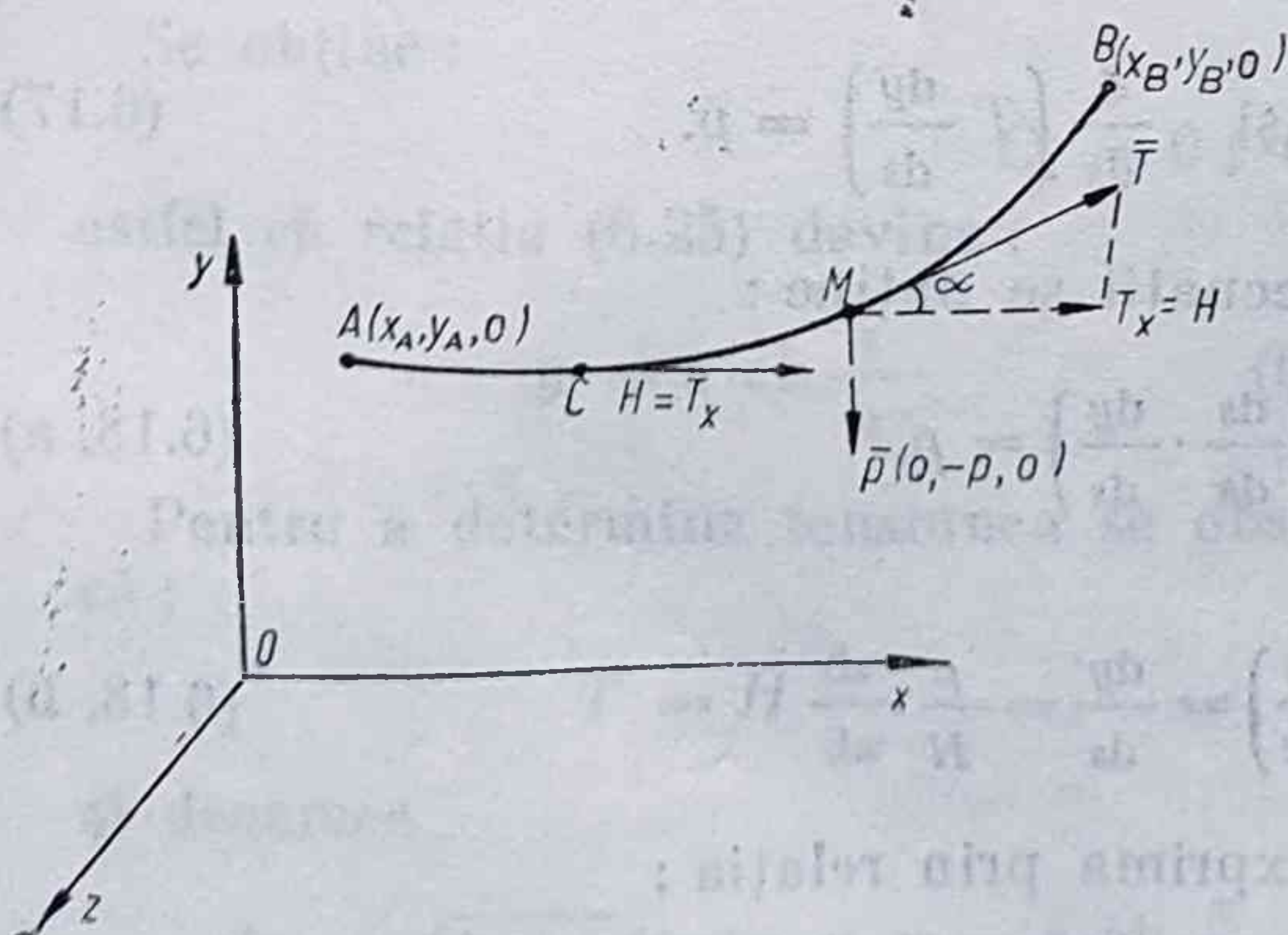


Fig. 6.7

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) &= 0 ; \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) - p &= 0 ; \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Din prima și ultima ecuație, prin integrare, se obține sistemul :

$$T \frac{dx}{ds} = H ; \quad T \frac{dz}{ds} = C_1. \quad (6.11)$$

Din raportarea lor rezultă ecuația diferențială :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{C_1}{H} \quad (6.12)$$

și deci :

$$z = \frac{C_1}{H} x + C_2. \quad (6.13)$$

Această curbă se află în planul vertical.

Valorile constantelor C_1 și C_2 se obțin din condiția ca valorile coordonatelor punctelor A și B de fixare a firului să verifice ecuația de mai sus. Se poate scrie :

$$\frac{C_1}{H} x_A + C_2 = 0 \quad \frac{C_1}{H} x_B + C_2 = 0. \quad (6.14)$$

Rezultă :

$$C_1 = C_2 = 0$$

și deci ecuația devine :

$$z = 0 \quad (6.15)$$

și rezultă că firul se află în poziție de echilibru în planul vertical Oxy care trece prin aceste puncte de suspensie.

Din prima ecuație a sistemului (6.10) se deduce că proiecția tensiunii T pe orizontală este constantă în orice punct al firului, mărimea ei fiind dată de expresia :

$$T_x = T \frac{dx}{ds} = T \cos \alpha = H. \quad (6.16)$$

Pe baza acestei observații se poate trage concluzia că în punctul C tangenta la curba de echilibru a firului este orizontală, tensiunea în fir este minimă și egală cu proiecția tensiunii dintr-un punct oarecare pe orizontala determinată mai sus, adică $T_c = H$.

Folosind primele două ecuații din sistemul (6.10) se poate obține ecuația curbei de echilibru a firului :

$$T \frac{dx}{ds} = H \quad \text{și} \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = p. \quad (6.17)$$

Eliminînd pe T din cele două ecuații se obține :

$$\frac{d}{ds} \left(H \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dy}{ds} \right) = p, \quad (6.18, a)$$

ceea ce se mai poate scrie :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy'}{ds} = \frac{p}{H}. \quad (6.18, b)$$

Elementul de arc ds se poate exprima prin relația :

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx.$$

Ecuatia (6.18, b) devine :

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{p}{H}. \quad (6.19)$$

În vederea integrării se poate face schimbarea de variabilă :

$$y' = \operatorname{sh} u \text{ și observînd că } y'' = \operatorname{ch} u \cdot u', \quad (6.20)$$

se obține :

$$\frac{\operatorname{ch} u \cdot u'}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}} = \frac{p}{H} \text{ sau : } u' = \frac{p}{H}. \quad (6.21)$$

Integrînd această ecuație diferențială se obține :

$$u = \frac{p}{H} x + C_1. \quad (6.22)$$

Ținînd seama de relația (6.20) se poate scrie :

$$y' = \operatorname{sh} \left(\frac{p}{H} x + C_1 \right), \quad (6.23)$$

și prin integrare se obține curba de echilibru a firului omogen greu :

$$y = \frac{H}{p} \operatorname{ch} \left(\frac{p}{H} x + C_1 \right) + C_2 \quad (6.24)$$

Dacă se notează $\frac{H}{p} = a$ se poate scrie :

$$y = a \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} + C_1 \right) + C_2. \quad (6.25)$$

Această ecuație este cunoscută sub numele de *ecuația lăncșorului*. Constantele C_1 și C_2 se determină dacă se cunosc anumite condiții particulare.

Pentru exemplificare se poate considera un fir (fig. 6.8) caracterizat prin condițiile particulare

$$x = 0 ; y = a ; x = 0 ; y' = 0$$

(punctul C se află pe axa Oy).

Se obține :

$$C_1 = 0 ; C_2 = 0$$

astfel că relația (6.25) devine :

$$y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}. \quad (6.26)$$

Pentru a determina tensiunea se observă că :

$$T = H \frac{ds}{dx},$$

și deoarece

$$ds = \sqrt{1+y'^2} \cdot dx \text{ și } y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

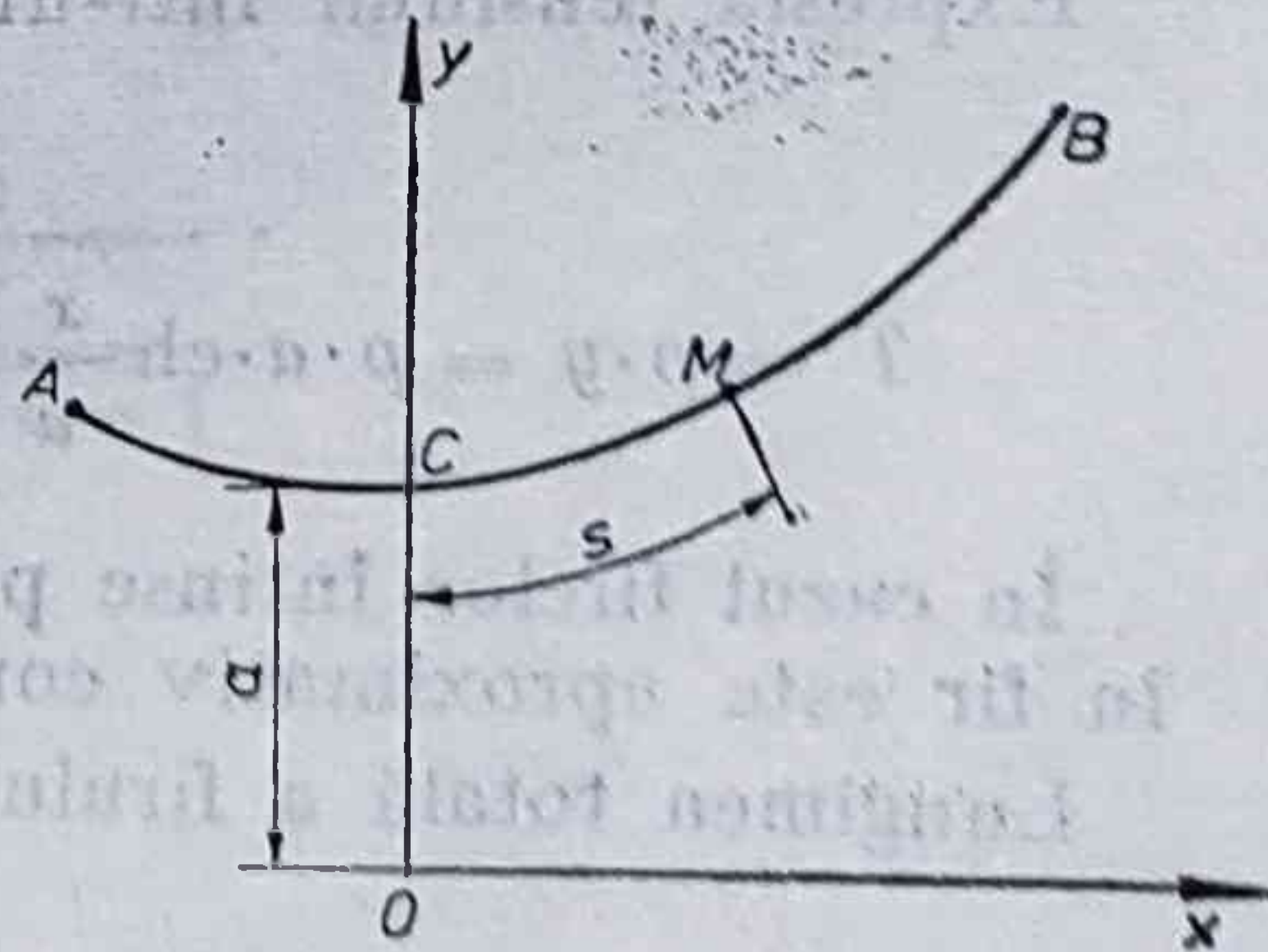


Fig. 6.8

se obține :

$$T = H \sqrt{1 + y'^2} = H \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} = H \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{H}{a} a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a} = p \cdot y. \quad (6.27)$$

Lungimea arcului de lăntişor \widehat{CM} măsurat din vârful C pînă la un punct oarecare M de pe fiecare abscisă x este dată de relația :

$$s = \int_0^x ds = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx = \int_0^x \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} \cdot dx = \int_0^x \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

6.2.4. ECUAȚIILE APROXIMATIVE ALE FIRELOR

În aplicațiile practice curente se întâlnește, de foarte multe ori, cazul firelor suspendate în două puncte A și B destul de depărtate între ele, firul fiind puternic întins și cu săgeți f la vîrf foarte mici. Acest caz corespunde firelor telefonice sau rețelilor de distribuție a electricității.

Se poate observa că, în acest caz, tensiunea în fir fiind mare și tensiunea minimă H este foarte mare în comparație cu sarcina unitară p și ca atare parametrul $a = \frac{H}{p}$ este foarte mare, dar raportul $\frac{x}{a}$ devine foarte mic.

Dezvoltînd în serie ecuația curbei lăntişorului se obține :

$$y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a} - a = a \left(1 + \frac{\frac{x^2}{a^2}}{2!} + \frac{\frac{x^4}{a^4}}{4!} + \dots \right) - a \cong \frac{x^2}{2a};$$

$$y \cong \frac{x^2}{2a}.$$

În concluzie, în cazul firelor foarte întinse, acționate de greutatea proprie, forma curbei de echilibru poate fi asimilată cu cea a unei parabole (fig. 6.9). Pentru a exprima ecuația curbei în funcție de lungimea firului l și de săgeata admisă f se pune condiția ca pentru $x = \frac{l}{2}$ să avem $y = f$ și rezultă $f = \frac{l^2}{8a}$, de unde :

$$a = \frac{l^2}{8f} \quad \text{și} \quad y = \frac{4f}{l^2} x^2.$$

Expresia tensiunii într-un punct oarecare al firului este dată de relația :

$$T = p \cdot y = p \cdot a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a} = p \cdot a \left(1 + \frac{\frac{x^2}{a^2}}{2!} + \frac{\frac{x^4}{a^4}}{4!} + \dots \right) \cong p \cdot a = \frac{p \cdot l^2}{8f}.$$

În cazul firelor întinse puternic acționate de greutatea proprie, tensiunea în fir este aproximativ constantă de-a lungul firului.

Lungimea totală a firului este dată de relația :

$$L = l + \frac{8f^2}{3l}.$$

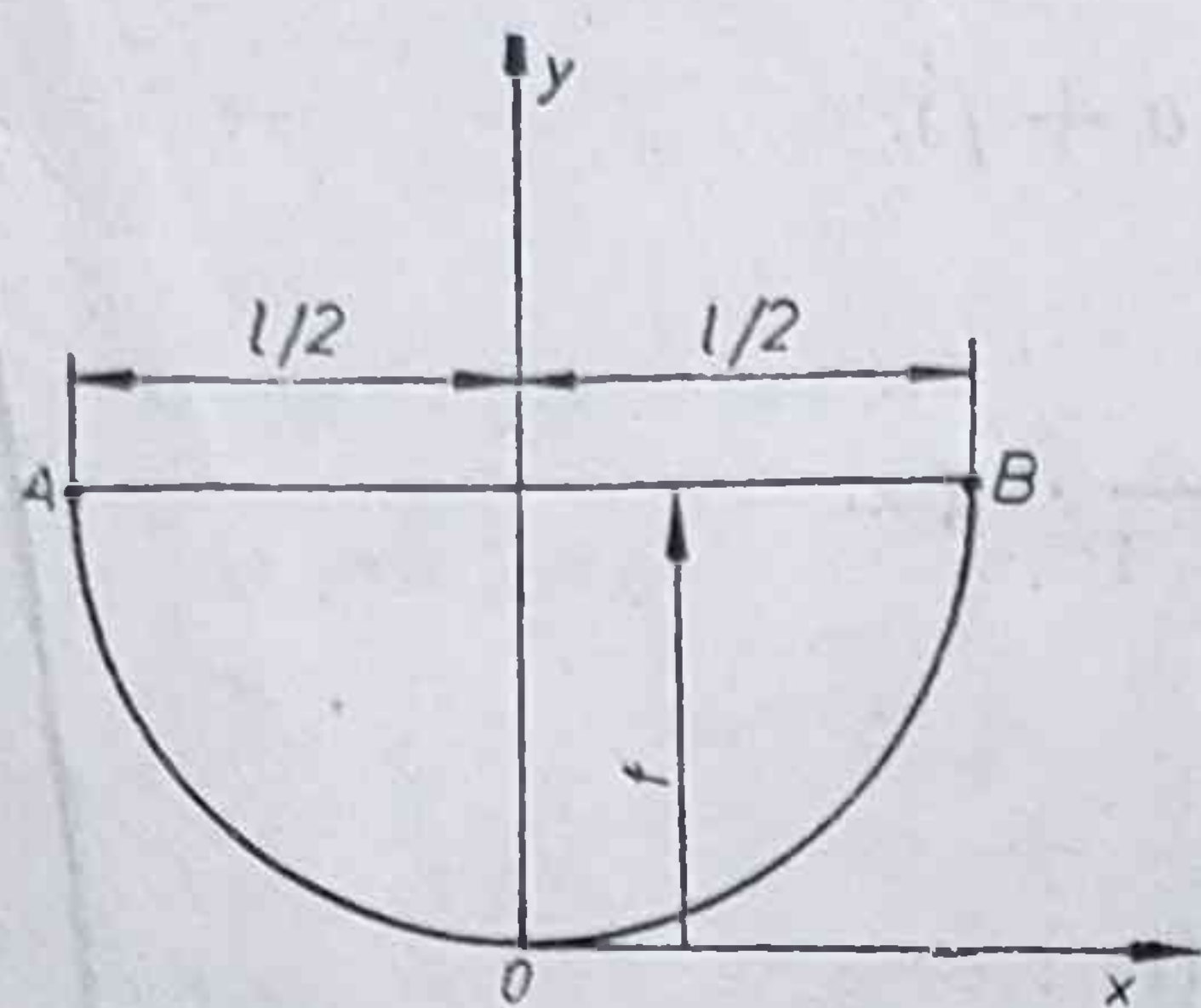


Fig. 6.9

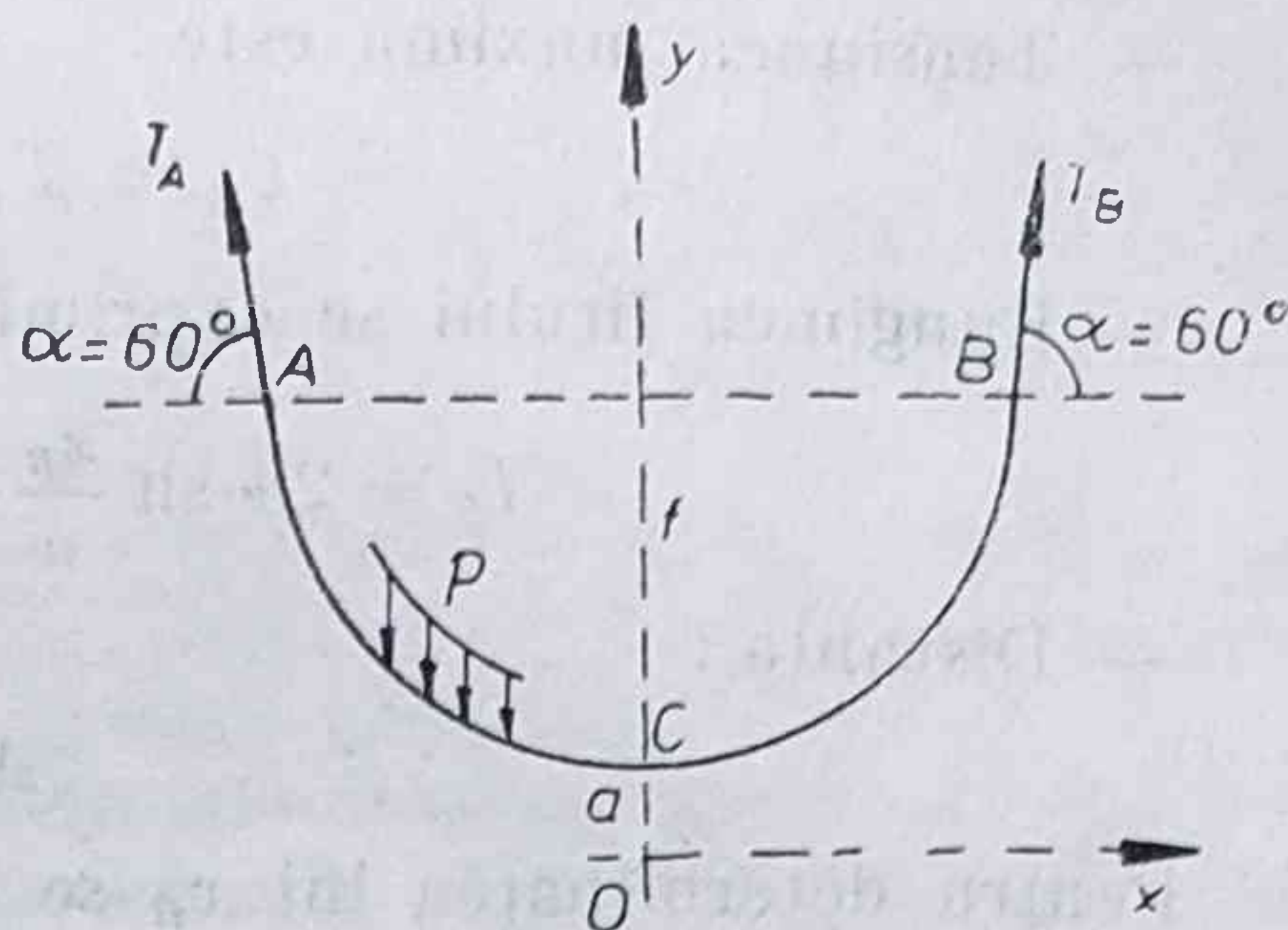


Fig. 6.10

APLICAȚIA 1

Un fir omogen cu greutatea unității de lungime p , este suspendat cu cele două capete la același nivel, unghiul făcut de direcția tensiunii în punctul de suspendare cu orizontala fiind α , iar săgeata fiind f .

Să se determine ecuația firului, tensiunea maximă și minimă, lungimea firului și distanța AB între punctele de suspendare (fig. 6.10).

Rezolvare

Ecuația firului este dată de $y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

În punctul B :

$$a + f = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x_B}{a}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_B}$$

deci:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sh} \frac{x_B}{a},$$

atunci:

$$\operatorname{ch} \frac{x_B}{a} = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x_B}{a}} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

rezultă:

$$a = \frac{f}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - 1},$$

deci ecuația firului este:

$$y = \frac{f}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - 1} \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{\frac{f}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - 1}}.$$

Tensiunea se determină cu formula:

$$T = p \cdot y.$$

— Tensiunea minimă este:

$$H = T_e = p \cdot a = \frac{p \cdot f}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - 1};$$

— Tensiunea maximă este :

$$T_A = T_B = p \cdot y_B = p(a + f).$$

— Lungimea firului se exprimă prin :

$$L = 2a \cdot \operatorname{sh} \frac{x_B}{a} = 2 \cdot \frac{f}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - 1} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

— Distanța :

$$AB = 2x_B.$$

Pentru determinarea lui x_B se utilizează relația :

$$\operatorname{ch} \frac{x_B}{a} + \operatorname{sh} \frac{x_B}{a} = e^{\frac{x_B}{a}},$$

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha = e^{\frac{x_B}{a}}$$

De unde :

$$x_B = a \ln (\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha})$$

iar :

$$AB = 2 \frac{f}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - 1} \ln (\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}).$$

Partea a II-a

CINEMATICA

În capitolul de cinematică se studiază mișcarea mecanică fără a ține seama de mase și de forțe. Ca urmare, cinematica are o strînsă corelare cu geometria, pe care o consideră desfășurată în timp.

În cinematică se scot în evidență noțiunile fundamentale de spațiu și timp. Spațiul considerat în mecanica clasică este absolut, euclidian și tridimensional, iar timpul este un parametru scalar, absolut și continuu crescător. Timpul este independent de spațiu și de orice altă mărime.

Mișcarea pentru a fi studiată și exprimată printr-o relație matematică este necesar să fie raportată la un sistem de referință care este presupus în mod convențional fix sau un sistem de referință inerțial.

Capitolul de cinematică are rolul de a pregăti relațiile de bază necesare pentru a fi folosite în capitolul de dinamică, în care studiul se lărgeste introducînd în relații și corelațiile ce există între mase, forțe și elementele mișcării.

7.

CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

Mișcarea mecanică a corpurilor este cea mai simplă formă de mișcare a materiei și ea se manifestă prin schimbarea, în decursul timpului, a poziției corpului material în raport cu sistemul de referință ales, pentru a rezolva cît mai convenabil problemele practice legate de mișcarea mecanică a corpurilor respective.

În cinematică se studiază mișcarea punctului sau a corpului, corelînd aspectul geometric al mișcării cu noțiunea și mărimea de timp. În acest mod se realizează o exprimare matematică a asocierii dintre poziția punctului și timpul în care se află această poziție, precum și o asociere a deplasării mobilului cu timpul, stabilindu-se astfel o corespondență biunivocă între modificarea poziției și variația timpului. Ca urmare, rezultă o deplasare continuă și unică oglindind mișcarea mecanică și evidențiind principalele ei caracteristici cinematice : traiectoria, pozițiile punctelor în spațiu în funcție de timp, distribuția de viteze, distribuția de accelerații etc.

Caracteristicile mișcării punctului

Expresiile matematice ale caracteristicilor cinematice ale mișcării depind de sistemul de referință față de care se raportează mișcarea. Caracteristicile cinematice permit recunoașterea și determinarea elementelor principale necesare la rezolvarea anumitor probleme concrete de mișcare. În marea majoritate, problemele de cinematică se grupează mai mult în jurul următoarelor caracteristici cinematice :

— legea mișcării, adică expresia matematică care determină poziția mobilului față de sistemul de referință ales și funcție de timp ;

- traiectoria sau expresia matematică a locului geometric pe care-l formează pozițiile succesive pe care le ocupă mobilul în spațiu și în decursul desfășurării timpului ;
- legea vitezelor sau expresia matematică a vitezei în funcție de timp ;
- legea accelerațiilor sau expresia matematică a variației vitezei în funcție de timp.

7.1. STUDIUL MIȘCĂRII PUNCTULUI ÎN COORDONATE CARTEZIENE

7.1.1. ECUAȚIILE MIȘCĂRII

Dacă se raportează spațiul la un sistem de axe $Oxyz$, de coordonate carteziene (fig. 7.1) triortogonal și se studiază mișcarea unui punct, coordonatele acestuia sînt funcții de timp și se exprimă prin ecuații de forma :

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t), \quad (7.1)$$

sau cu ajutorul unei funcții vectoriale de forma :

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}. \quad (7.2)$$

Ecuațiile (1) se mai numesc și ecuațiile parametrice ale mișcării punctului și în fond constituie expresia matematică a poziției punctului în spațiu la un anumit moment t .

În foarte multe aplicații practice expresia matematică a coordonatelor x , y , z este dată în funcție de un alt parametru, de regulă geometric, un unghi sau o lungime, care depinde de timp, astfel că ecuațiile devin :

$$x = f_1(\lambda); \quad y = f_2(\lambda); \quad z = f_3(\lambda), \quad (7.3)$$

unde :

$$\lambda = \lambda(t)$$

este funcție de timp.

7.1.2. TRAIECTORIA

Locul geometric al pozițiilor succesive pe care un punct material le ocupă, în timpul mișcării sale, se numește traiectoria punctului.

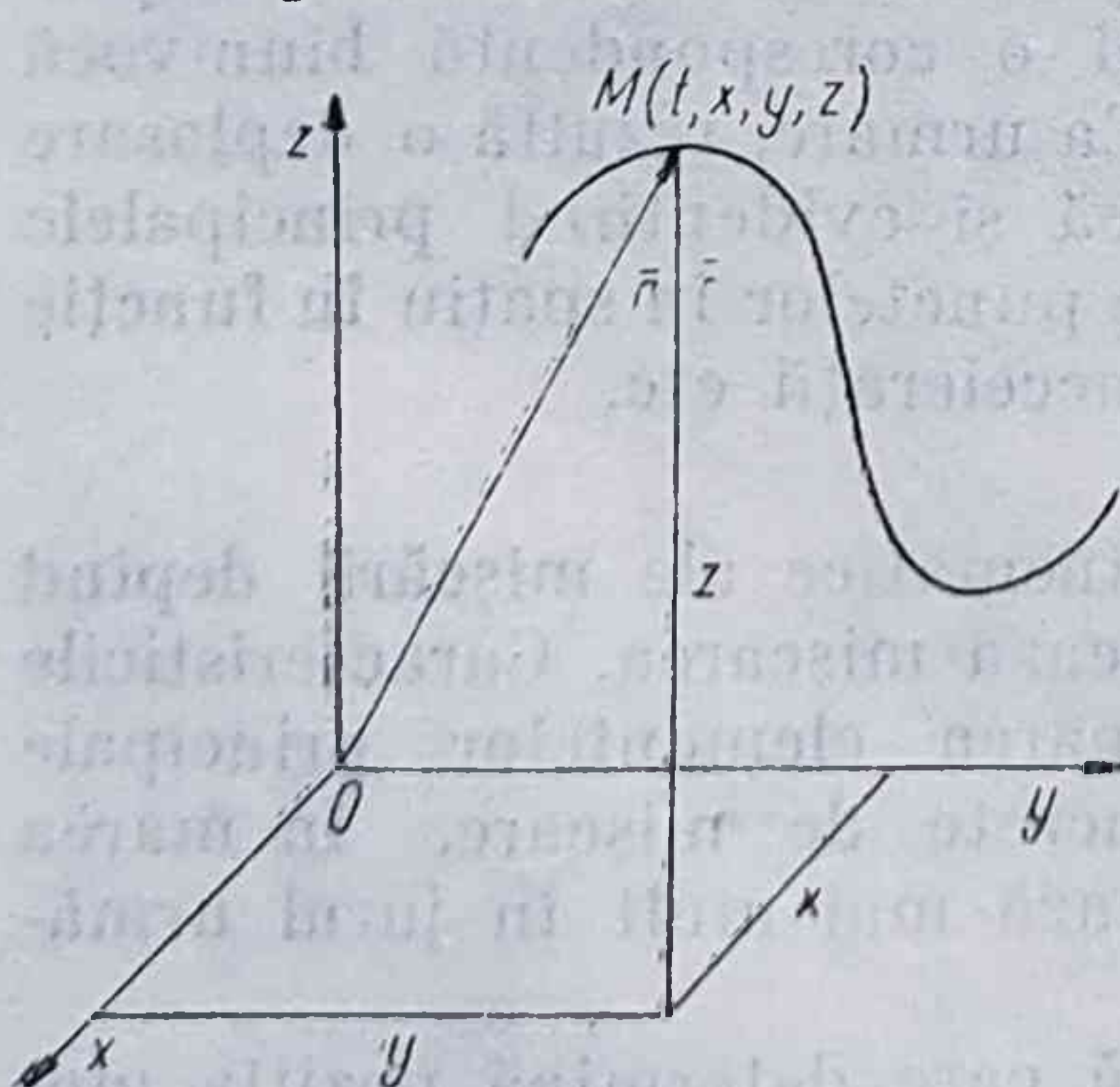


Fig. 7.1

Expresia matematică a traiectoriei punctului se poate prezenta și sub forma ecuațiilor parametrice ale mișcării.

Ecuația traiectoriei exprimată sub forma carteziană se obține prin eliminarea parametrului variabil $\lambda = \lambda(t)$ sau t , obținându-se expresii de forma :

$$\varphi_1(x, y, z) = 0; \quad \varphi_2(x, y, z) = 0 \quad (7.4)$$

care constituie două suprafețe ce se intersectează după o curbă, care este tocmai traiectoria căutată a punctului mobil.

7.1.3. VITEZA INSTANTANEE A PUNCTULUI MOBIL

Se consideră punctul mobil M care se mișcă pe o curbă C (fig. 7.2), poziția sa fiind la timpul t în M , iar în momentul următor $t + \Delta t$, în M' , cele două poziții fiind determinate de vectorii de poziție $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ și $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$.

Dacă se consideră cazul în care arcul $\widehat{MM'}$ de pe traiectorie, descris de punctul mobil în intervalul de timp Δt , este destul de mic, atunci expresia vitezei medii a punctului M este dată de relația :

$$v_m = \frac{\widehat{MM'}}{\Delta t} = \frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad (7.5, a)$$

lungimea arcului $\widehat{MM'}$ fiind aproximativ egală cu lungimea coardei $\overline{MM'}$.

În cazul în care variația de timp Δt este foarte mică și tinde către zero, poziția punctului M' tinde să coincidă cu punctul M . În acest caz, secanta $\overline{MM'}$ devine tangentă la curba C în punctul M , iar viteza medie devine viteza instantanee a punctului M și are expresia :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}, \quad (7.5, b)$$

sau :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}.$$

Este demnă de reținut observația că viteza instantanee este un vector tangent la traiectorie în punctul respectiv.

Mărimea vitezei punctului M este dată de expresia :

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad (7.5, c)$$

iar direcția vectorului viteză este determinată de cosinusurile directoare :

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|}; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|}; \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{|\vec{v}|}. \quad (7.5, d)$$

7.1.4. ACCELERAȚIA INSTANTANEE A PUNCTULUI MOBIL

Prin definiție, accelerația medie \vec{a}_m a unui punct mobil M în intervalul de timp t și $t + \Delta t$ este vectorul care are punctul de aplicație în punctul respectiv M ,

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad (7.6, a)$$

mărimea $\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$, iar direcția și sensul sînt identice cu cele ale vectorului $\Delta\vec{v}$, de creștere a vitezei \vec{v} în intervalul de timp Δt .

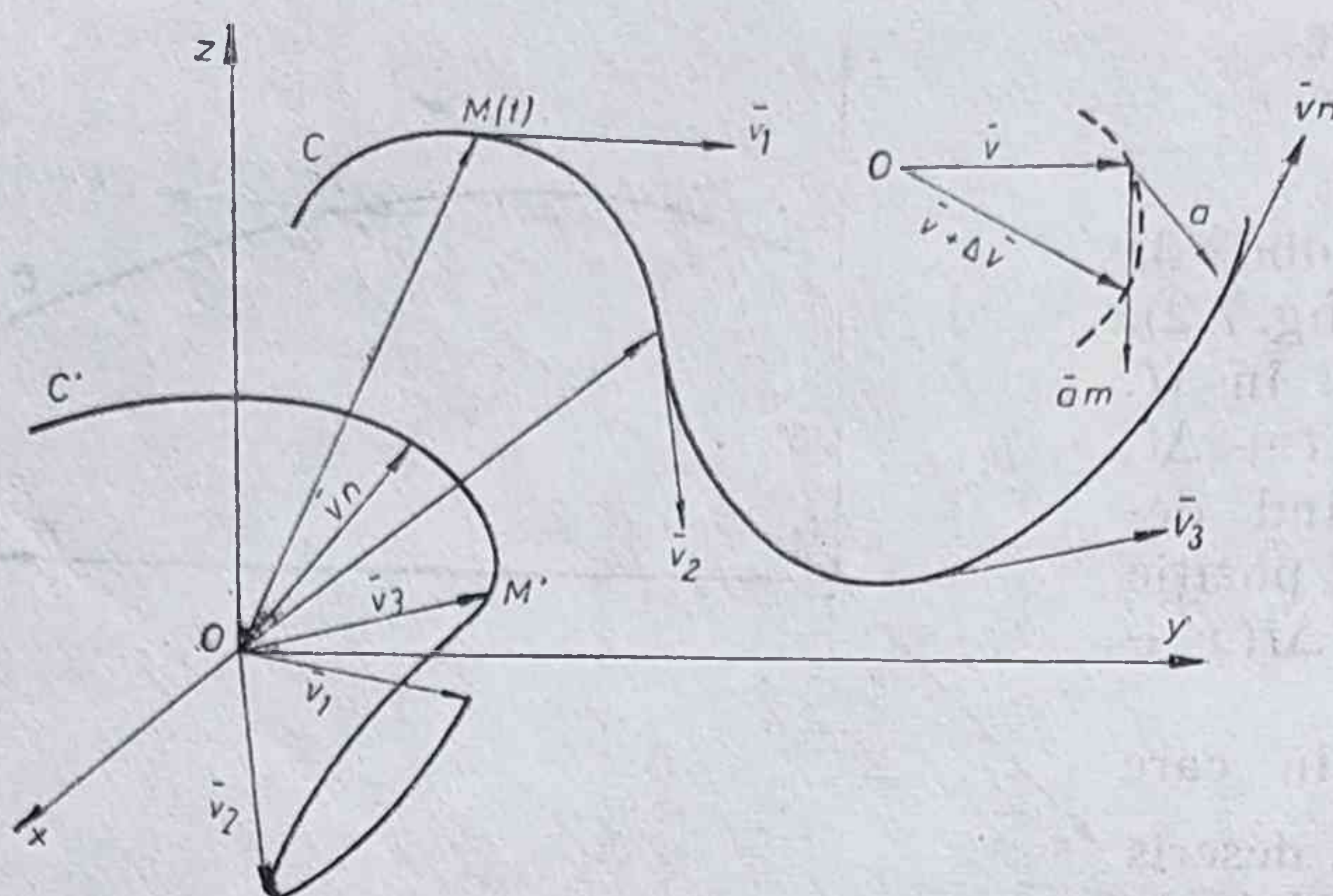


Fig. 7.3

Dacă se consideră mișcarea punctului M mobil pe curba C (fig. 7.3), și $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ vitezele punctului în diferite momente în timpul mișcării mobilului, și dacă într-un punct oarecare, de exemplu în originea axelor O , se trasează vectorii echipolenți ai vitezelor, vîrfurile acestor vectori echipolenți descriu o curbă C' care se numește hodograful mișcării punctului mobil M .

Dacă se consideră că pe curba hodografului mișcării se deplasează un mobil fictiv M' , atunci viteza medie a mobilului fictiv este tocmai accelerația medie a mobilului real M . Rezultă că accelerația instantanee a mobilului real M este viteza instantanee a mobilului fictiv M' ; vectorul accelerației instantanee se aplică punctului real M .

Se observă că accelerația punctului M este derivata vectorială a vitezei \bar{v} și se poate scrie :

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \bar{i} + \frac{dv_y}{dt} \bar{j} + \frac{dv_z}{dt} \bar{k}, \quad (7.6, b)$$

sau :

$$\bar{a} = \ddot{x} \cdot \bar{i} + \ddot{y} \cdot \bar{j} + \ddot{z} \cdot \bar{k}; \text{ sau : } \bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}. \quad (7.6, c)$$

Rezultă deci că accelerația este derivata vectorială de ordinul doi a vectorului de poziție a punctului M .

Punctul de aplicație al vectorului accelerație este tocmai punctul M a cărui mișcare se studiază.

Mărimea accelerației se stabilește calculînd modulul :

$$|\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \quad (7.6, c)$$

Direcția accelerației se determină cu ajutorul cosinusurilor directoare :

$$\cos \alpha_1 = \frac{\ddot{x}}{|\bar{a}|}; \quad \cos \beta_1 = \frac{\ddot{y}}{|\bar{a}|}; \quad \cos \gamma_1 = \frac{\ddot{z}}{|\bar{a}|}. \quad (7.6, d)$$

7.1.5. SPAȚIUL (DISTANȚA) PARCURS

Ecuatiile de mișcare determină poziția punctului în raport cu sistemul de referință; spațiul parcurs depinde de viteză și de timp și este determinat de relația :

$$ds = v \cdot dt.$$

Ținînd seama că mărimea vitezei este dată de relația :

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

expresia spațiului elementar devine :

$$ds = [v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)]^{1/2} dt ;$$

$$s = \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (7.7)$$

7.1.6. VITEZA ȘI ACCELERAȚIA UNGHIULARĂ

Ecuatiile parametrice ale mișcării unui punct, și ca atare poziția unui punct în spațiu în raport cu un sistem de referință fix, se stabilesc în funcție de anumite elemente geometrice prinse în ecuații sub forma unor parametri care se modifică în funcție de timp. În cazul mișcării unui punct într-un plan, poziția unui punct poate fi determinată față de un reper fix și cu ajutorul unui unghi.

Astfel, în cazul mișcării unui punct pe o traiectorie circulară, ca în figura 7.4, dacă se cunoaște unghiul dat de funcția $\theta = \theta(t)$ față de semiaxa Ox , pentru o anumită valoare a timpului t , se poate determina poziția punctului pe traiectoria circulară. Dacă A_1 și A_2 sînt pozițiile punctului în momentele t și $t + \Delta t$, variația unghiului θ în intervalul de timp Δt este :

$$\Delta\theta = \theta(t + \Delta t) - \theta(t).$$

Viteza unghiulară medie este dată de raportul :

$$\omega_{med} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t},$$

iar viteza unghiulară instantanee este dată de relația :

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \quad (7.8)$$

Viteza unghiulară instantanee este egală cu derivata în raport cu timpul a expresiei unghiului $\theta = \theta(t)$ și se măsoară în $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Accelerația unghiulară se determină în mod asemănător :

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \text{ [rad/s}^2\text{]}. \quad (7.9)$$

În cazul mișcării circulare, poziția punctului se poate determina ușor numai prin cunoașterea unghiului $\theta = \theta(t)$ la un moment dat, raza fiind o constantă $|\vec{r}| = R = \text{const.}$

În cazul unei mișcări oarecare în plan mișcarea este precizată dacă se cunosc funcțiile : $\theta = \theta(t)$ — unghiul și $r = r(t)$ — modulul vectorului de poziție.

7.1.7. VITEZA ȘI ACCELERAȚIA AREOLARĂ

În unele studii ale mișcării mecanice se realizează caracterizarea mișcării cu ajutorul noțiunilor de viteză și accelerație areolară.

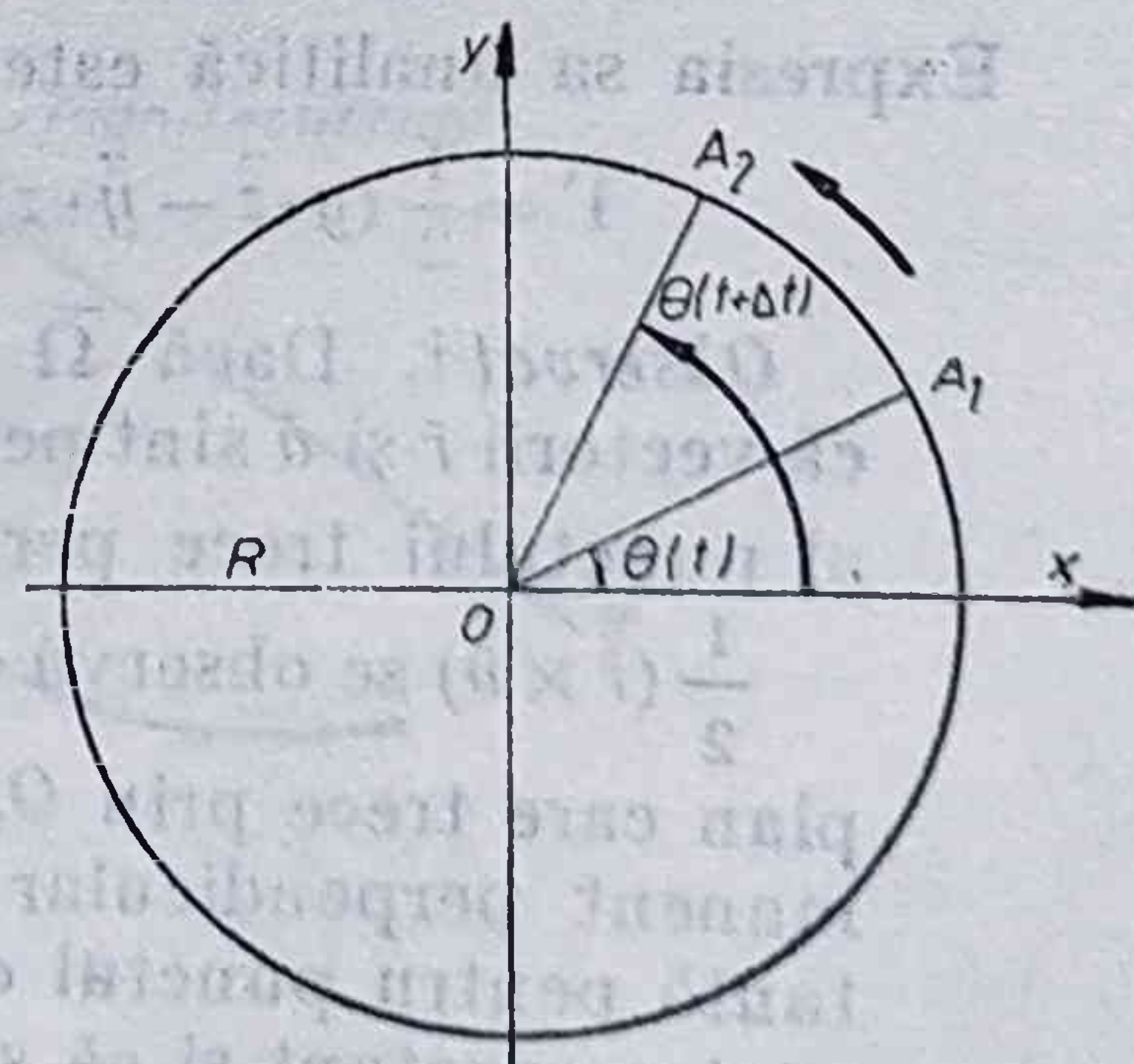


Fig. 7.4

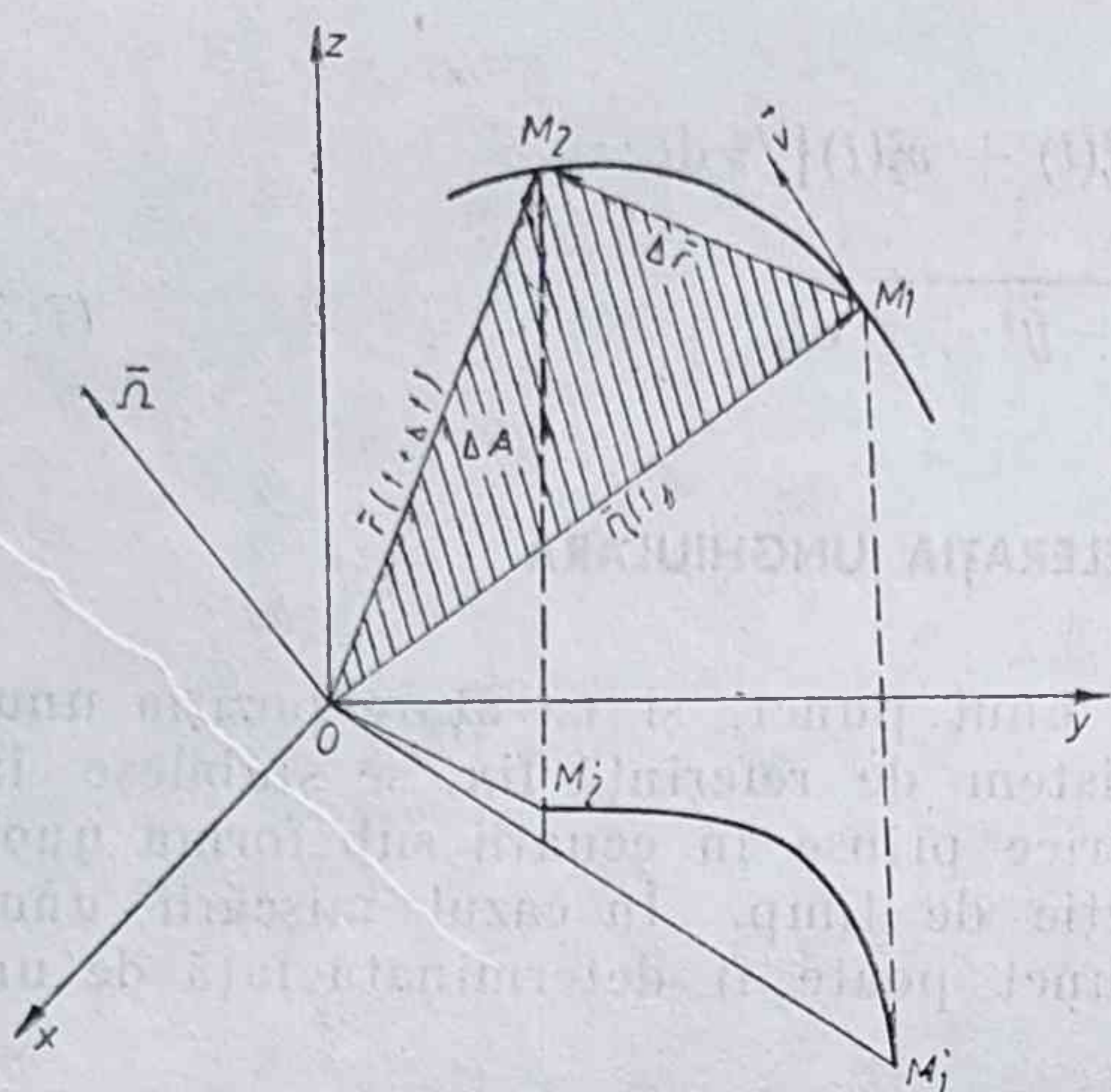


Fig. 7.5

Prin definiție, mărimea (modulul) vitezei areolare este limita raportului dintre elementul de arie ΔA parcurs de raza vectorie a unui punct mobil care se deplasează pe traiectoria sa și timpul elementar Δt în care s-a efectuat această deplasare (fig. 7.5).

Dacă punctul parcurge în intervalul de timp foarte mic Δt arcul $\overline{M_1 M_2}$ de pe traiectoria sa, a cărui lungime poate fi asimilată cu coarda $\overline{M_1 M_2} = \Delta \bar{r}$ care este tocmai variația vectorului de poziție $\bar{r}(t)$ al punctului, mărimea ariei triunghiului $OM_1 M_2$ măsurat de vectorul de poziție este dată de relația :

$$\Delta A = \frac{1}{2} |\bar{r} \times \Delta \bar{r}|.$$

Viteza areolară medie Ω_m este raportul ariei elementare ΔA măsurate de vectorul de poziție și timpul Δt în care s-a efectuat mișcarea :

$$\Omega_m = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left| \bar{r} \times \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \right|.$$

Viteza areolară la un moment dat se obține trecînd la limită și este dată de relația :

$$\bar{\Omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\Omega}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\bar{r} \times \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2} (\bar{r} \times \bar{v}). \quad (7.10, a)$$

Observînd că :

$$\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k} \quad \text{și} \quad \bar{v} = \dot{x} \cdot \bar{i} + \dot{y} \cdot \bar{j} + \dot{z} \cdot \bar{k},$$

expresia analitică a vitezei areolare va fi :

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} (y \cdot \dot{z} - \dot{y} \cdot z) \bar{i} + \frac{1}{2} (z \cdot \dot{x} - \dot{z} \cdot x) \bar{j} + \frac{1}{2} (x \cdot \dot{y} - \dot{x} \cdot y) \bar{k}. \quad (7.10, b)$$

Accelerația areolară este dată de relația :

$$\bar{\Gamma} = \frac{d\bar{\Omega}}{dt} = \frac{1}{2} (\dot{\bar{r}} \times \bar{v} + \bar{r} \times \dot{\bar{v}}) = \frac{1}{2} (\bar{r} \times \dot{\bar{v}}) = \frac{1}{2} (\bar{r} \times \bar{a}) \quad (7.10, c)$$

Expresia sa analitică este :

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{2} (y \cdot \ddot{z} - \ddot{y} \cdot z) \bar{i} + \frac{1}{2} (z \cdot \ddot{x} - \ddot{z} \cdot x) \bar{j} + \frac{1}{2} (x \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot y) \bar{k}. \quad (7.10, d)$$

Observații. Dacă $\bar{\Omega} = \bar{C} = \text{const.}$, rezultă că vectorul $\dot{\bar{\Omega}} = 0$ și deci că vectorii \bar{r} și \bar{a} sînt permanent coliniari sau vectorul accelerație liniară \bar{a} al punctului trece permanent prin punctul fix O . Din relația : $\bar{C} = \frac{1}{2} (\bar{r} \times \bar{v})$ se observă că locul geometric al vectorului de poziție \bar{r} este un plan care trece prin O , punctul de aplicație al vectorului \bar{C} și este permanent perpendicular pe vectorul \bar{C} . Rezultă ca o concluzie importantă pentru punctul care se mișcă astfel, că viteza sa areolară este un vector constant și că se mișcă permanent într-un plan perpendicular pe acest vector.

7.1.8. UNITĂȚI DE MĂSURĂ

Viteza se determină prin raportul dintre lungimea spațiului și mărimea timpului. Viteza unui mobil se exprimă în $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Mărimea accelerației se exprimă în $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

7.2. STUDIUL MIȘCĂRII ÎN COORDONATE INTRINSECI

Caracteristicile principale ale mișcării — viteza și accelerația — se determină în raport cu un triedru legat de punct, cunoscut sub numele de triedrul lui Frenet ale cărui axe coincid cu tangenta, cu normala principală și cu binormala la traiectorie în punctul considerat. Pentru a studia mișcarea punctului în coordonate intrinseci, se presupune că se cunoaște traiectoria punctului și legea de mișcare $s = s(t) = \overline{M_0M}$ în raport cu un punct de pe traiectorie considerat ca reper fix (fig. 7.6).

Triedrul lui Frenet are versorii pe cele trei axe $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$, legați între ei prin relația : $\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\nu}$.

Dacă se consideră un punct O drept reper fix în raport cu care poziția punctului M de pe curba C este dată de vectorul de poziție $\bar{r} = \bar{r}(t)$, expresia vitezei este :

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

Se cunoaște că :

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau} \text{ și } \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Expresia se mai poate deci scrie sub forma :

$$\bar{v} = \bar{\tau} \cdot \dot{s} \quad (7.11, a)$$

și rezultă că viteza are componente numai pe direcția tangentei la traiectorie, adică :

$$v_{\tau} = \dot{s} ; v_{\nu} = 0 ; v_{\beta} = 0, \quad (7.11, b)$$

mărimea vitezei fiind $|\bar{v}| = \dot{s}$.

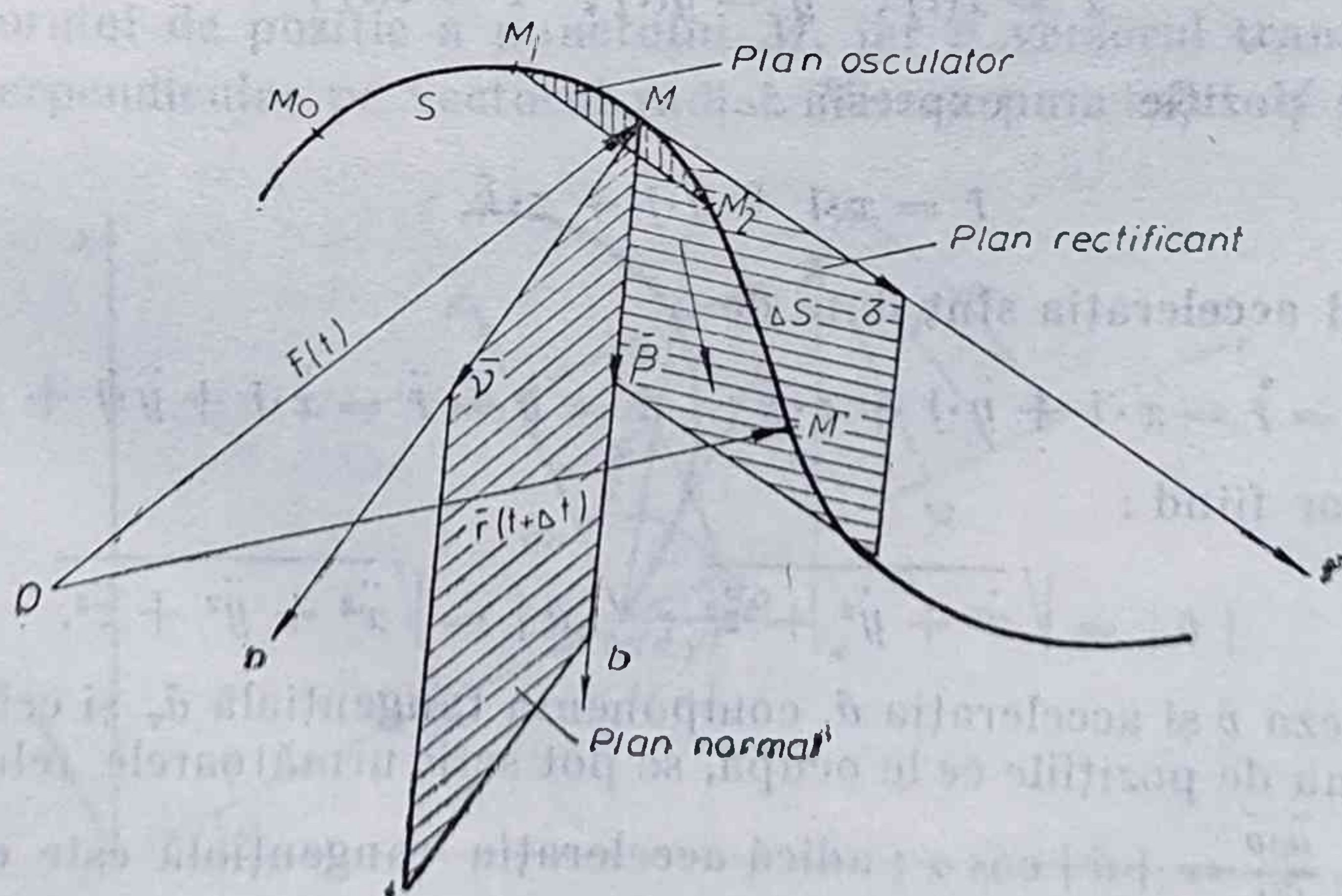


Fig. 7.6

Vectorul accelerației rezultă prin derivarea vectorului viteză :

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\tau}} \cdot \vec{s} + \vec{\tau} \cdot \ddot{s}. \quad (7.12, a)$$

Se știe că :

$$\dot{\vec{\tau}} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{\vec{v}}{\rho}.$$

Expresia accelerației devine :

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{v} + \ddot{s} \cdot \vec{\tau} = a_v \cdot \vec{v} + a_\tau \cdot \vec{\tau}. \quad (7.12, b)$$

Rezultă că accelerația are două componente :

- accelerația tangențială, \vec{a}_τ după direcția tangentei de mărime $a_\tau = \ddot{s}$;
- accelerația normală \vec{a}_v după direcția normalei principale de mărime $a_v = \frac{v^2}{\rho}$ unde ρ este mărimea razei de curbură în punctul respectiv. Mărimea accelerației totale este dată de relația :

$$|\vec{a}_{tot}| = \sqrt{\frac{\dot{s}^4}{\rho^2} + \ddot{s}^2} = \sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + \dot{v}^2}. \quad (7.12, c)$$

Se poate observa că între vectorul accelerație \vec{a} al punctului și componentele sale după tangentă a_τ și normală a_v la traiectorie se pot scrie relațiile :

$$\vec{a} \cdot \vec{\tau} = a_\tau = \ddot{s}; \quad \vec{a} \cdot \vec{v} = a_v = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}; \quad \vec{a} \cdot \vec{\beta} = a_\beta = 0. \quad (7.12, d)$$

Se observă că componenta după binormală este întotdeauna nulă și se deduce că vectorul accelerație se află întotdeauna în planul osculator format de tangenta și normala principală în momentul respectiv.

Între relațiile de mișcare date în coordonate carteziane și cele în coordonate intrinseci se poate stabili o legătură utilă pentru rezolvarea anumitor probleme cinematice sau pur și simplu geometrice. Astfel, dacă ecuațiile de mișcare în coordonate carteziane sînt :

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t);$$

vectorul de poziție are expresia :

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k},$$

iar viteza și accelerația sînt date de :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k}; \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k},$$

mărimile lor fiind :

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \quad |\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Între viteza \vec{v} și accelerația \vec{a} , componenta tangențială \vec{a}_τ și cea normală \vec{a}_v , ținînd seama de pozițiile ce le ocupă, se pot scrie următoarele relații (fig. 7.7) :

$$|\vec{a}_\tau| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = |\vec{a}| \cos \alpha; \text{ adică accelerația tangențială este egală cu proiecția vectorului accelerație pe vectorul viteză ;}$$

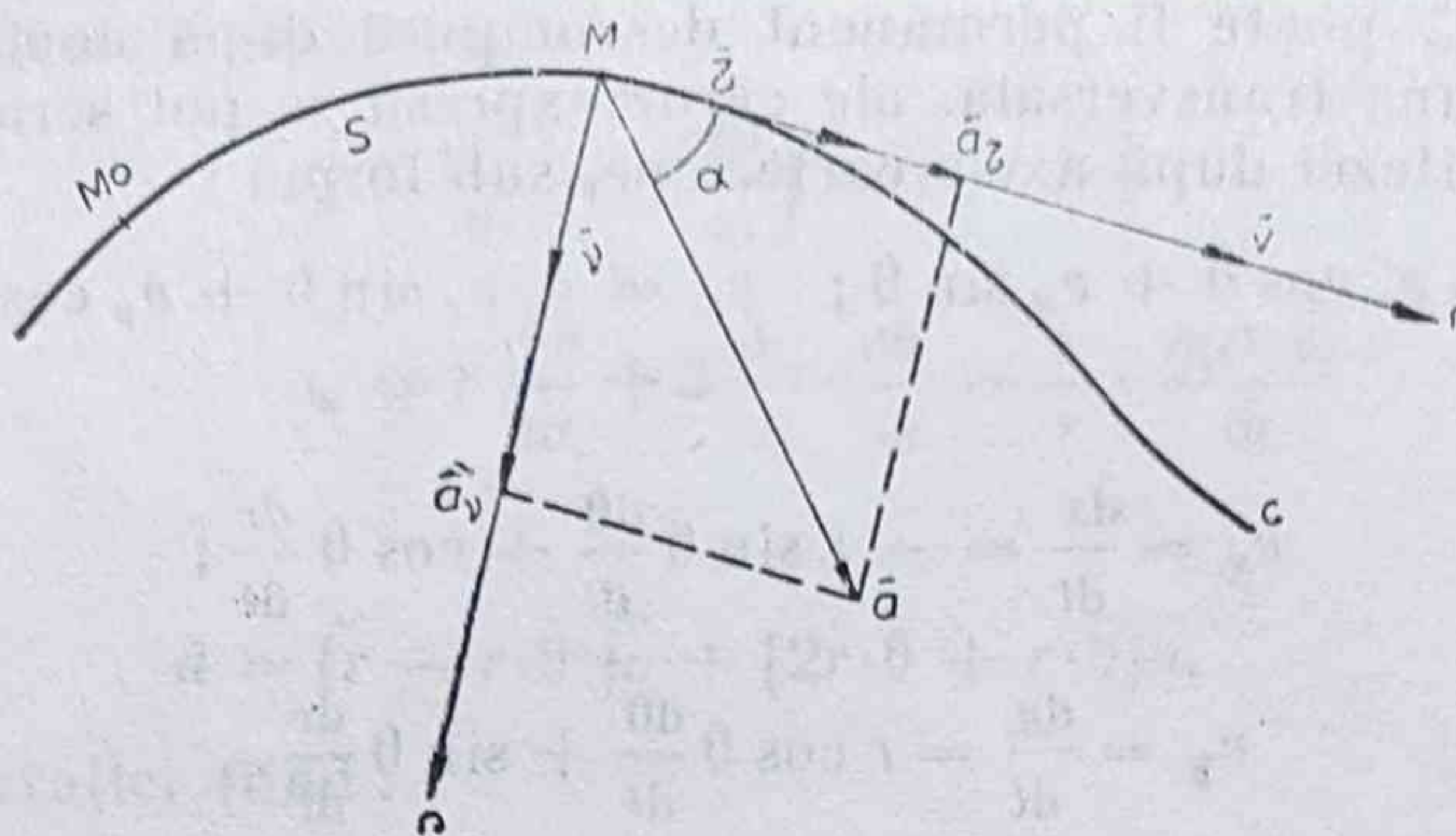


Fig. 7.7

$|\vec{a}_n| = \left| \frac{\vec{a} \times \vec{v}}{v} \right|$; adică accelerația normală este egală cu mărimea produsului vectorial dintre accelerație și viteză împărțită la mărimea vitezei.

7.3. STUDIUL MIȘCĂRII ÎN COORDONATE POLARE

Poziția unui punct într-un plan poate fi perfect determinată și cu ajutorul coordonatelor polare (r, θ) , astfel că relațiile $r = r(t)$ și $\theta = \theta(t)$ reprezintă ecuațiile parametrice ale mișcării unui punct M în coordonate polare plane (fig. 7.8). Același punct poate fi determinat și cu ajutorul coordonatelor carteziene, între cele două sisteme existînd relațiile cunoscute (originea O fiind aceeași):

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta \quad \text{și} \quad r^2 = x^2 + y^2; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}; \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Ecuația traiectoriei se obține eliminînd parametrul timp, astfel că se obține o expresie de forma: $F(r, \theta) = 0$, iar în coordonate carteziene: $\Phi(x, y) = 0$.

În coordonate polare se obișnuiește a se folosi pentru exprimarea precisă a vectorilor, vectorii variabili ca direcție $\vec{\rho}$ și \vec{n} , și anume: $\vec{\rho}$ versorul radial are direcția vectorului de poziție a punctului M , iar \vec{n} versorul transversal este permanent perpendicular pe vectorul radial. Viteza punctului M tangentă la

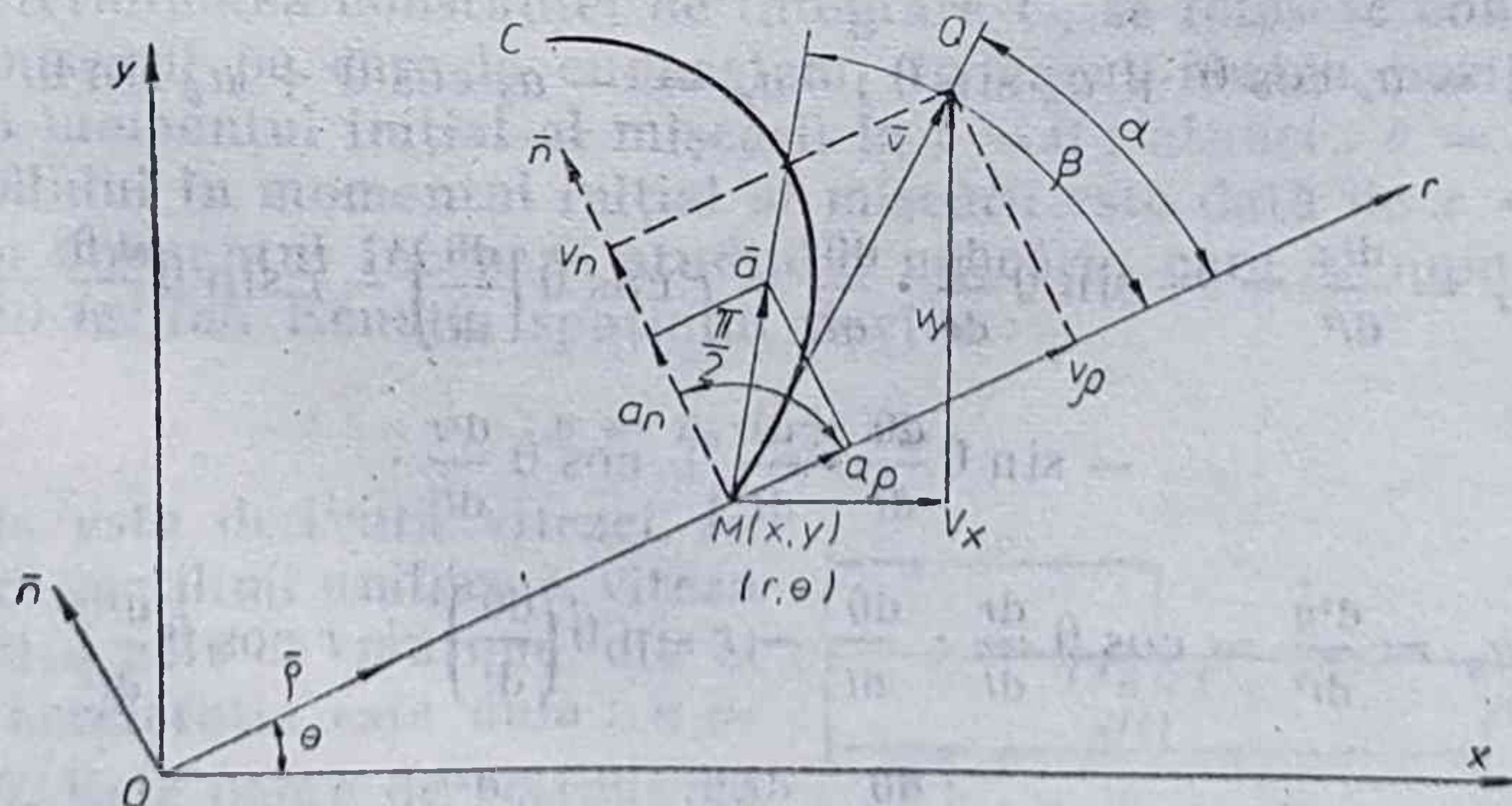


Fig. 7.8

traectoria sa C , poate fi permanent descompusă după două componente : una radială și una transversală, ale căror expresii se pot scrie în funcție de componentele vitezei după axele carteziane, sub forma :

$$v_{\rho} = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta ; \quad v_n = -v_x \sin \theta + v_y \cos \theta ;$$

observînd că :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + \cos \theta \frac{dr}{dt} ;$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta \frac{dr}{dt} ,$$

se obțin relațiile :

$$v_{\rho} = -r \sin \theta \cdot \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + \cos^2 \theta \frac{dr}{dt} + r \sin \theta \cdot \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + \sin^2 \theta \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} ; \quad (7.13, a)$$

$$v_n = r \sin^2 \theta \frac{d\theta}{dt} - \sin \theta \cdot \cos \theta \frac{dr}{dt} + r \cos^2 \theta \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta \cdot \cos \theta \frac{dr}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} . \quad (7.13, b)$$

Astfel vectorul viteză se mai scrie sub forma :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{\rho} + r \frac{d\theta}{dt} \vec{n} = \dot{r} \vec{\rho} + r \dot{\theta} \vec{n}, \quad (7.14, a)$$

mărimea vitezei (modulul) fiind :

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}, \quad (7.14, b)$$

iar direcția vitezei fiind :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r \dot{\theta}}{\dot{r}} . \quad (7.14, c)$$

Expresia accelerației punctului M se obține în mod asemănător, pornind de la relațiile între componentele sale scrise în coordonate carteziane și în coordonate polare. Astfel :

$$a_{\rho} = a_x \cos \theta + a_y \sin \theta ; \quad a_n = -a_x \sin \theta + a_y \cos \theta, \quad (7.15, a)$$

unde :

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\sin \theta \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} - r \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} + \cos \theta \frac{d^2r}{dt^2} .$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \cos \theta \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} - r \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} + \sin \theta \frac{d^2r}{dt^2} .$$

Efectuind calculele rezultă :

$$a_p = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2.$$

$$a_n = r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d(r^2 \cdot \dot{\theta})}{dt}$$

sau :

$$\bar{a} = [\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2] \bar{\rho} + [2\dot{r} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \ddot{\theta}] \bar{n}. \quad (7.15, b)$$

Mărimea accelerației fiind :

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{r} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \ddot{\theta})^2}, \quad (7.15, c)$$

direcția accelerației este caracterizată de relația :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2\dot{r} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \ddot{\theta}}{\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2}. \quad (7.15, d)$$

7.4. MIȘCĂRI PARTICULARE ALE PUNCTULUI

7.4.1. MIȘCAREA RECTILINIE UNIFORMĂ

Prin mișcare rectilinie uniformă se înțelege mișcarea unui punct pe o dreaptă, cu viteza constantă.

Mișcarea este determinată dacă se cunoaște funcția : $x = x(t)$, unde x reprezintă abscisa mobilului, adică se cunoaște poziția mobilului față de sistemul de referință în orice moment (fig. 7.9).

Mișcarea se caracterizează printr-o viteză constantă, adică :

$$v = C_0 = v_0; \quad (7.16, a)$$

dar : $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = C_0$, sau : $dx = v \cdot dt = C_0 \cdot dt$ (7.16, b)

Prin integrare rezultă : $x = C_0 \cdot t + C_1$ sau : $x = v_0 \cdot t + C_1$.

Pentru determinarea constantei de integrare C_1 se folosesc condițiile particulare ale mișcării pe care le cunoaștem, în cazul nostru poziția și viteza mobilului în momentul inițial al mișcării la $t = 0$; atunci : $v = v_0$ și $x = x_0$. Poziția mobilului în momentul inițial al mișcării este dată de $x = x_0$, abscisa punctului în momentul începerii studiului mișcării, care se numește în mod curent *spațiu inițial*. Ecuația spațiului devine :

$$x = v_0 \cdot t + x_0. \quad (7.16, c)$$

Accelerația este derivata vitezei. În cazul mișcării rectilinii uniforme, viteza fiind constantă atât ca mărime cât și ca direcție, accelerația este nulă : $a = \dot{v} = \ddot{x} = 0$. Este demn de reținut ca o observație foarte importantă, că sin-

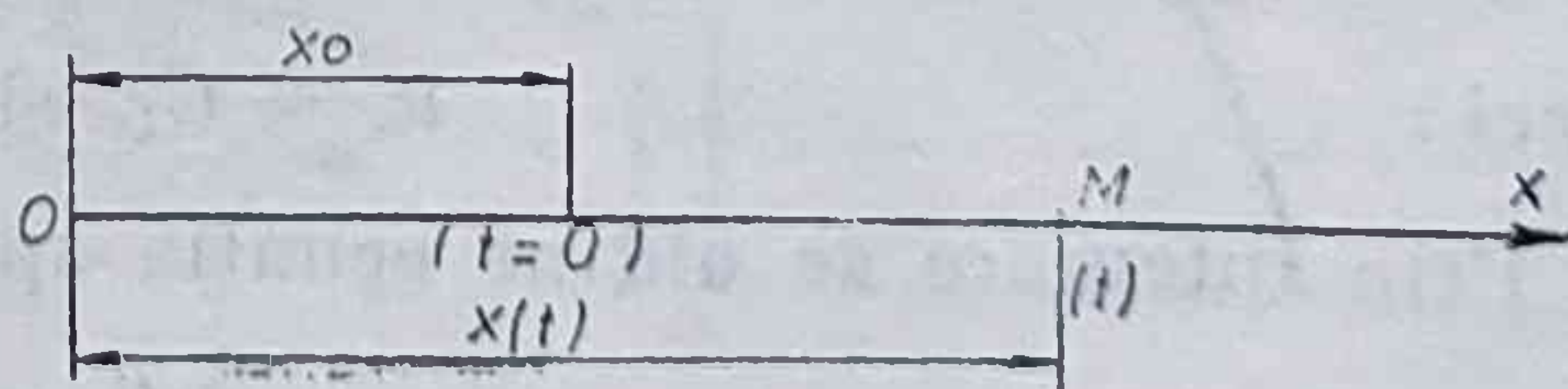


Fig. 7.9

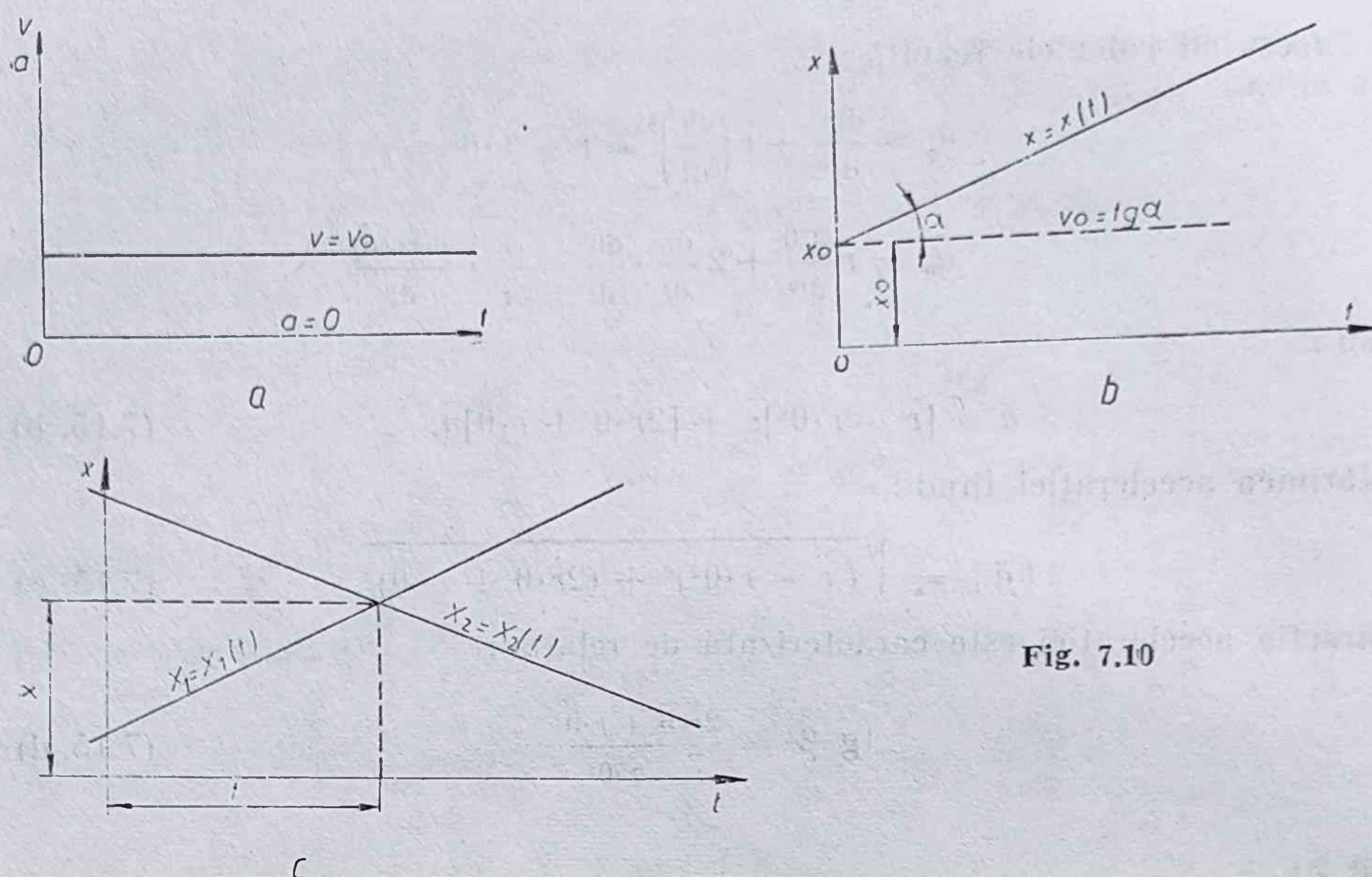


Fig. 7.10

gura mișcare cu accelerația nulă este mișcarea rectilinie uniformă, deoarece viteza este constantă atât ca mărime cât și ca direcție. Ecuațiile mișcării rectilinii uniforme sînt deci :

$$a = 0, v = v_0, x = v_0 \cdot t + x_0. \quad (7.16, d)$$

Mișcarea rectilinie și uniformă a punctului mobil se reprezintă grafic prin diagrame ale mișcării : viteza în funcție de timp, spațiul (poziția) funcție de timp etc. În figura 7.10, a se redă diagrama vitezei, iar în figura 7.10, b se redă diagrama spațiului.

Reprezentările grafice permit soluționarea pe cale grafică a unor probleme de mișcare. Ca exemplu, în figura 7.10, c se arată determinarea pe cale grafică a locului și timpului de întîlnire a două mobile care se deplasează cu mișcări rectilinii uniforme pe aceeași dreaptă în sensuri contrarii.

7.4.2. MIȘCAREA RECTILINIE UNIFORM VARIATĂ

Dacă accelerația, în cazul mișcării rectilinii, este constantă în tot timpul mișcării, aceasta poartă numele de *mișcare rectilinie uniform variată*. Ea este *uniform accelerată* dacă accelerația este pozitivă și este *uniform întîrziată* dacă accelerația este negativă :

$$a_x = \ddot{x} = \dot{v} = a = \text{const.}; \frac{dv}{dt} = a \text{ sau } dv = a \cdot dt;$$

prin integrare se obține : $\dot{x} = v = a \cdot t + C_1$, pentru $t = 0$, $v = v_0$;

deci : $v_0 = C_1$, și $v = a \cdot t + v_0. \quad (7.17, a)$

Prin integrare se obține ecuația spațiului :

$$x = \frac{a \cdot t^2}{2} + v_0 \cdot t + C_2$$

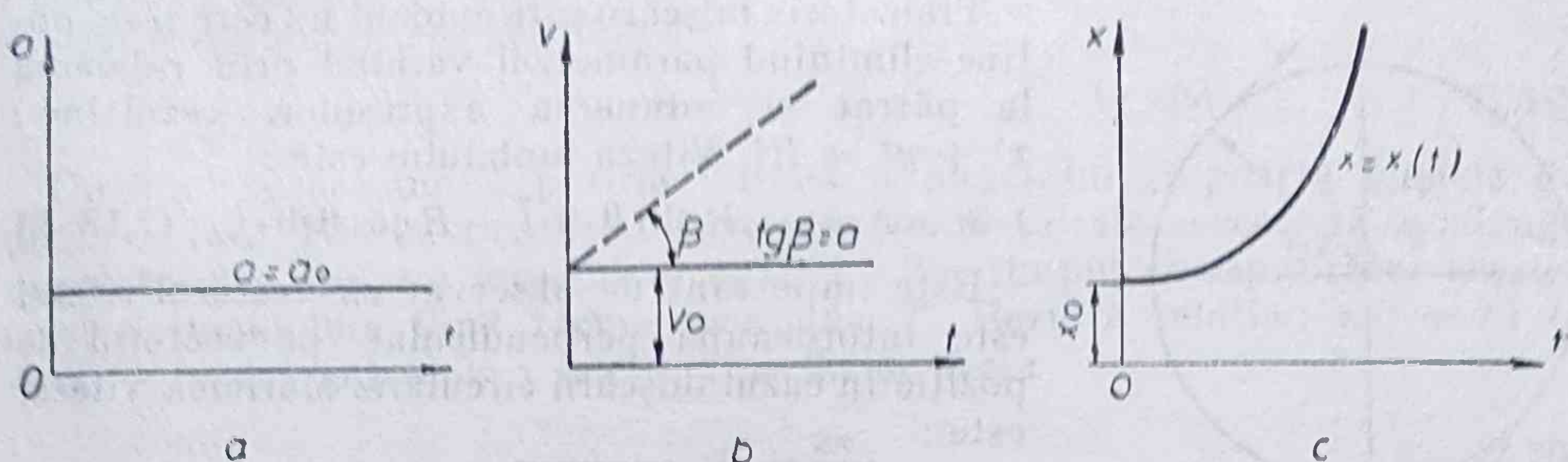


Fig. 7.11

sau ținând seamă că pentru $t = 0$, $x = x_0$, se obține ecuația spațiului :

$$x = \frac{a \cdot t^2}{2} + v_0 \cdot t + x_0. \quad (7.17, b)$$

Ecuațiile mișcării rectilinii uniforme sînt :

$$a = a_0; v = a \cdot t + v_0; x = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0. \quad (7.17, c)$$

Distanța parcursă între momentele t_1 și t_2 este dată de relația :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt. \quad (7.17, d)$$

Reprezentarea grafică a mișcării rectilinii uniform variată a unui mobil este utilă pentru rezolvarea grafică a unor probleme de cinematică. În figura 7.11, a, b, c se dau reprezentările grafice pentru ecuațiile mișcării rectilinii uniform accelerate, iar în figura 7.12, a, b, c se prezintă ecuațiile mișcării rectilinii uniform întîrziate.

7.4.3. MIȘCAREA CIRCULARĂ

Ecuațiile parametrice ale mișcării pe cerc (fig. 7.13) sînt : $x = R \cos \theta$; $y = R \sin \theta$, unde θ este o funcție de timp.

Expresia vectorului de poziție este :

$$\vec{r} = R \cos \theta \cdot \vec{i} + R \sin \theta \cdot \vec{j}. \quad (7.18, a)$$

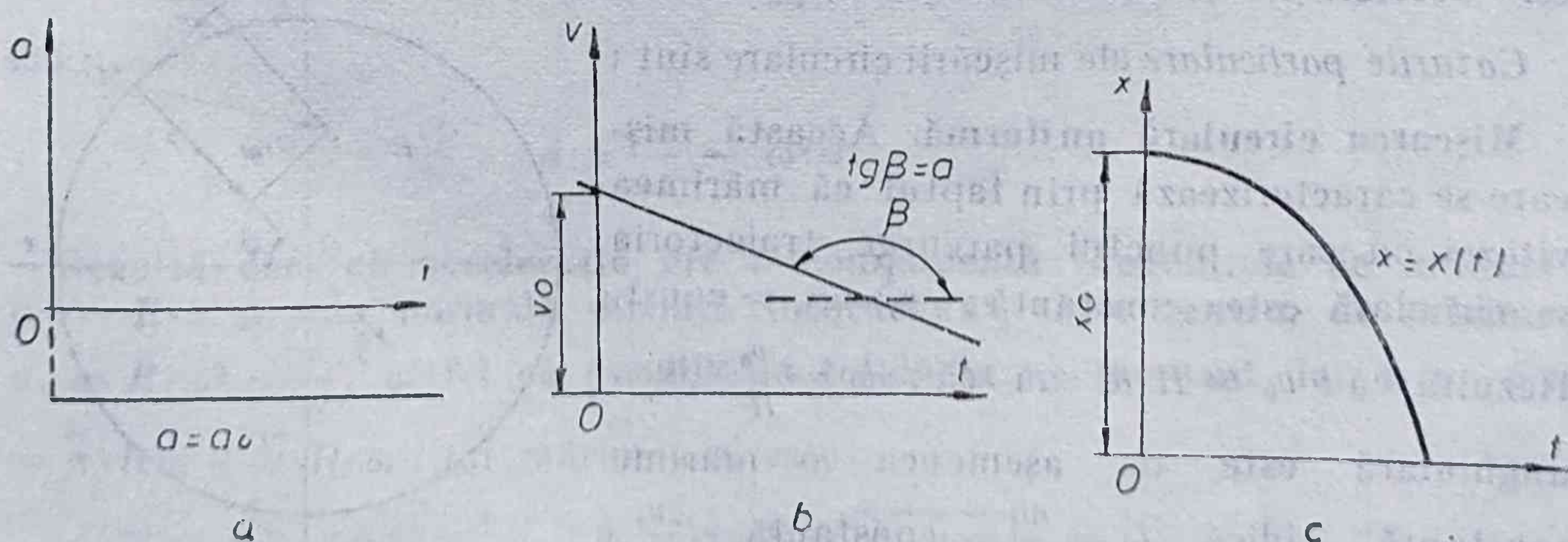


Fig. 7.12

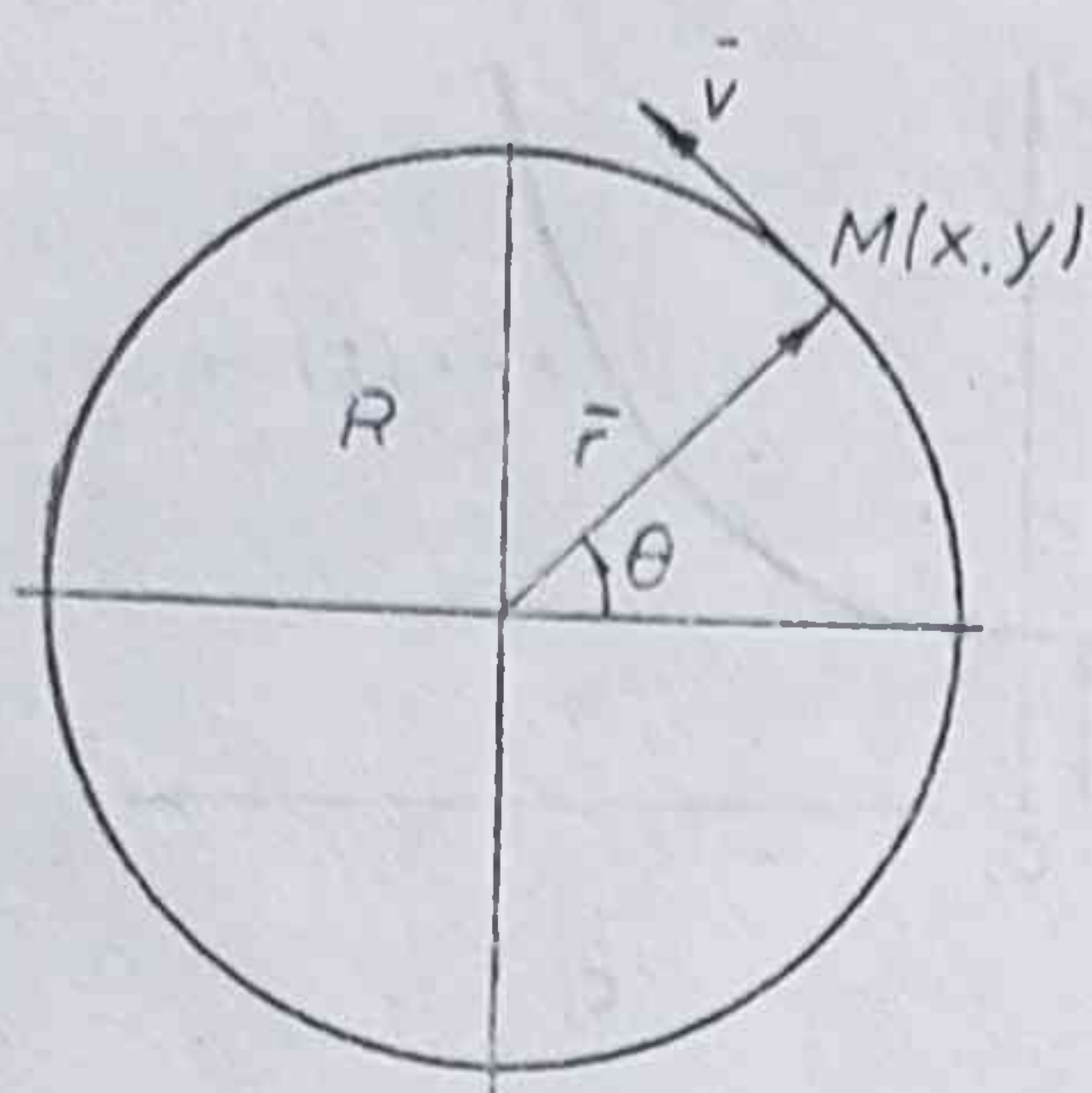


Fig. 7.13

Traectoria mișcării este evident un cerc și se obține eliminând parametrul variabil prin ridicarea la pătrat și adunarea expresiilor, rezultând: $x^2 + y^2 = R^2$. Viteza mobilului este:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -R \sin \theta \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{i} + R \cos \theta \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{j}. \quad (7.18, b)$$

Este important de observat că vectorul vitezei este întotdeauna perpendicular pe vectorul de poziție în cazul mișcării circulare. Mărimea vitezei este:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = R \cdot \dot{\theta} = R \cdot \omega$$

$$v = R \cdot \omega,$$

unde s-a notat cu $\dot{\theta} = \omega$ viteza unghiulară.

Accelerația mobilului are expresia:

$$\begin{aligned} \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} = [-R \cos \theta \cdot \ddot{\theta} - R \cdot \dot{\theta}^2 \sin \theta] \vec{i} + \\ + [-R \cdot \dot{\theta}^2 \sin \theta + R \cdot \ddot{\theta} \cos \theta] \vec{j}. \end{aligned} \quad (7.18, c)$$

Observînd că $\ddot{\theta} = \epsilon$ este accelerația unghiulară, se mai poate scrie:

$$\vec{a} = [-R \cos \theta \cdot \omega^2 - R \cdot \epsilon \sin \theta] \vec{i} + [-R \cdot \omega^2 \sin \theta + R \cdot \epsilon \cos \theta] \vec{j};$$

sau

$$\vec{a} = \epsilon [-R \sin \theta \cdot \vec{i} + R \cos \theta \cdot \vec{j}] - \omega^2 [R \cos \theta \cdot \vec{i} + R \sin \theta \cdot \vec{j}]$$

sau

$$\vec{a} = \frac{\epsilon \cdot \vec{v}}{\omega} - \omega^2 \cdot \vec{r} \quad (7.18, d)$$

Pornind de la observația că vectorul viteză \vec{v} este perpendicular pe vectorul de poziție \vec{r} se poate reține faptul că în general în cazul mișcării circulare se disting două accelerații, și anume:

- accelerația radială $a_v = -\omega^2 \cdot R$,
- accelerația tangențială $a_\tau = \epsilon \cdot R$.

Accelerația totală este:

$$|\vec{a}_{tot}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_v^2} = R \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}.$$

În figura 7.14 sînt reprezentate componentele accelerației și accelerația totală.

Cazurile particulare ale mișcării circulare sînt:

Mișcarea circulară uniformă. Această mișcare se caracterizează prin faptul că mărimea vitezei cu care punctul parcurge traiectoria sa circulară este constantă: $v = v_0 = \text{const.}$ Rezultă că: $v_0 = R \cdot \omega$ sau că: $\omega = \frac{v_0}{R}$ viteza unghiulară este de asemenea o mărime constantă, adică $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{constantă} = \frac{v_0}{R}$.

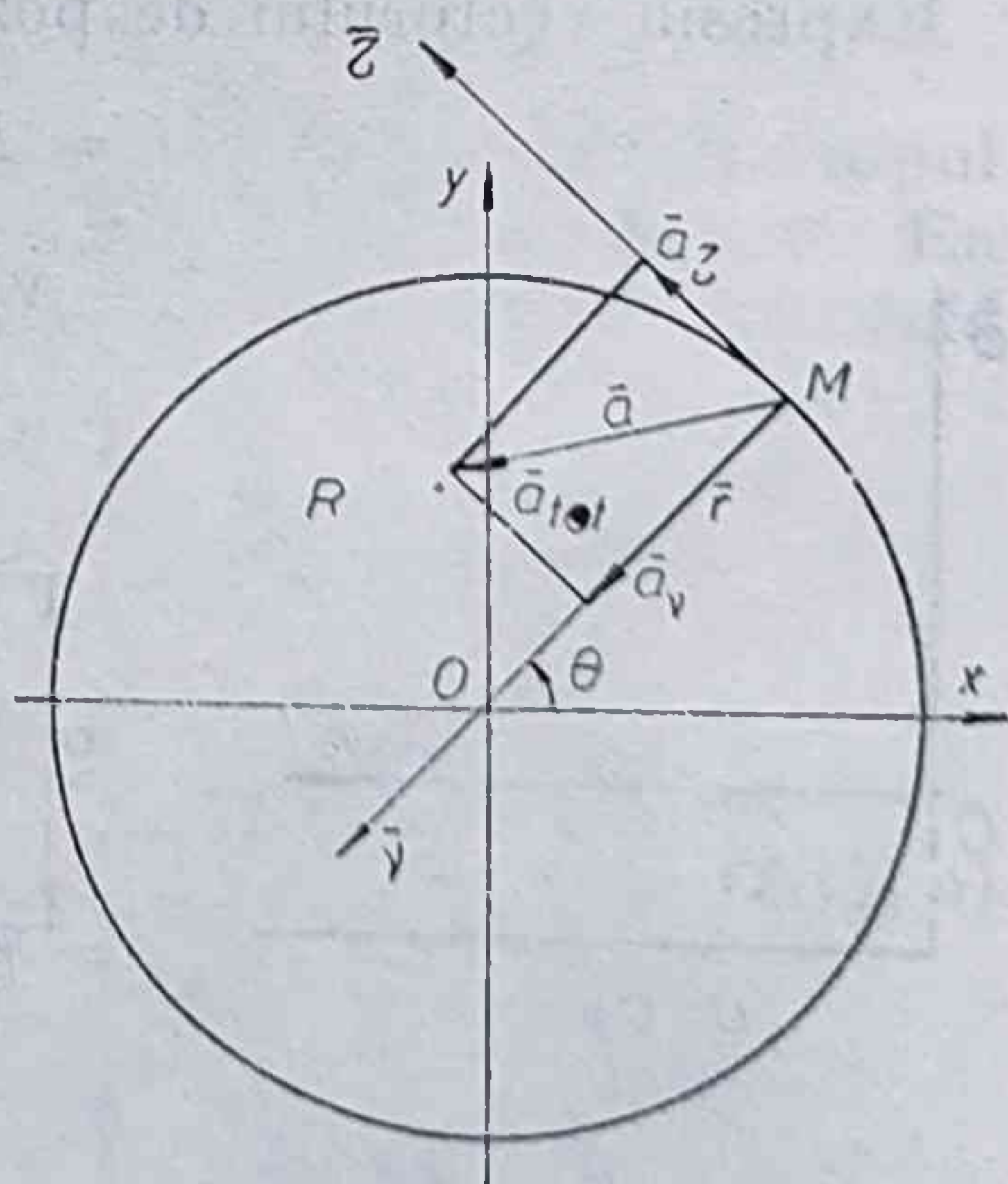


Fig. 7.14

Rezultă că unghiul θ este o funcție liniară de timp, care poate fi denumit spațiul unghiular și are expresia :

$$\theta = \omega \cdot t + \varphi_0. \quad (7.19)$$

Unghiul φ_0 determină poziția inițială a punctului și poartă numele de unghi de fază. Pentru a realiza o revoluție completă este necesar să se adauge unghiului θ o creștere unghiulară egală cu 2π , timpul corespunzător acestei creșteri unghiulare fiind tocmai perioada T . Rezultă relația : $\omega(t + T) + \varphi_0 - (\omega \cdot t + \varphi_0) = 2\pi$; sau $\omega \cdot T = 2\pi$ și deci :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (7.20)$$

Numărul de rotații în unitatea de timp este frecvența f ; ea este inversul perioadei și se obține : $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

Observație. Expresia vitezei arătată în cazul mișcării circulare oarecare își păstrează forma, deci : $|\vec{v}| = v = R \cdot \omega$.

Expresia accelerației se modifică. Se observă că accelerația tangențială este nulă deoarece $\varepsilon = 0$. Rezultă că există numai o accelerație normală, dirijată către centrul cercului, care are mărimea :

$$a_v = R \cdot \omega^2 \quad \text{sau} \quad a_v = \frac{v^2}{R}. \quad (7.21)$$

Mișcarea circulară uniform variată. Această mișcare se caracterizează prin faptul că accelerația unghiulară este constantă : $\omega = \varepsilon = \text{const.}$ Viteza unghiulară se obține prin integrare și are expresia :

$$\omega = \varepsilon \cdot t + \omega_0. \quad (7.22)$$

Spațiul unghiular se determină prin integrare și are expresia :

$$\theta = \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} + \omega_0 \cdot t + \theta_0. \quad (7.23)$$

Expresia vitezei arătată în cazul mișcării circulare își păstrează valabilitatea.

Mărimea vitezei este dată de relația : $v = R \cdot \omega$.

Accelerația este dată de expresia :

$$\vec{a} = \varepsilon[-R \sin \theta \cdot \vec{i} + R \cos \theta \cdot \vec{j}] - \omega^2[R \cos \theta \cdot \vec{i} + R \sin \theta \cdot \vec{j}],$$

sau :

$$\vec{a} = \frac{\varepsilon \cdot v}{\omega} - \omega^2 \cdot \vec{r}.$$

Rezultă deci că accelerația are o componentă tangențială de mărime : $a_\tau = R \cdot \varepsilon$ și una normală dirijată întotdeauna către centru, de mărime : $a_v = R \cdot \omega^2 = \frac{v^2}{R}$, astfel că accelerația totală la un moment dat este : $\vec{a} = \vec{\tau} \cdot R \cdot \varepsilon + \vec{v} \cdot R \cdot \omega^2$, iar mărimea ei este :

$$|\vec{a}_{tot}| = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

APLICAȚIA 1

Un mobil pornește din repaus în mișcare rectilinie cu accelerația constantă $a_1 = 1,5 \frac{m}{s^2}$; cînd atinge viteza $v_1 = 30 \frac{m}{s}$ frînează și după un spațiu de 20 m se oprește.

Să se determine spațiul străbătut pînă la frînare și accelerația pe porțiunea frînată. Să se traseze diagramele de variație ale lui s , v și a .

Rezolvare

Pe prima porțiune a drumului, mișcarea este rectilinie uniform variată, accelerată.

$$s_1 = \frac{a_1 \cdot t_1^2}{2};$$

$$t_1 = \frac{v_1}{a_1} = \frac{30}{1,5} = 20 \text{ s};$$

Rezultă :

$$v_1 = a_1 \cdot t_1.$$

$$s_1 = \frac{1,5}{2} \cdot 400 = 300 \text{ m}.$$

Pe porțiunea a doua, mișcarea este încetinită :

$$s_2 = v_1 \cdot t_2 - \frac{a_2 \cdot t_2^2}{2};$$

$$a_2 = \frac{v_1^2}{2s_2} = 22,5 \frac{m}{s^2};$$

Rezultă :

$$v_2 = v_1 - a_2 \cdot t_2 = 0.$$

$$t_2 = \frac{v_1}{a_2} = 1,33 \text{ s}.$$

Cu valorile rezultate se trasează diagramele de variație ale lui s , v și a din figura 7.15.

APLICAȚIA 2

Două mobile, M_1 și M_2 , pornesc deodată din punctul A și ajung deodată în punctul B . Mobilul M_1 parcurge diametrul AB al cercului de rază R , cu accelerație constantă a , cunoscută. Mobilul M_2 parcurge semicercul AM_2B cu accelerație unghiulară constantă ε , necunoscută (fig. 7.16).

Să se determine accelerația mobilului M_2 ajuns în B .

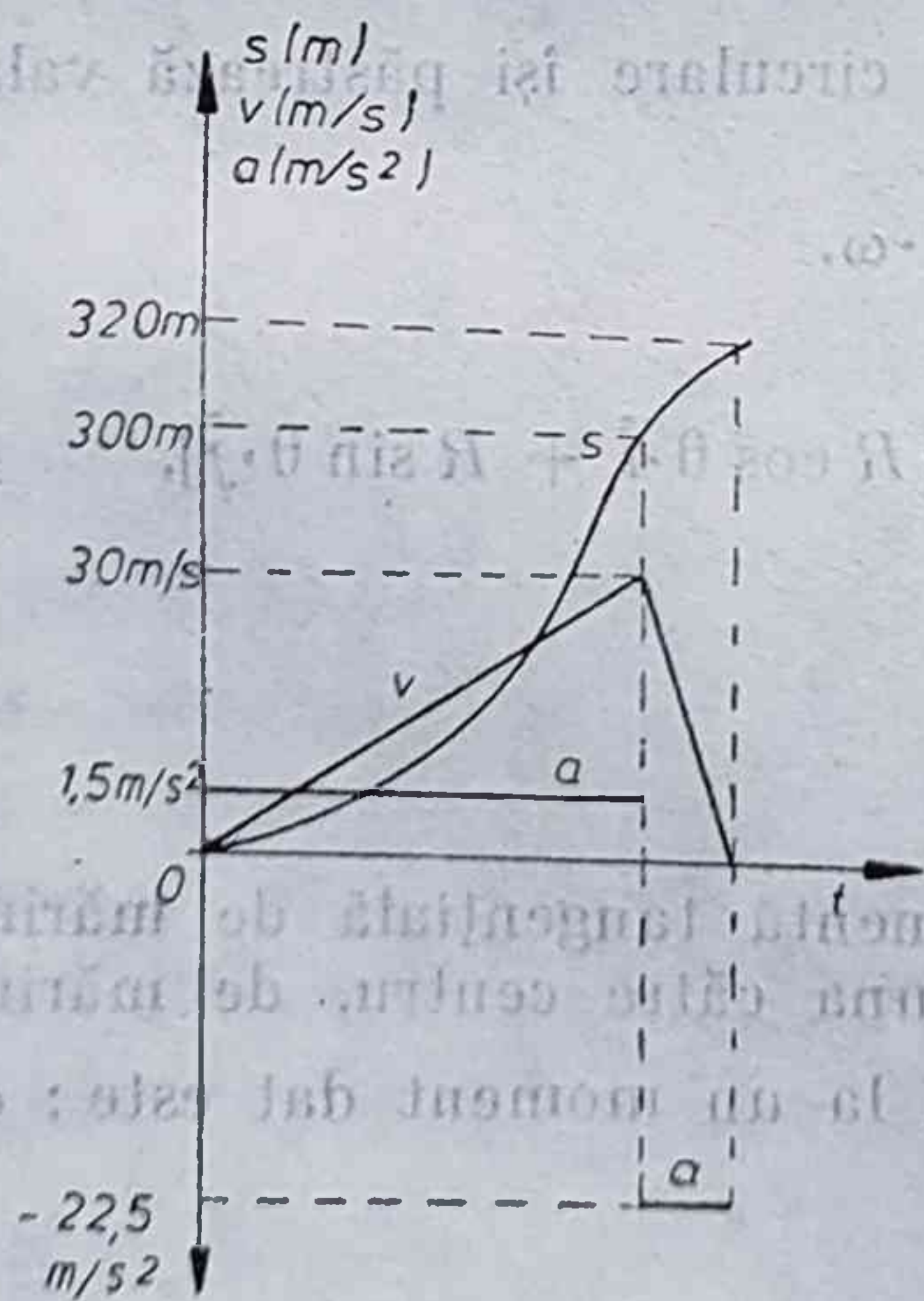


Fig. 7.15

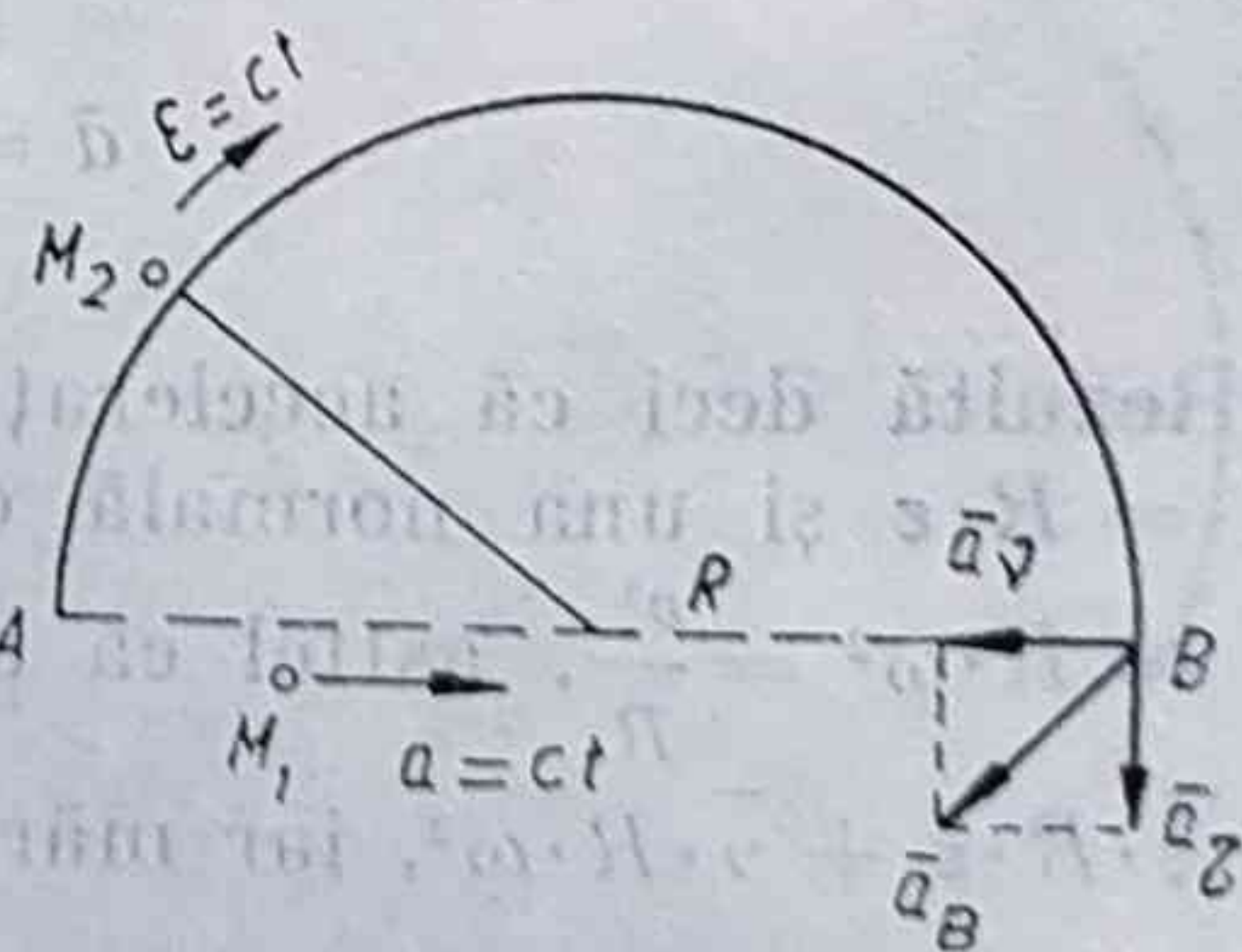


Fig. 7.16

Rezolvare

Legile de mișcare ale mobilelor ajunse în B sînt :
pentru M_1 :

$$s = \frac{a \cdot t^2}{2};$$

pentru M_2 :

$$\theta = \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}; \quad \omega = \varepsilon \cdot t.$$

În B ele devin :

$$2R = \frac{a \cdot t_B^2}{2}; \quad \pi = \frac{\varepsilon \cdot t_B^2}{2}; \quad \omega_B = \varepsilon \cdot t_B.$$

Rezultă :

$$t_B = 2 \sqrt{\frac{R}{a}}; \quad \varepsilon = \frac{\pi \cdot a}{2R}; \quad \omega_B = \pi \sqrt{\frac{a}{R}}.$$

Accelerația mobilului M_2 ajuns în B va avea componentele :

$$a_B \begin{cases} a_\tau = R \cdot \varepsilon = \frac{\pi \cdot a}{2}; \\ a_n = R \cdot \omega^2 = \pi^2 \cdot a. \end{cases} \quad \text{Deci : } |\bar{a}_B| = \frac{\pi \cdot a}{2} \sqrt{1 + 4\pi^2}.$$

8.

CINEMATICA CORPULUI SOLID RIGID

8.1. NOȚIUNI GENERALE

Prin corp solid rigid sau corp solid indeformabil se înțelege un corp material care nu se deformează sub acțiunea forțelor care ar acționa asupra sa.

Natura și industria oferă suficient de multe exemple de corpuri destul de dure pentru ca deformațiile ce apar să poată fi considerate cu totul neglijabile.

Se poate astfel imagina un corp solid rigid ca fiind o mulțime de particule a căror așezare este bine stabilită, distanța între două particule anume fiind o constantă.

Poziția unei particule este un punct P al spațiului afin (ε) al geometriei concrete.

Dacă corpul solid se mișcă în spațiu și timp, rezultă că pozițiile particulei corespunzătoare la două momente t_1 și t_2 se vor putea nota $P(t_1)$ și $P(t_2)$. Printr-o deplasare corespunzătoare se va putea transforma $P(t_1)$ în $P(t_2)$, oricare ar fi momentele t_1 și t_2 și oricare ar fi particula din corp. O astfel de deplasare este o izometrie pozitivă și are o serie de proprietăți importante (fig. 8.1, a, b)

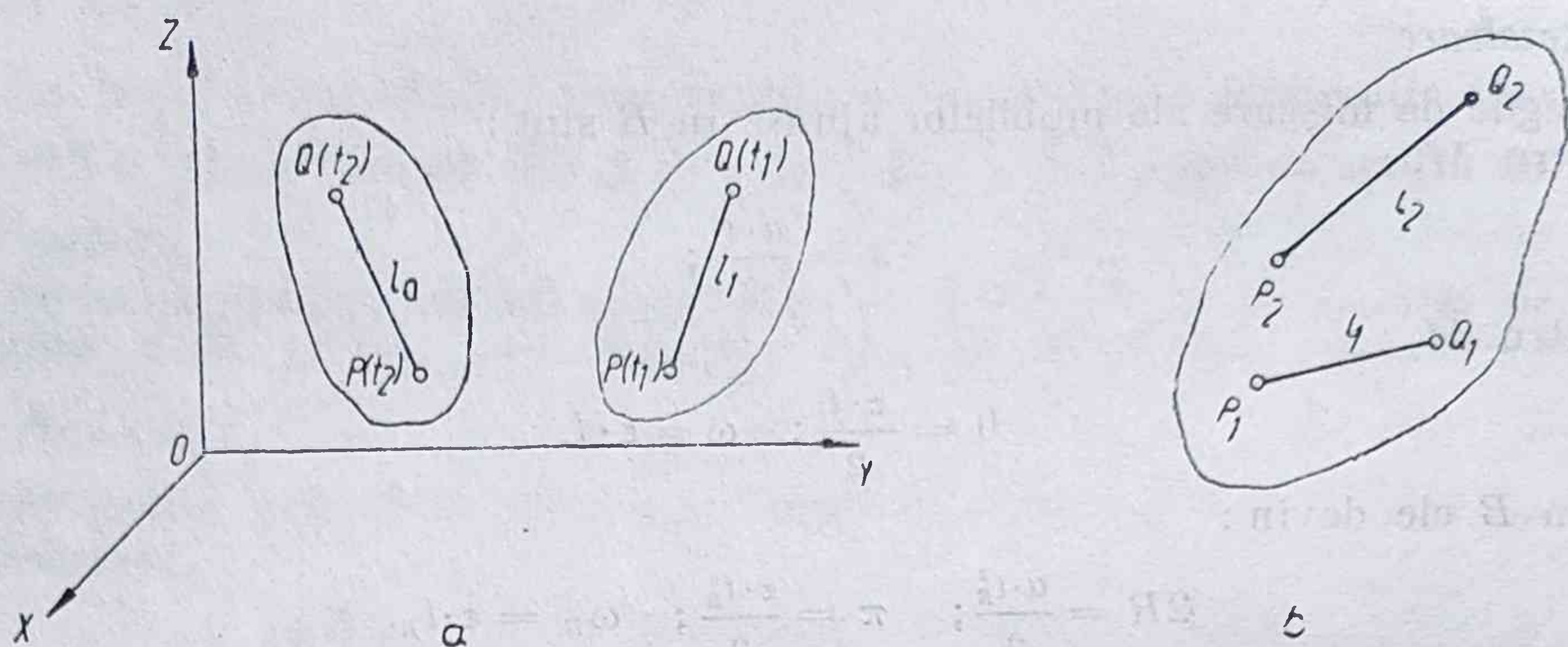


Fig. 8.1

a) Dacă P și Q sînt pozițiile a două particule ale solidului la un același moment dat t , modulul (mărimea) segmentului PQ este invariabil în timp, adică : $|\overline{PQ}|^2 = l_0^2$.

b) Dacă P_1, Q_1, P_2, Q_2 sînt pozițiile a patru particule, la un moment dat, ale unui solid rigid, și $\vec{l}_1 = \overline{P_1Q_1}$ iar $\vec{l}_2 = \overline{P_2Q_2}$, produsul scalar $\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2$ este independent de timp, adică :

$$\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 = \text{const.} \quad (8.1)$$

c) Dacă se notează vectorii de poziție ai punctelor P și Q cu \vec{r}_2 și \vec{r}_1 variabili în timp, lungimea segmentului PQ se poate scrie sub forma (fig. 8.2) :

$$|\overline{PQ}|^2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 = \text{const.}$$

Prin derivare se obține :

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) (\dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1) = 0 ;$$

sau, observînd că : $\dot{\vec{r}}_2 = \vec{v}_2$ și $\dot{\vec{r}}_1 = \vec{v}_1$ avem :

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = 0,$$

de unde :

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{v}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{v}_1$$

sau

$$\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{PQ} \cdot \vec{v}_2 = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{PQ} \cdot \vec{v}_1. \quad (8.2)$$

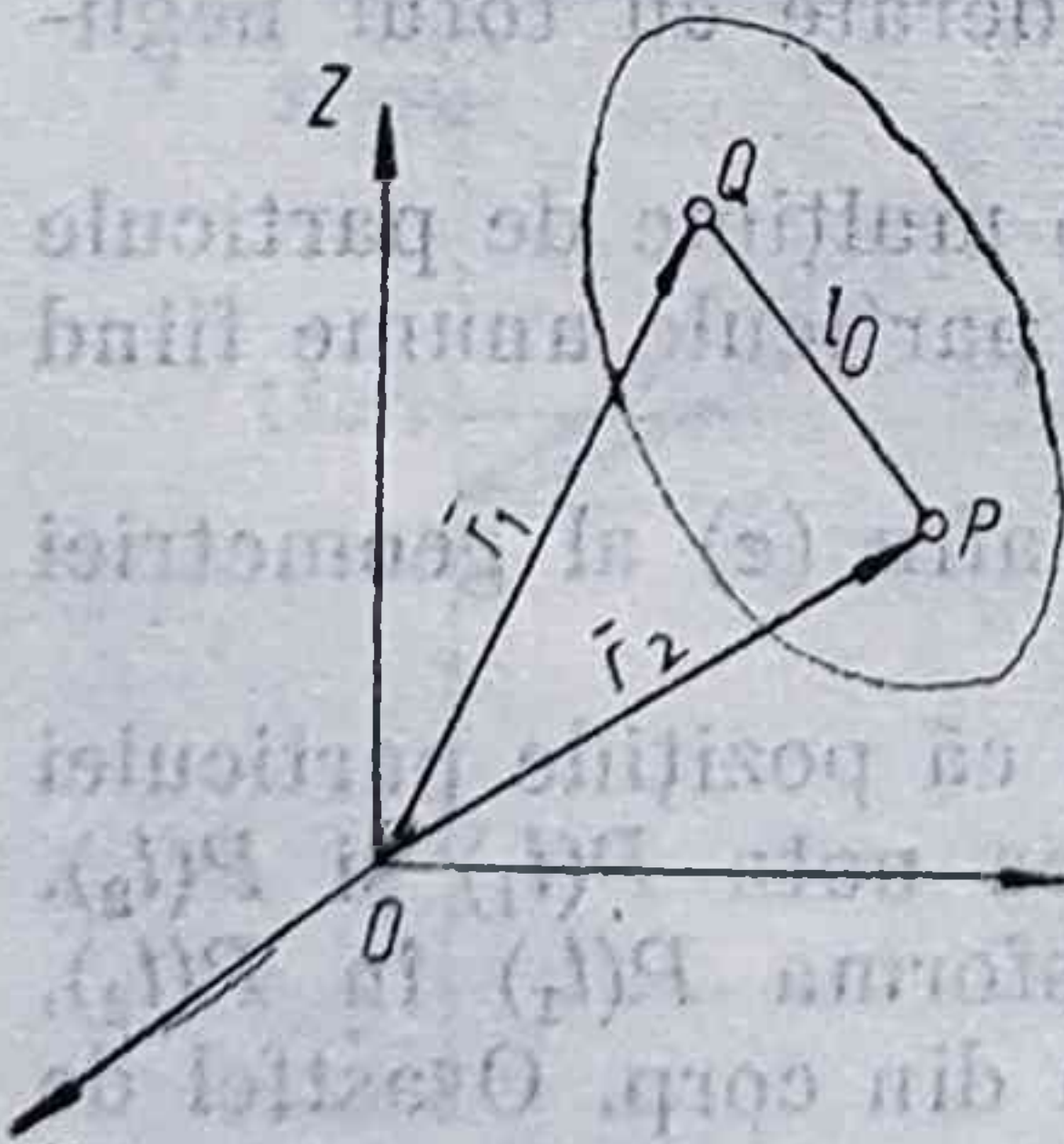


Fig. 8.2

Această relație constituie condiția de compatibilitate a vitezelor în deplasarea corpului solid rigid.

Această relație arată că proiecțiile vitezelor a două puncte oarecare P și Q ale solidului pe direcția dreptei PQ ce unește aceste puncte (cu un sens pozitiv stabilit) sînt egale.

d) Pornindu-se de la relația $\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 = \text{constantă}$, se obține prin derivare :

$$\vec{l}_1 \cdot \frac{d\vec{l}_2}{dt} + \vec{l}_2 \cdot \frac{d\vec{l}_1}{dt} = 0,$$

de unde :

$$\bar{l}_1 \cdot \frac{d\bar{l}_2}{dt} = -\bar{l}_2 \frac{d\bar{l}_1}{dt}. \quad (8.3)$$

Derivarea segmentului de lungime constantă dar variabilă ca poziție în raport cu timpul, $\frac{dl}{dt}$, constituie în mulțimea vectorilor din spațiul vectorial afin cu 3 dimensiuni o aplicație liniară antisimetrică. Se consideră E un spațiu vectorial asociat spațiului afin (ϵ) cu trei dimensiuni și L o aplicație a lui (E) în (E) , astfel că unui vector \bar{a} din E prin această aplicație îi corespunde un vector $L(\bar{a})$ tot în (E) .

Aplicația L este prin definiție antisimetrică dacă pentru orice vector \bar{a} și \bar{b} din (E) avem :

$$\bar{a} \cdot L(\bar{b}) = -\bar{b} \cdot L(\bar{a}). \quad (8.4)$$

Dacă se consideră vectorii \bar{a}_1 și \bar{a}_2 din (E) și α_1 și α_2 două numere reale și se consideră vectorii : $\bar{a} = \alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2$ și \bar{b} se poate scrie :

$$(\alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2) \cdot L(\bar{b}) = -\bar{b} \cdot L(\alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2), \quad (8.5, a)$$

sau :

$$\alpha_1 \cdot \bar{a}_1 \cdot L(\bar{b}) + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 \cdot L(\bar{b}) = -\bar{b} \cdot L(\alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2).$$

În baza definiției date se poate scrie :

$$\bar{a}_1 \cdot L(\bar{b}) = -\bar{b} \cdot L(\bar{a}_1); \quad \bar{a}_2 \cdot L(\bar{b}) = -\bar{b} \cdot L(\bar{a}_2)$$

de unde rezultă :

$$-\bar{b}[\alpha_1 \cdot L(\bar{a}_1) + \alpha_2 \cdot L(\bar{a}_2)] = -\bar{b} \cdot L(\alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2)$$

valabilă pentru orice \bar{b} astfel că se poate deduce că aplicația L este liniară :

$$\alpha_1 \cdot L(\bar{a}_1) + \alpha_2 \cdot L(\bar{a}_2) = L(\alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2). \quad (8.5, b)$$

Dacă se consideră baza \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} , expresia analitică a aplicației liniare este o matrice L :

$$L = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}. \quad (8.6)$$

Deoarece aplicația L este antisimetrică, se poate scrie :

$$\bar{i} \cdot L(\bar{i}) = -\bar{i} \cdot L(\bar{i}) \rightarrow \alpha_{11} = -\alpha_{11} \rightarrow \alpha_{11} = 0 \quad (8.7, a)$$

$$\bar{i} \cdot L(\bar{j}) = -\bar{j} \cdot L(\bar{i}) \rightarrow \alpha_{12} = -\alpha_{21}$$

Rezultă că matricea L este antisimetrică și se poate scrie :

$$L = \begin{vmatrix} 0 & -S_3 & +S_2 \\ S_3 & 0 & -S_1 \\ -S_2 & +S_1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (8.7, b)$$

[Dacă vectorul \vec{a}' este transformatul lui \vec{a} prin aplicația L , avem :

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -S_3 & +S_2 \\ +S_3 & 0 & -S_1 \\ -S_2 & +S_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 S_2 - a_2 S_3 \\ a_1 S_3 - a_3 S_1 \\ a_2 S_1 - a_1 S_2 \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

Dacă S_1 , S_2 și S_3 sînt componentele vectorului $\vec{\omega}$ atunci rezultă :

$$\vec{a}' = \vec{\omega} \times \vec{a}, \quad (8.9)$$

unde $\vec{\omega}$ este vectorul de aplicație antisimetrică L . Revenindu-se la derivata în raport cu timpul $\frac{d\vec{l}}{dt}$ se observă că ea constituie o aplicație liniară antisimetrică,

astfel că se poate scrie : $\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{l}$, în care $\vec{\omega}$ este vectorul de aplicație antisimetrică, care, în acest caz poartă numele de vector viteză unghiulară.

Pornind de la relația : $\vec{l} = \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$ se obține :

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d(\vec{OQ})}{dt} - \frac{d(\vec{OP})}{dt} \quad \text{sau :} \quad \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{v}(Q) - \vec{v}(P),$$

de unde se obține : $\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{l} = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{PQ}$

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{PQ} \quad (8.10)$$

cunoscută sub numele de formula lui Euler pentru distribuția de viteze într-un corp solid rigid.

Relația $\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{PQ}$ permite să se afirme că vitezele punctelor unui corp solid rigid constituie un câmp antisimetric.

În concluzie, dacă se cunoaște viteza \vec{v}_P a unui punct P , și vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$, se poate determina viteza oricărui punct Q al corpului solid rigid.

Cîmpul accelerațiilor unui corp solid rigid. Dacă se derivează viteza punctului Q în raport cu timpul, se obține accelerația punctu Q , adică :

$$\vec{a}_Q = \frac{d\vec{v}_Q}{dt} = \frac{d\vec{v}_P}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{PQ} + \vec{\omega} \times \frac{d(\vec{PQ})}{dt}$$

sau :

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_P + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{PQ} + \vec{\omega} \times [\vec{v}_Q - \vec{v}_P],$$

de unde :

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_P + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{PQ} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{PQ}], \quad (8.11, a)$$

cunoscută sub numele de formula lui Euler pentru distribuția accelerațiilor într-un corp solid rigid.

Dezvoltînd dublul produs vectorial, se obține :

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_P + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{PQ} + (\vec{\omega} \cdot \vec{PQ})\vec{\omega} - \omega^2 \cdot \vec{PQ}, \quad (8.11, b)$$

din expresia accelerației se poate reține că accelerațiile punctelor corpului solid rigid formează un câmp antisimetric.

8.2. MIȘCAREA DE TRANSLAȚIE A UNUI CORP SOLID RIGID

Un corp solid rigid se află în mișcare de translație dacă izometria face să-corespundă unei particule a solidului de la poziția P_0 la momentul t_0 , poziția P a aceleiași particule la momentul t (fig. 8.3).

Rezultă :

$$\vec{l} = \overline{PQ} = \overline{P_0Q_0}; \quad (8.12, a)$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = 0 \text{ sau : } \vec{v}_Q = \vec{v}_P. \quad (8.12, b)$$

Rezultă următoarele concluzii : cîmpul de viteze este la un moment t uniform (vectorul viteză este un vector liber) ; vectorul de rotație $\vec{\omega}$ este nul. Rezultă că și cîmpul accelerațiilor este uniform

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_P. \quad (8.12, c)$$

Deci și vectorul accelerație este un vector liber. Torsorul cinematic este un cuplu de viteze unghiulare de rotație al cărui moment este $\vec{v}_P = \vec{v}(t)$. Dacă se cunoaște poziția inițială a solidului rigid și traiectoria unuia din puncte, se pot cunoaște traiectoriile celorlalte puncte. Astfel, se pot da ca exemple :

— *translațiile rectilinii*, în care traiectoriile tuturor punctelor sînt drepte paralele. Vectorul viteză $\vec{v}(t)$ păstrează direcția constantă. Dacă $\vec{v}(t) = \text{const.}$, vectorul este independent de timp, iar translația este rectilinie și cu viteză constantă (fig. 8.4) ;

— *translația circulară*, în care traiectoriile tuturor punctelor solidului sînt cercuri ce au aceeași rază ca mărime. Mărimea vitezei $v(t)$ este, la un moment dat, aceeași pentru toate punctele solidului (fig. 8.5).

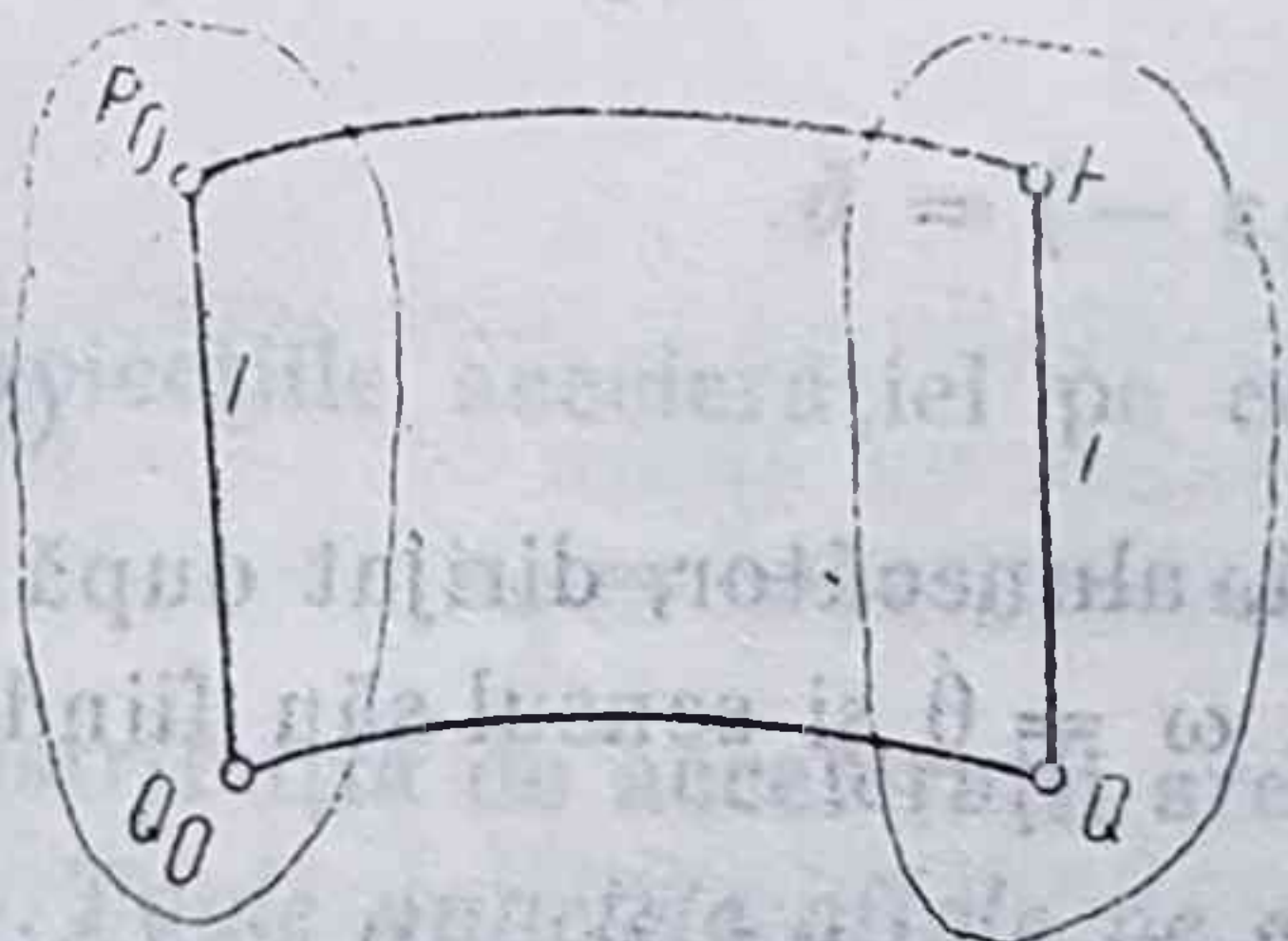


Fig. 8.3

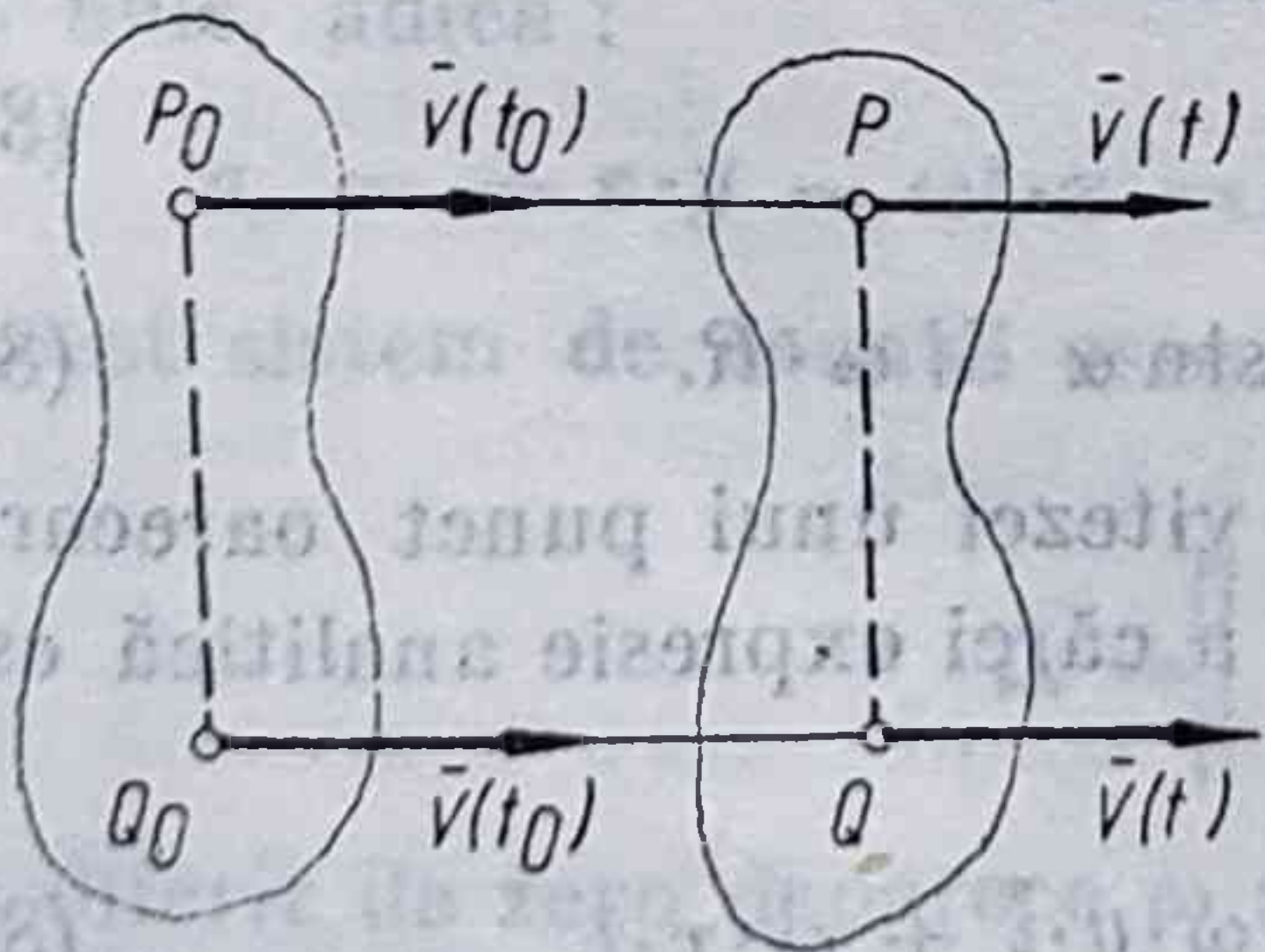


Fig. 8.4

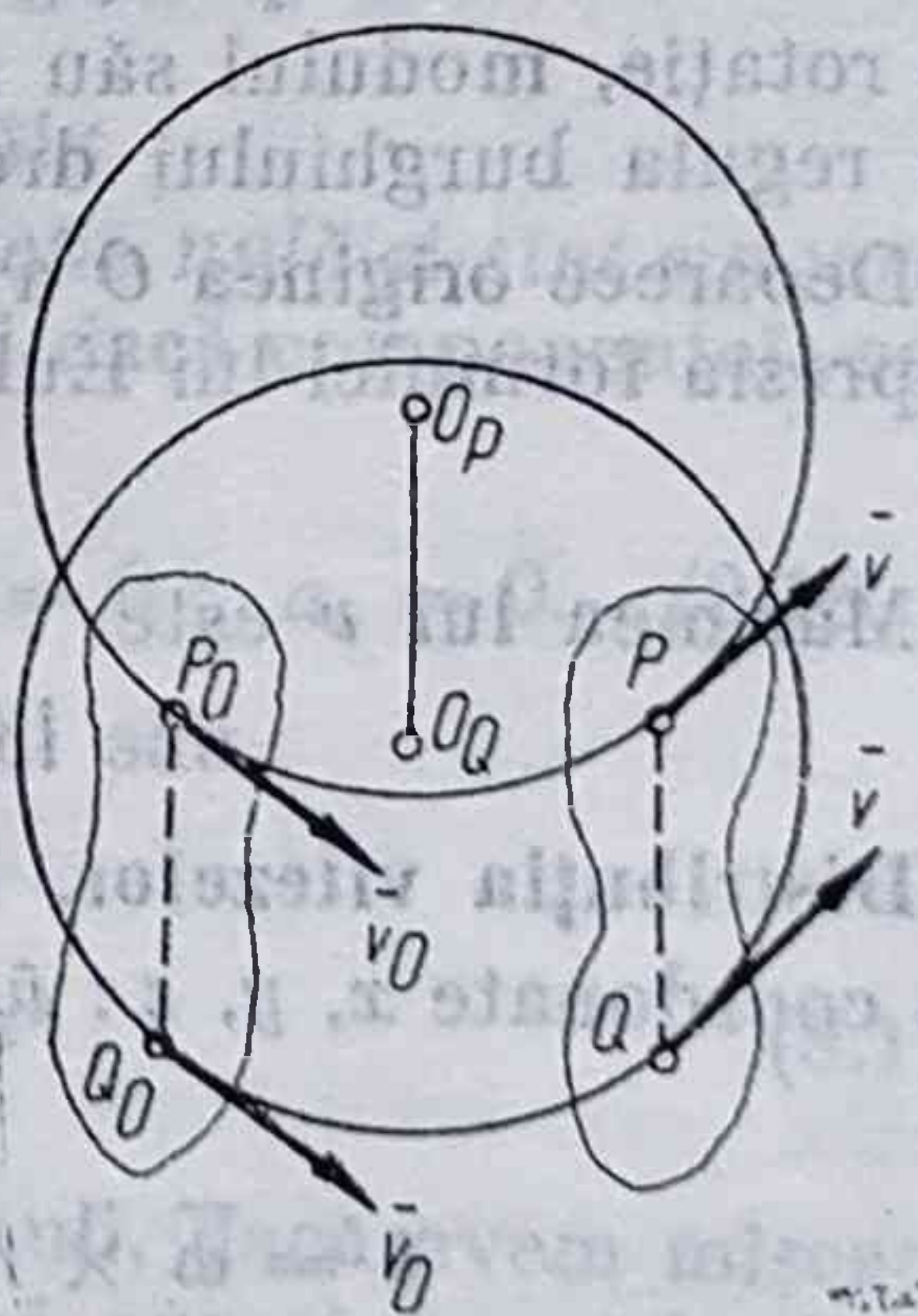


Fig. 8.5

8.3. MIȘCAREA DE ROTAȚIE A SOLIDULUI RIGID ÎN JURUL UNEI AXE FIXE

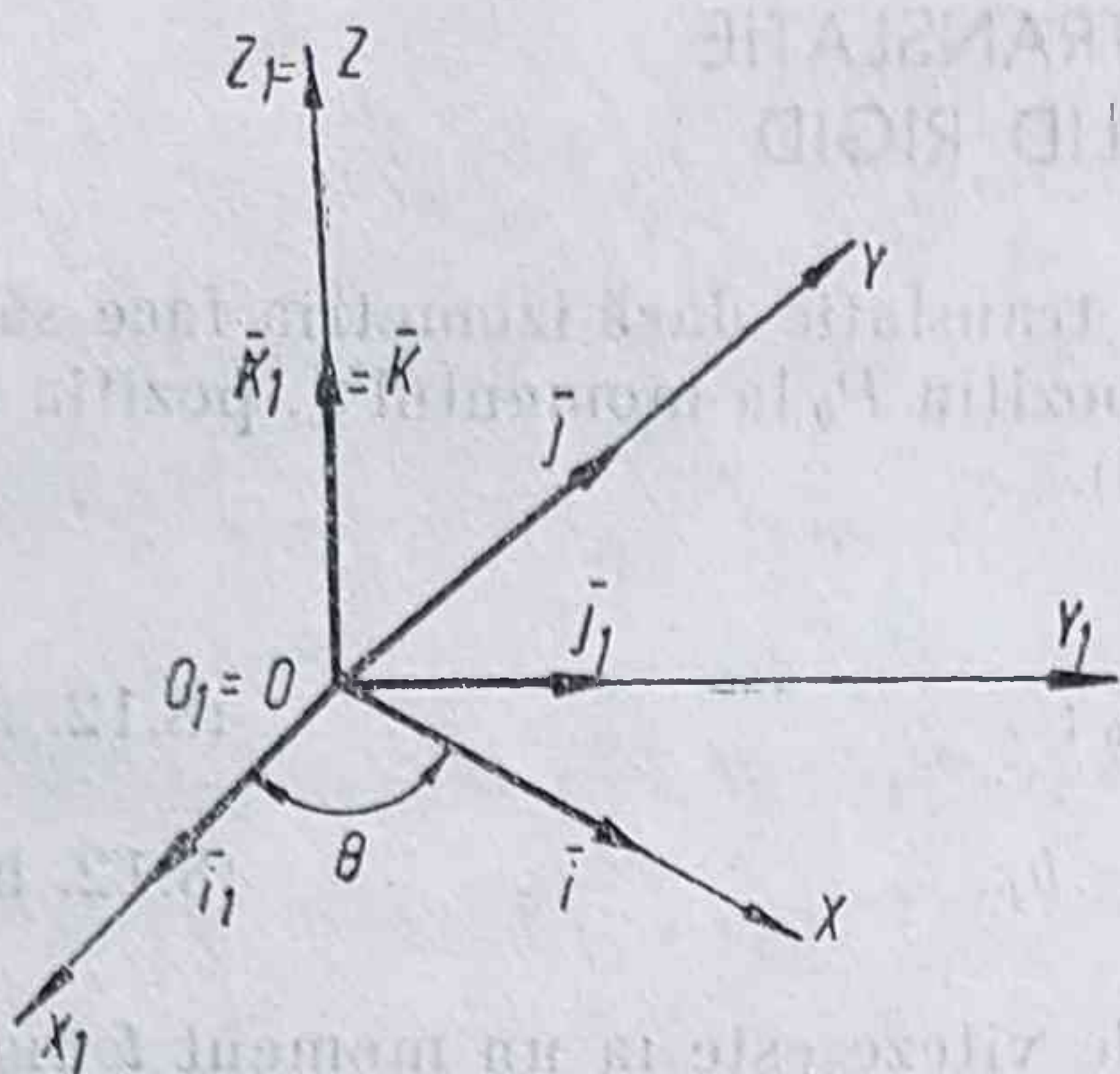


Fig. 8.6

Un corp solid rigid este în mișcare de rotație dacă în tot timpul mișcării două puncte ale rigidului rămân fixe, deci există o dreaptă fixă, numită axă de rotație. Punctele solidului descriu cercuri situate în planuri perpendiculare pe axa de rotație.

Fie sistemul fix $O_1x_1y_1z_1$ și un sistem mobil atașat rigidului $Oxyz$, avînd originea comună $O_1 = O$ și axa fixă O_1z_1 aleasă să coincidă cu axa Oz (fig. 8.6). Planul mobil xOy se rotește în timpul mișcării în planul fix $x_1O_1y_1$ cu unghiul $\theta = \theta(t)$ ce constituie parametrul mișcării. Variația lui θ este $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, cum se știe de la mișcarea circulară.

Pentru a găsi o semnificație vectorului $\bar{\omega}$, se vor exprima versorii triedrului mobil față de cel fix :

$$\begin{aligned}\bar{i} &= \cos \theta \cdot \bar{i}_1 + \sin \theta \cdot \bar{j}_1; \\ \bar{j} &= -\sin \theta \cdot \bar{i}_1 + \cos \theta \cdot \bar{j}_1; \\ \bar{k} &= \bar{k}_1.\end{aligned}\quad (8.13, a)$$

Prin derivare se obține :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{i}} &= -\dot{\theta} \sin \theta \cdot \bar{i}_1 + \dot{\theta} \cos \theta \cdot \bar{j}_1 = \dot{\theta} \cdot \bar{j} = \bar{\omega} \times \bar{i} \\ \dot{\bar{j}} &= -\dot{\theta} \cos \theta \cdot \bar{i}_1 - \dot{\theta} \sin \theta \cdot \bar{j}_1 = -\dot{\theta} \cdot \bar{i} = \bar{\omega} \times \bar{j} \\ \dot{\bar{k}} &= 0 = \bar{\omega} \times \bar{k}\end{aligned}\quad (8.13, b)$$

Rezultă că :

$$\bar{\omega} = \dot{\theta} \cdot \bar{k} = \omega \cdot \bar{k}, \quad (8.14)$$

adică vectorul $\bar{\omega}$ este un vector de direcție fixă, alunecător, dirijat după axa de rotație, modulul său fiind viteza unghiulară $\omega = \dot{\theta}$ și sensul său fiind dat de regula burghiului drept.

Deoarece originea O a sistemului mobil este fixă, rezultă $\bar{v}_0 = 0$ și deci, din expresia formulei lui Euler pentru viteze, rezultă că :

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (8.15)$$

Mărimea lui v este

$$|\bar{v}| = |\bar{\omega} \times \bar{r}| = \omega \cdot r \sin \alpha = \omega \cdot R. \quad (8.16)$$

Distribuția vitezelor. Pornind de la relația vitezei unui punct oarecare P de coordonate x, y, z : $\bar{v}_P = \bar{\omega} \times \overline{OP} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ a cărei expresie analitică este :

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega \cdot y \cdot \bar{i} + \omega \cdot x \cdot \bar{j}, \quad (8.17)$$

se observă că avem următoarele componente ale vitezei : $v_x = -\omega \cdot y$; $v_y = \omega \cdot x$; $v_z = 0$. Distribuția vitezelor în cazul mișcării de rotație în jurul unei axe se caracterizează prin următoarele proprietăți (fig. 8.7) :

— toate punctele care au viteza nulă aparțin axei de rotație ;

— toate punctele au vitezele conținute în plane perpendiculare pe axa de rotație Oz ;

— toate punctele aflate pe o dreaptă perpendiculară pe axa de rotație și o intersectează într-un punct, au vitezele proporționale cu distanța lor pînă la axă, iar direcția vitezei este perpendiculară pe rază ;

— toate punctele situate pe o dreaptă paralelă cu axa de rotație au aceeași viteză.

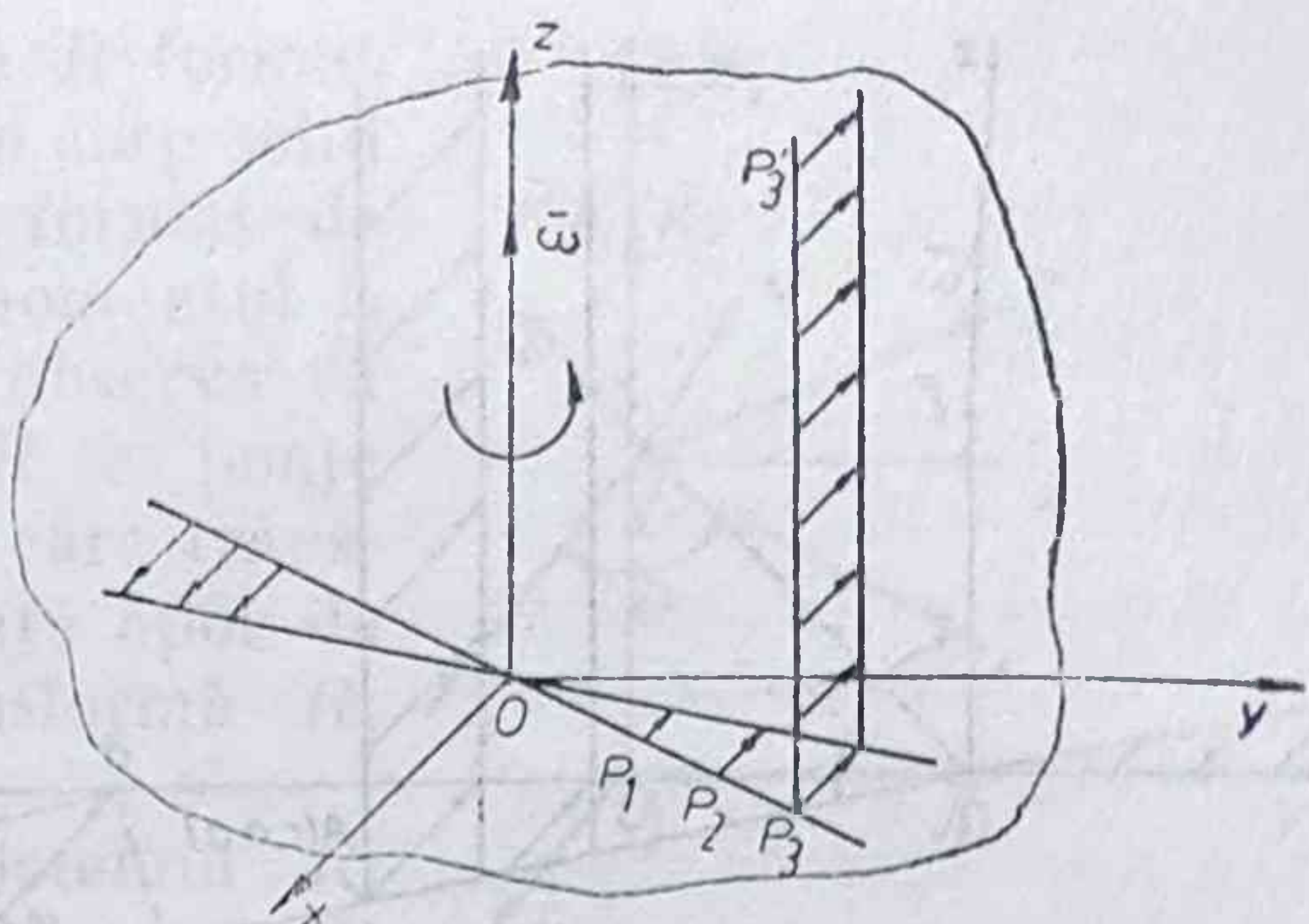


Fig. 8.7

Distribuția accelerațiilor. Vectorul accelerație se obține prin derivarea vectorului viteză și rezultă observînd că :

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}}_p, \quad \ddot{\mathbf{a}} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \bar{\mathbf{k}} \times \bar{\mathbf{r}} + \frac{d\theta}{dt} \bar{\mathbf{k}} \times \dot{\mathbf{v}}_p.$$

În ce privește vectorul $\bar{\varepsilon}$, accelerație unghiulară, el este $\bar{\varepsilon} = \ddot{\theta} \cdot \bar{\mathbf{k}} = \dot{\omega} \cdot \bar{\mathbf{k}} = \varepsilon \bar{\mathbf{k}}$

$$\ddot{\mathbf{a}} = \varepsilon \cdot \bar{\mathbf{k}} \times \bar{\mathbf{r}} + \omega \bar{\mathbf{k}} \times [\omega \bar{\mathbf{k}} \times \bar{\mathbf{r}}]; \quad \ddot{\mathbf{a}} = \varepsilon \bar{\mathbf{k}} \times \bar{\mathbf{r}} + [\omega^2 [(\bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{r}}) \bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{r}}].$$

Exprimînd analitic, se obține :

$$\ddot{\mathbf{a}} = \bar{\varepsilon} \times \bar{\mathbf{r}} + \bar{\omega} \times \dot{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & \omega \\ -y \cdot \omega & x \cdot \omega & 0 \end{vmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{a}} = (-\varepsilon \cdot y - \omega^2 \cdot x) \bar{\mathbf{i}} + (\varepsilon \cdot x - \omega^2 \cdot y) \bar{\mathbf{j}}. \quad (8.18, a)$$

Proiecțiile accelerației pe cele trei axe ale triedrului mobil vor fi :

$$a_x = -\varepsilon \cdot y - \omega^2 \cdot x; \quad a_y = \varepsilon \cdot x - \omega^2 \cdot y; \quad a_z = 0.$$

Distribuția de accelerații are următoarele proprietăți :

— Toate punctele aflate pe axe de rotație au accelerație nulă și sînt singurele puncte cu accelerație nulă. Vectorul accelerație este nul dacă componentele sale sînt nule, adică :

$$a_x = -\varepsilon \cdot y - \omega^2 \cdot x = 0; \quad a_y = \varepsilon \cdot x - \omega^2 \cdot y = 0; \quad a_z = 0. \quad (8.18, b)$$

Acest sistem de ecuații este omogen, determinantul său :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\omega^2 & -\varepsilon \\ \varepsilon & -\omega^2 \end{vmatrix} = \omega^4 + \varepsilon^2 \quad (8.19)$$

este diferit de zero deoarece ω și ε nu sînt simultan nuli, dacă avem mișcare. Rezultă soluția banală $x=0$; $y=0$, ceea ce arată că numai punctele de pe axa de rotație au accelerație nulă.

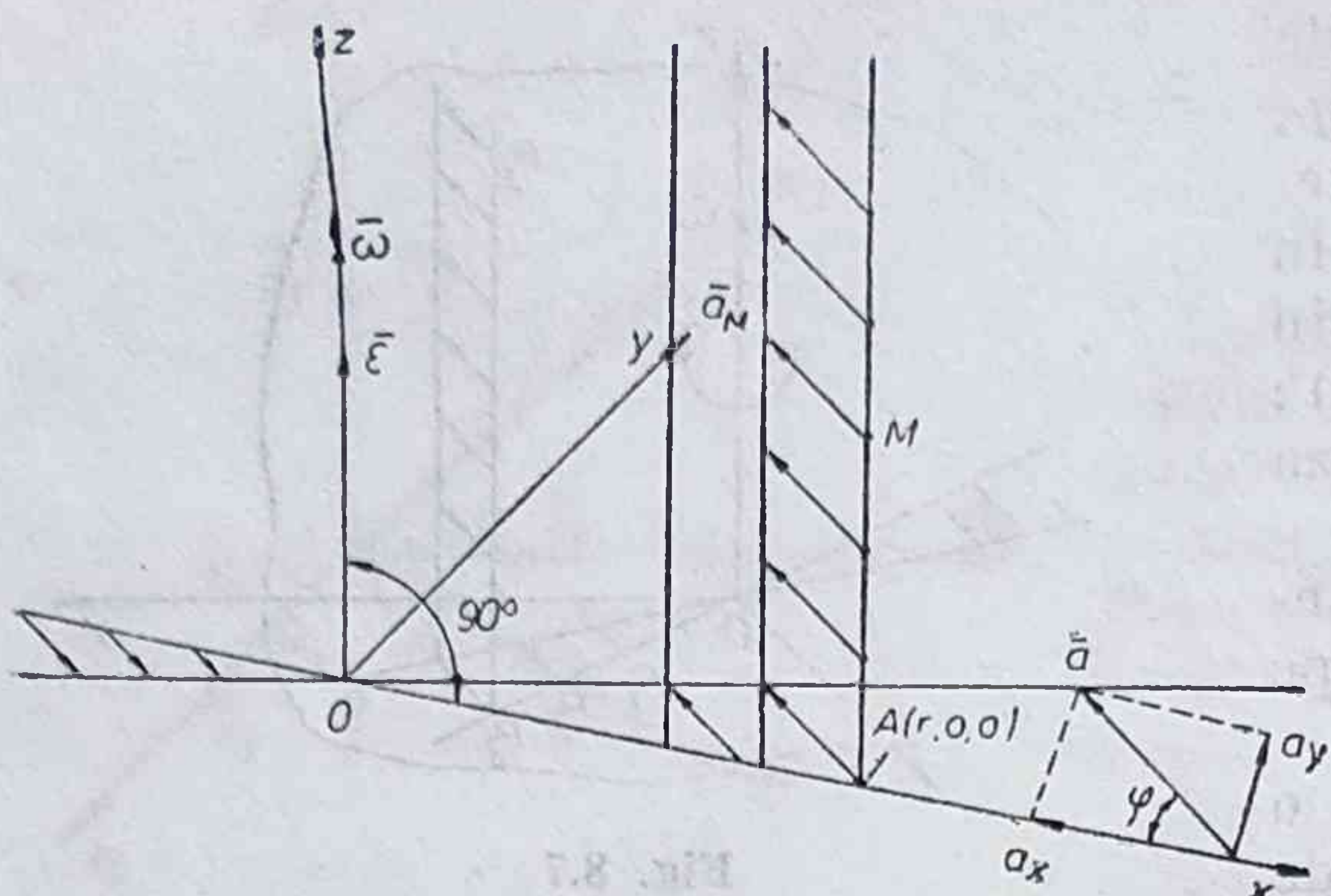


Fig. 8.8

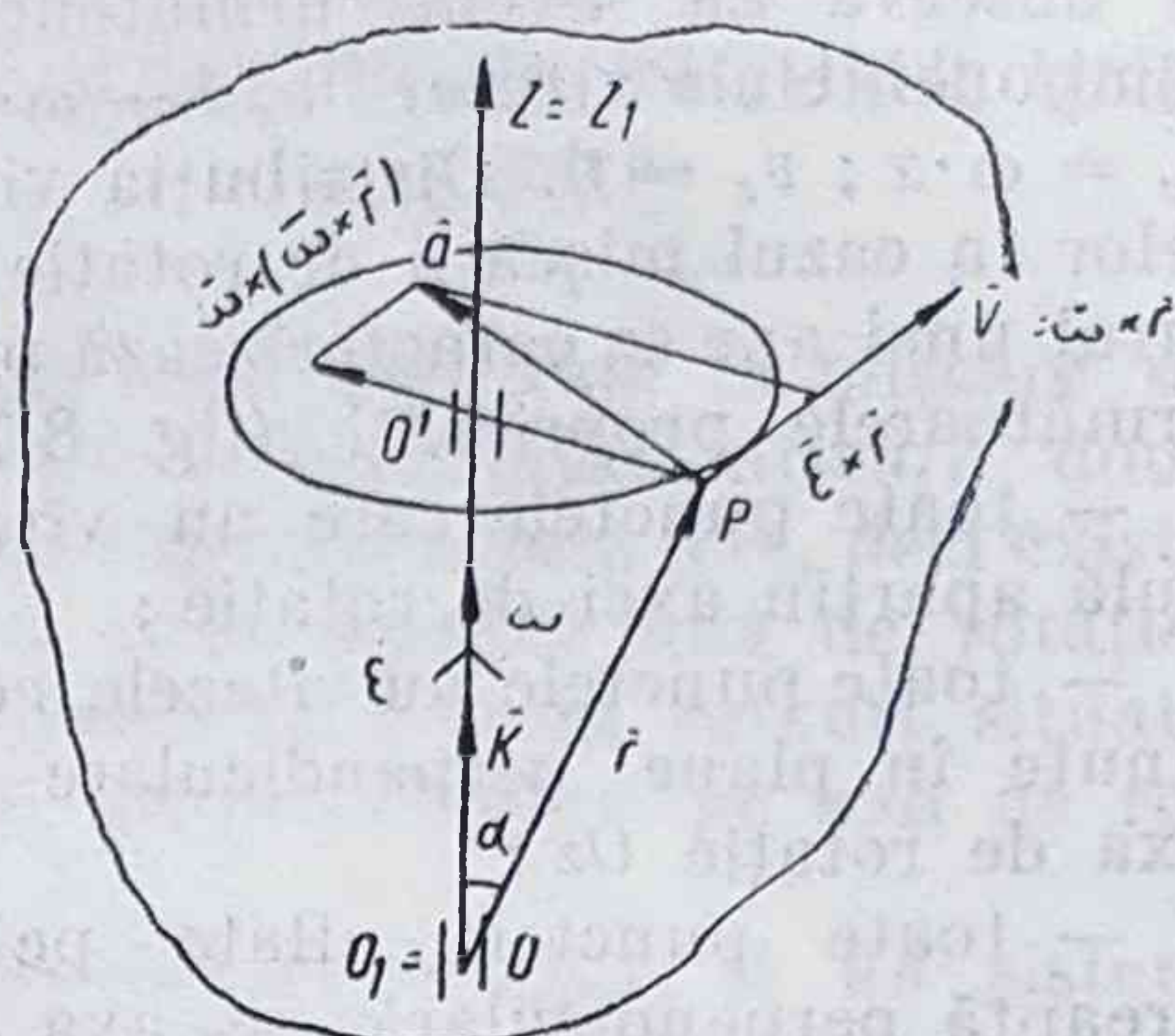


Fig. 8.9

Vectorii accelerației au suportii cuprinși în plane normale pe axa de rotație. Acest lucru este evident deoarece componenta $a_z = 0$.

— Accelerațiile punctelor de pe o dreaptă perpendiculară pe axa de rotație, care intersectează axa de rotație într-un punct O , variază liniar astfel că vîrfurile vectorilor accelerație ale diferitelor puncte de pe dreapta Δ se află pe o aceeași dreaptă, scalarul accelerațiilor fiind proporțional cu distanța de la punctul respectiv la axa de rotație, iar direcțiile accelerațiilor făcînd un unghi constant cu dreapta Δ (fig. 8.8).

Se consideră dreapta Δ drept axa Ox și un punct oarecare de pe această axă $A(x = l, y = 0, z = 0)$. Expresia accelerației este : $a_x = -\epsilon \cdot y - \omega^2 \cdot x = -l \cdot \omega^2$; $a_y = +\epsilon \cdot x - \omega^2 \cdot y = +l \cdot \epsilon$; $a_z = 0$.

$$\text{Rezultă : } |\bar{a}| = l \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} \text{ (mărima accelerației);} \quad (8.20)$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{|\bar{a}_y|}{|\bar{a}_x|} = \frac{|\epsilon|}{\omega^2} \text{ (direcția).} \quad (8.21)$$

Punctele situate pe o dreaptă paralelă cu axa de rotație au aceeași accelerație. Se observă că în expresia componentelor accelerației nu apare cota z a punctului astfel că se deduce că mărimea și direcția accelerației depind numai de coordonatele x, y .

În figura 8.9 este reprezentată viteza și accelerația unui punct P al rigidului în rotație.

8.4. MIȘCAREA ELICOIDALĂ

8.4.1. MIȘCAREA ELICOIDALĂ SIMPLĂ

Un corp solid rigid are o mișcare elicoidală simplă dacă izometria, care face să corespundă poziția sa la un moment t_0 cu poziția sa la un alt moment t_1 , este rezultatul unei mișcări de translație și a unei mișcări de rotație în jurul unei axe paralele cu direcția de translație.

Se consideră un sistem de referință R format de punctul O și baza $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ solidar cu un corp solid rigid (C) (fig. 8.10) și un alt sistem R_1 format de punctul O_1 și baza $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$. Dacă în momentul t_0 sistemul R coincide cu R_1 se poate observa că pentru a trece de la sistemul R_1 la R se poate efectua în prealabil o translație O_1O , care transformă R_1 în sistemul R_2 ($O\bar{i}_2\bar{j}_2\bar{k}_2$) urmată apoi de o rotație cu un unghi θ care transformă R_2 în R .

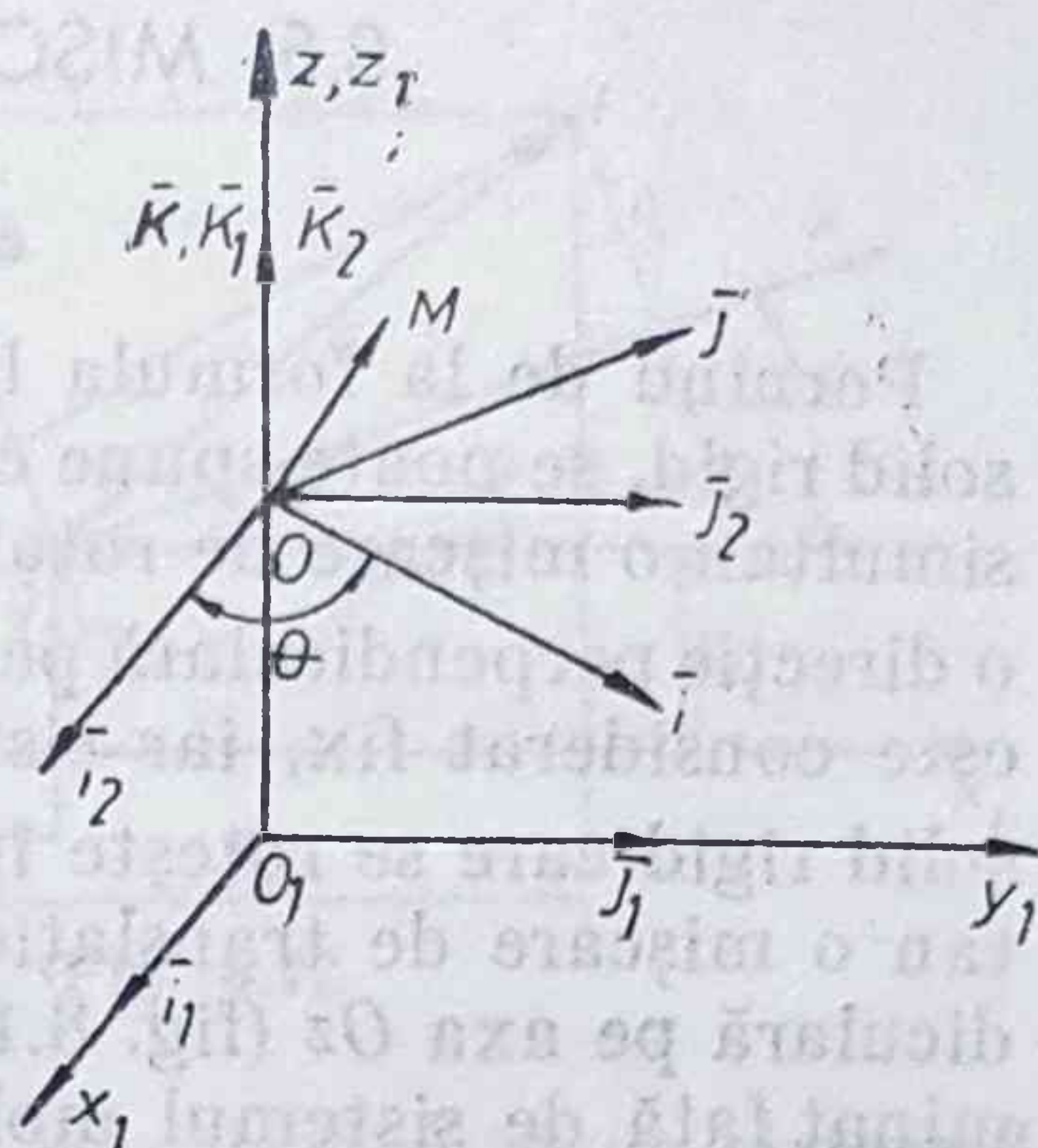


Fig. 8.10

Corpul solid (C) este solidar cu sistemul R . Rezultă că vitezele punctelor sale în raport cu R sînt nule, iar în raport cu sistemul R_2 expresiile vitezelor punctelor sînt:

$$\bar{v}_{R_2}(M) = \frac{d\theta}{dt} \bar{k} \times \overline{OM}. \quad (8.22)$$

Pentru a obține viteza punctului M în raport cu sistemul R_1 se adaugă viteza de antrenare a sistemului R_2 față de R_1 și se obține: $\bar{v}_{R_1}(M) = \bar{v}_{R_1}(O) + \bar{v}_{R_2}(M)$. Dacă se notează $\overline{O_1O} = h\bar{k}$ și $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ se poate scrie

$$\bar{v}_{R_1}(M) = \frac{dh}{dt} \bar{k} + \omega \bar{k} \times \overline{OM}, \quad (8.23, a)$$

Primul termen constituie viteza de translație, dar al doilea constituie o viteză de rotație. Cei doi termeni formează împreună componentele vitezei unui punct M al corpului solid rigid sub acțiunea unui torsesor cinematic. Acest torsesor cinematic are în punctul O componentele: $\frac{d\theta}{dt} \bar{k}$ și $\frac{dh}{dt} \bar{k}$; prima componentă fiind o viteză unghiulară de rotație, iar a doua o viteză de translație a corpului solid rigid (C) . Axa de rotație este axa centrală a torsesorului cinematic.

Pentru accelerații vom avea:

$$\bar{a}_{R_1}(M) = \frac{d^2h}{dt^2} \bar{k} + \bar{\varepsilon} \times \overline{OM} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{OM}). \quad (8.23, b)$$

8.4.2. MIȘCAREA ELICOIDALĂ INSTANTANEE

În cazul unei mișcări oarecare a corpului solid rigid C , luînd în considerare două puncte O_1 și M ale sale, se poate scrie relația:

$$\bar{v}_{(M)} = \bar{v}_{(O_1)} + \bar{\omega} \times \overline{O_1M}. \quad (8.24)$$

În acest caz, torsesorul cinematic are în punctul O_1 componentele $\bar{\omega}$ și $\bar{v}_{(O_1)}$. Pe axa centrală a torsesorului, pentru un punct oarecare P se poate scrie că vectorul $\bar{\omega}$ și viteza punctului P sînt proporționale, și deci: $\bar{v}_{(P)} = \alpha \cdot \bar{\omega}$.

Un punct oarecare M al solidului are o viteză dată de relația:

$$\bar{v}_{(M)} = \bar{v}_{(P)} + \bar{\omega} \times \overline{PM}$$

sau:

$$\bar{v}_{(M)} = \alpha \cdot \bar{\omega} + \bar{\omega} \times \overline{PM}.$$

În concluzie, se poate afirma că axa centrală a torsesorului cinematic este la un moment oarecare axa de rotație a unei mișcări elicoidale simple. În acest caz, axa centrală este axa instantanee de rotație a corpului solid rigid.

8.5. MIȘCAREA PLAN-PARALELĂ (PLANĂ)

8.5.1. DISTRIBUȚIA VITEZELOR

Pornind de la formula lui Euler pentru distribuția de viteze într-un corp solid rigid, se poate spune că un corp are mișcare plan-paralelă (plană) dacă are simultan o mișcare de rotație în jurul unei axe și o mișcare de translație după o direcție perpendiculară pe axa de rotație, adică $\bar{\omega} \perp \bar{v}_0$. Sistemul de axe $O_1x_1y_1z_1$ este considerat fix, iar sistemul de axe $Oxyz$ este mobil și solidar cu corpul solid rigid care se rotește în jurul axei Oz cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ și are simultan o mișcare de translație cu viteza \bar{v}_0 paralelă cu planul xoy , deci perpendiculară pe axa Oz (fig. 8.11). Expresia vitezei unui punct oarecare M , determinat față de sistemul mobil prin vectorul de poziție \bar{r} , în raport cu sistemul de referință fix $O_1x_1y_1z_1$ este dată de formula lui Euler :

$$\bar{v}_M = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{v}_{0x} \cdot \bar{i} + \bar{v}_{0y} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix}; \bar{v}_M = i[v_{0x} - \omega \cdot y] + j[v_{0y} + \omega x]. \quad (8.25)$$

Se observă că viteza punctului M nu are componentă după axa Oz , de unde se deduce că punctul M se mișcă într-un plan paralel cu planul $x_1O_1y_1$, care este permanent paralel cu planul xOy . De aici a rezultat și numele de mișcare plan-paralelă.

Se observă, de asemenea, că există puncte care au la un moment dat viteza zero ; acestea au coordonatele :

$$\xi = -\frac{v_{0y}}{\omega}; \eta = \frac{v_{0x}}{\omega}, \zeta = \text{arbitrar}. \quad (8.26)$$

Aceste puncte, care au la un anumit moment viteza zero, se găsesc pe o dreaptă paralelă cu axa Oz în jurul căreia rigidul are o mișcare de rotație cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$. Această dreaptă își modifică de la un moment la altul poziția. Ea înțeapă planul în care se mișcă punctul M într-un punct I care poartă numele de centru instantaneu de rotație. Locul geometric al pozițiilor succesive ocupate de centrele instantanee de rotație, văzute dintr-un sistem de referință fix, poartă numele de *centroidă fixă* sau *bază*. Locul geometric al pozițiilor succesive ocupate de centrele instantanee de rotație, văzute dintr-un sistem de referință mobil, legat de corp, poartă numele de *centroidă mobilă* sau *rostogolitoare*.

Rostogolitoarea este permanent tangentă la bază în centrul instantaneu de rotație și se rostogolește fără alunecare peste bază. Axa instantanee de

rotație este în realitate în mișcare, atât față de sistemul de referință mobil, cât și față de cel fix. Axa instantanee de rotație și implicit centrul instantaneu de rotație prezintă importanță și interes prin faptul că distribuția de viteze pentru punctele corpului solid rigid este pentru un anumit moment identică cu cea pe care ar avea-o corpul dacă s-ar roti în jurul axei ce ar trece prin centrul instantaneu de rotație al corpului corespunzător poziției respective. Pentru un moment imediat următor avem alt centru

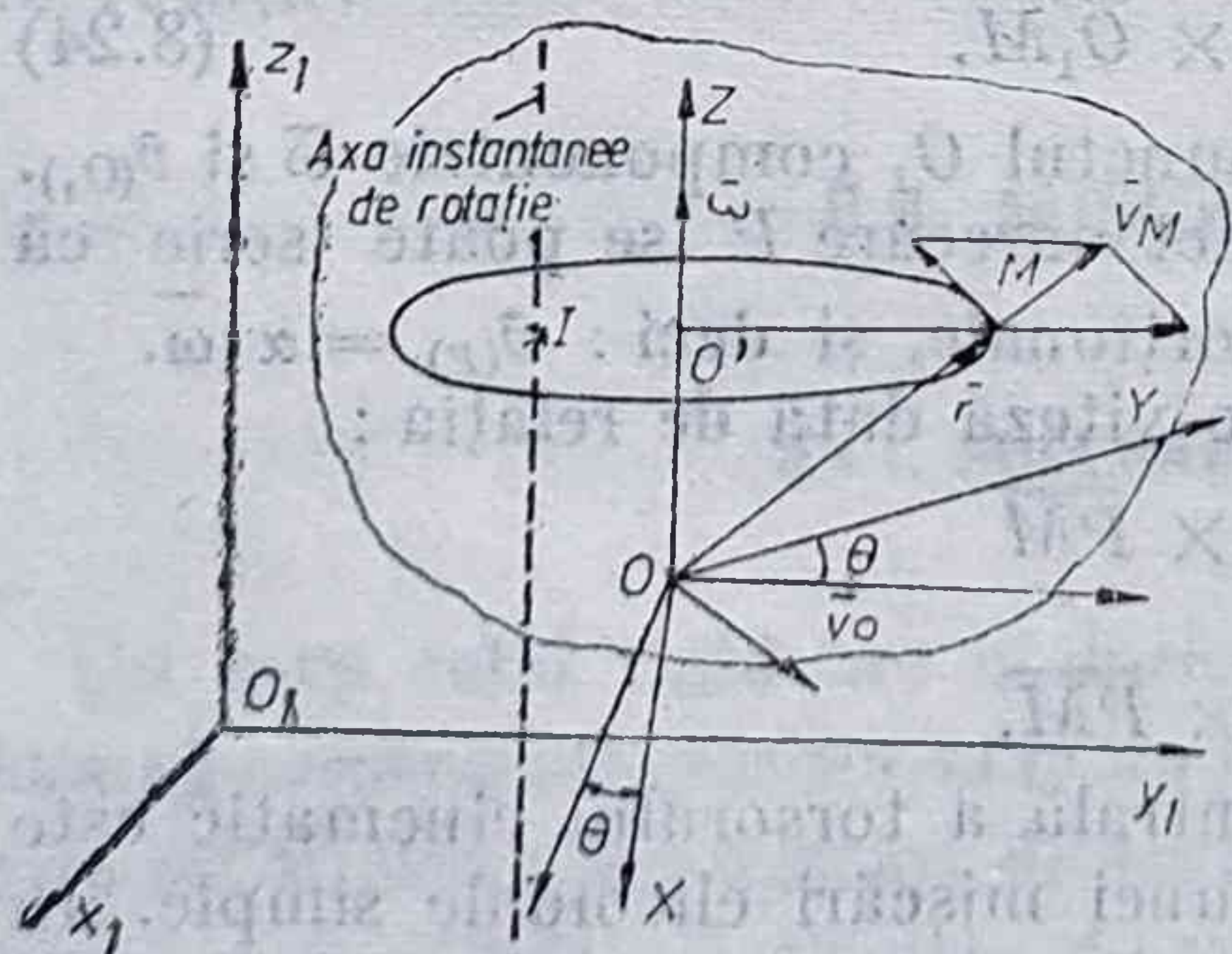


Fig. 8.11

instantaneu de rotație și altă distribuție de viteze, care ar corespunde mișcării simple de rotație în jurul noului punct.

În figura 8.12 este redată poziția centrului instantaneu de rotație I atât față de sistemul de referință fix prin coordonatele ξ_1 și η_1 , cât și față de sistemul de referință mobil prin coordonatele ξ și η .

Vectorul de poziție al centrului instantaneu de rotație I față de sistemul fix este dat de relația: $\vec{r}_1 = \vec{r}_o + \vec{r}$ (8.27, a) unde \vec{r}_o este vectorul de poziție al originii sistemului de referință mobil, iar \vec{r} este vectorul de poziție al centrului instantaneu de rotație I față de sistemul mobil.

Se mai poate scrie:

$$\xi_1 \cdot \vec{i}_1 + \eta_1 \cdot \vec{j}_1 = \vec{r}_o + \xi \cdot \vec{i} + \eta \cdot \vec{j}. \quad (8.27, b)$$

Derivînd în raport cu timpul, se obține:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}}_o + \dot{\xi} \cdot \vec{i} + \eta \cdot \dot{\vec{j}} + \dot{\xi} \cdot \vec{i} + \dot{\eta} \cdot \vec{j}.$$

Dar se poate observa că:

$$\dot{\vec{r}}_o + \dot{\xi} \cdot \vec{i} + \eta \cdot \dot{\vec{j}} = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_I = 0.$$

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\xi} \cdot \vec{i} + \dot{\eta} \cdot \vec{j} = \dot{\xi}_1 \cdot \vec{i}_1 + \dot{\eta}_1 \cdot \vec{j}_1.$$

Din această relație rezultă:

$$\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2,$$

și multiplicînd cu $(dt)^2$ rezultă: $ds_1^2 = ds^2$. (8.28).

Aceste relații ne arată că arcele pe cele două curbe sînt egale, fapt ce demonstrează că rostogolirea se realizează fără alunecare peste bază.

Dacă se ia în considerare segmentul $\overline{O'M}$ (v. fig. 8.11), O' fiind punctul de pe axa de rotație ce se află în planul în care se mișcă punctul M și se rabate planul acesta în planul hîrtiei (fig. 8.13, a), se constată că toate punctele

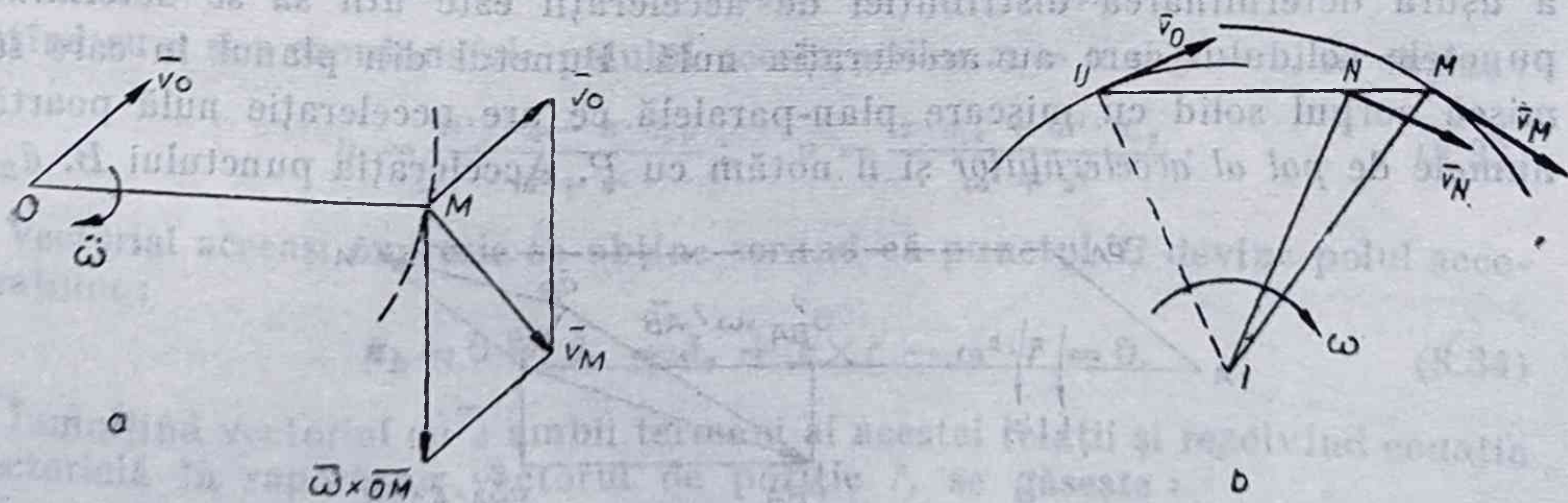


Fig. 8.13

segmentului au o aceeași viteză de translație \bar{v}_0 și o viteză de rotație în jurul punctului O a cărei mărime este dată de relația : $\bar{v}_{rot} = \bar{\omega} \times \overline{OM}$.

Viteza punctului M este deci :

$$\bar{v}_M = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OM}. \quad (8.29)$$

Poziția centrului instantaneu de rotație se determină ducînd normale la vitezele a două puncte ale segmentului OM (fig. 8.13, b). Distribuția vitezelor punctelor de pe bara OM este identică cu aceea ce rezultă din mișcarea de rotație a barei OM în jurul lui I . Se pot scrie relațiile :

$$v_0 = |\overline{IO}| \omega; v_M = |\overline{IM}| \omega; v_N = |\overline{IN}| \omega. \quad (8.30, a)$$

Dacă se cunoaște viteza unui punct ca mărime și sens se poate determina viteza unghiulară, și anume : $\omega = \frac{v_0}{IO}$ și rezultă mărimile celorlalte viteze :

$$v_M = |\overline{IM}| \cdot \frac{v_0}{IO} \text{ și } v_N = |\overline{IN}| \frac{v_0}{IO}. \quad (8.30, b)$$

8.5.2. DISTRIBUȚIA ACCELERAȚIILOR ÎN MIȘCAREA PLAN-PARALELĂ

Formula lui Euler pentru distribuția accelerațiilor aplicată în cazul mișcării plan-paralele are expresia :

$$\bar{a}_M = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} - \bar{\omega}^2 \bar{r}. \quad (8.31, a)$$

În această relație, \bar{a}_0 este accelerația de translație, iar \bar{a}_M este accelerația punctului M determinat de vectorul \bar{r} . Dacă se consideră un segment AB care are o mișcare de translație cu viteza și accelerația punctului A , iar punctul B are o mișcare circulară cu centrul în A și raza $\overline{AB} = \bar{r}$ cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ și accelerația unghiulară $\bar{\varepsilon}_0$ relația de mai sus se poate scrie :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon}_{BA} \times \overline{AB} + \bar{\omega}_{BA} \times (\bar{\omega}_{BA} \times \overline{AB});$$

sau :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\varepsilon} + \bar{a}_{BA}^{\omega} \quad (8.31, b)$$

În figura 8.14 este arătat modul de obținere a accelerației \bar{a}_B din accelerația de translație \bar{a}_A și accelerația datorită rotației lui B față de A , \bar{a}_{BA} . Pentru a ușura determinarea distribuției de accelerații este util să se determine punctele solidului care au accelerația nulă. Punctul din planul în care se mișcă corpul solid cu mișcare plan-paralelă ce are accelerație nulă poartă numele de *pol al accelerațiilor* și îl notăm cu P . Accelerația punctului B , \bar{a}_B ,

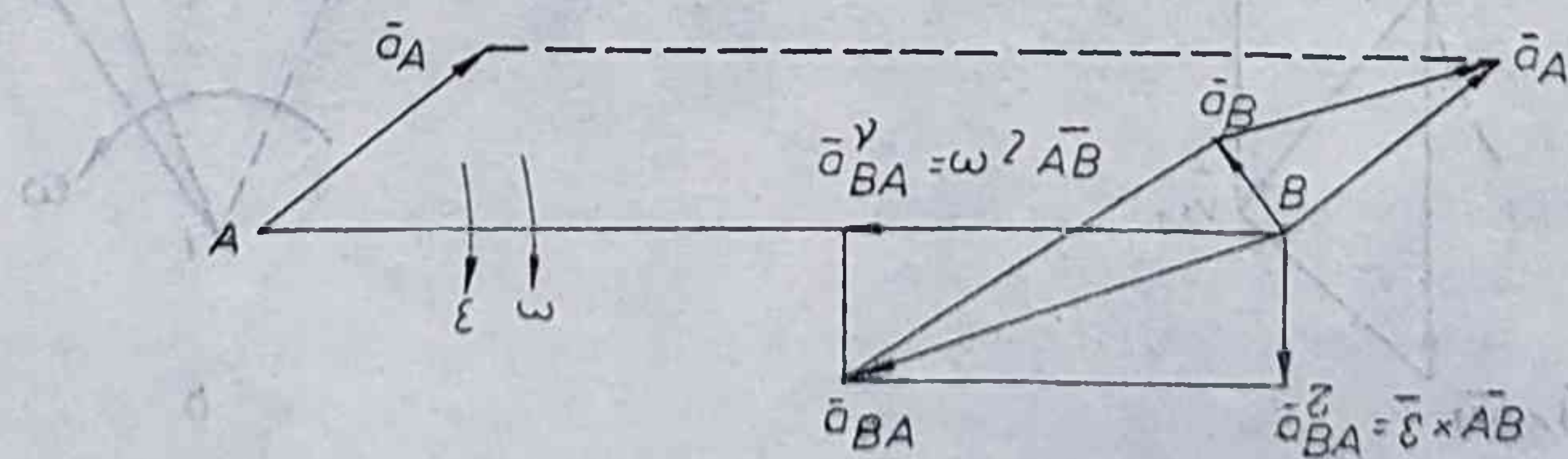


Fig. 8.14

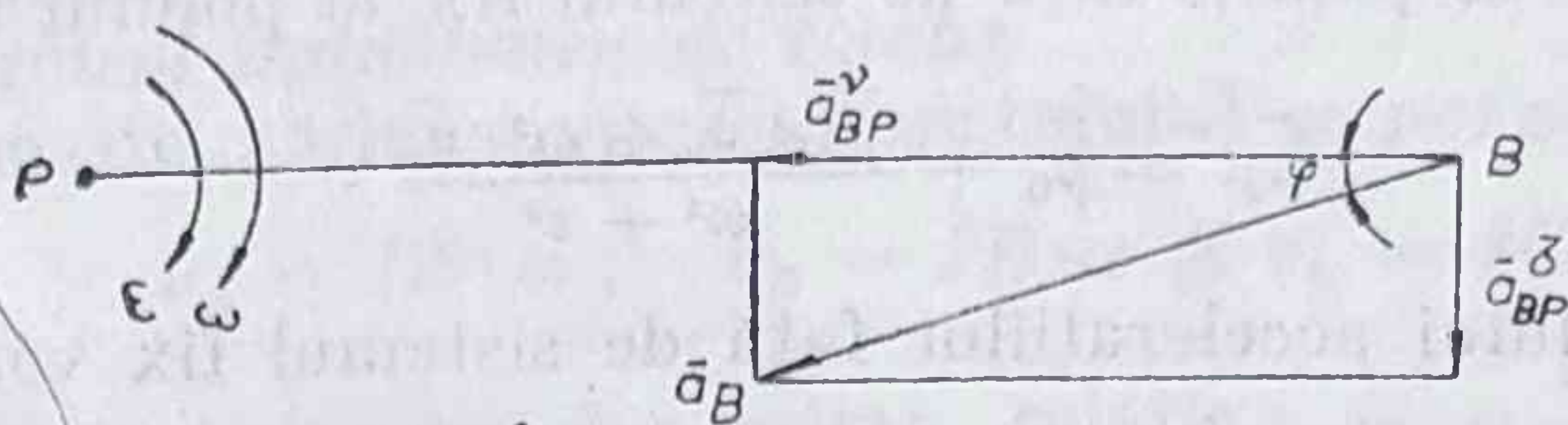


Fig. 8.15

poate fi exprimată prin referire la polul accelerațiilor prin aceeași relație de mai sus, înlocuind punctul A prin P, și se obține :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_P + \bar{a}_{BP}^v + \bar{a}_{BP}^\delta.$$

Se observă că $\bar{a}_P = 0$. În acest caz accelerația \bar{a}_B este dată de relația (fig. 8.15) :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{BP}^v + \bar{a}_{BP}^\delta = \bar{\varepsilon} \times \overline{PB} - \omega^2 \cdot \overline{PB}; \quad (8.31, c)$$

Mărimea accelerației \bar{a}_B este :

$$|\bar{a}_B| = PB \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (8.32, a)$$

Mărimea distanței de la punctul B la polul P este :

$$PB = \frac{a_B}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}; \quad (8.32, b)$$

direcția accelerației este dată de mărimea unghiului :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|\bar{\varepsilon}|}{\omega^2}. \quad (8.32, c)$$

Ca atare, dacă se cunosc accelerația unui punct oarecare \bar{a}_B , accelerația unghiulară ε și viteza unghiulară ω , se poate determina polul accelerațiilor. Distribuția accelerațiilor în mișcarea plană este identică cu cea dintr-o mișcare de rotație cu viteza unghiulară ω și accelerația unghiulară ε în jurul unei axe ce ar trece prin polul accelerațiilor.

Coordonatele polului accelerațiilor se determină ușor anulind valoarea accelerației unui punct oarecare :

$$\begin{aligned} \bar{a}_B = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) &= a_{0x} \cdot \bar{i} + a_{0y} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -y\omega & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (a_{0x} - \varepsilon \cdot y - \omega^2 \cdot x) \bar{i} + (a_{0y} + \varepsilon \cdot x - \omega^2 \cdot y) \bar{j} = 0, \end{aligned}$$

notînd cu u și v coordonatele polului accelerațiilor $x = u$ și $y = v$, se obține :

$$u = \frac{\omega^2 \cdot a_{0x} - \varepsilon \cdot a_{0y}}{\omega^4 + \varepsilon^2}; \quad v = \frac{\varepsilon \cdot a_{0x} + \omega^2 \cdot a_{0y}}{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (8.33)$$

Vectorial aceeași expresie se obține scriind că punctul B devine polul accelerațiilor :

$$\bar{a}_B = 0 = \bar{a}_P = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} - \omega^2 \cdot \bar{r} = 0. \quad (8.34)$$

Înmulțind vectorial cu $\bar{\varepsilon}$ ambii termeni ai acestei relații și rezolvînd ecuația vectorială în raport cu vectorul de poziție \bar{r} , se găsește :

$$\bar{r} = \frac{\bar{\varepsilon} \times \bar{a}_0 + \omega^2 \cdot \bar{a}_0}{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (8.35, a)$$

Rezultă vectorul de poziție față de sistemul fix al polului accelerațiilor P

$$\bar{r}_P = \bar{r}_0 + \frac{\bar{\varepsilon} \times \bar{a}_0 + \omega^2 \cdot \bar{a}_0}{\omega^4 + \varepsilon^2} \quad (8.35, b)$$

Coordonatele polului accelerațiilor față de sistemul fix vor fi :

$$x_{1P} = x_{10} + \frac{a_{0x1}\omega^2 - a_{0y1}\cdot\varepsilon}{\omega^4 + \varepsilon^2} \text{ și } y_{1P} = y_{10} + \frac{a_{0x1}\cdot\varepsilon + a_{0y1}\cdot\omega^2}{\omega^4 + \varepsilon^2} \quad (8.35, c)$$

Coordonatele polului accelerațiilor față de sistemul de referință mobil vor fi :

$$x_P = \frac{a_{0x}\cdot\omega^2 - a_{0y}\cdot\varepsilon}{\omega^4 + \varepsilon^2} \text{ și } y_P = \frac{a_{0x}\cdot\varepsilon + a_{0y}\cdot\omega^2}{\omega^4 + \varepsilon^2} \quad (8.35, d)$$

Distribuția accelerațiilor în cazul mișcării plane este identică cu aceea ce ar rezulta dintr-o mișcare simplă de rotație cu viteza unghiulară ω și accelerație unghiulară ε , în jurul unei axe ce trece prin polul accelerațiilor P de coordonate u, v .

Dacă se alege un nou sistem de referință mobil, astfel ca originea sa să coincidă cu polul accelerațiilor, expresia coordonatelor se obține printr-o translație : $x = x' + u$; $y = y' + v$; $z = z'$.

Expresia accelerației unui punct oarecare M va deveni :

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = [a_{0x} - (\varepsilon \cdot v + \omega^2 \cdot u) - \varepsilon \cdot y' - \omega^2 \cdot x']\bar{i} + \\ + [(a_{0y} + \varepsilon \cdot u - \omega^2 \cdot v) + \varepsilon \cdot x' - \omega^2 \cdot y']\bar{j} ;$$

$$\text{Dar : } a_{0x} - \varepsilon \cdot v - \omega^2 \cdot u = 0 \text{ și } a_{0y} + \varepsilon \cdot u - \omega^2 \cdot v = 0.$$

Se obține :

$$a_x = -\varepsilon \cdot y' - \omega^2 \cdot x' ; \quad a_y = \varepsilon \cdot x' - \omega^2 \cdot y' ; \quad a_z = 0. \quad (8.36)$$

Aceste expresii sînt tocmai acelea ale accelerației unui punct $M(x, y)$ al corpului, în cazul mișcării de rotație cu viteză unghiulară ω și accelerație unghiulară ε , în jurul unei axe ce trece prin polul P și este perpendiculară pe planul în care se efectuează mișcarea.

8.5.3. METODE GRAFO-ANALITICE PENTRU DETERMINAREA DISTRIBUȚIEI VITEZELOR ȘI ACCELERAȚIILOR PUNCTELOR UNUI CORP SOLID CE ARE O MIȘCARE PLAN-PARALELĂ

Distribuția vitezelor se poate determina prin mai multe metode, dintre care cele grafo-analitice sînt cele mai operative.

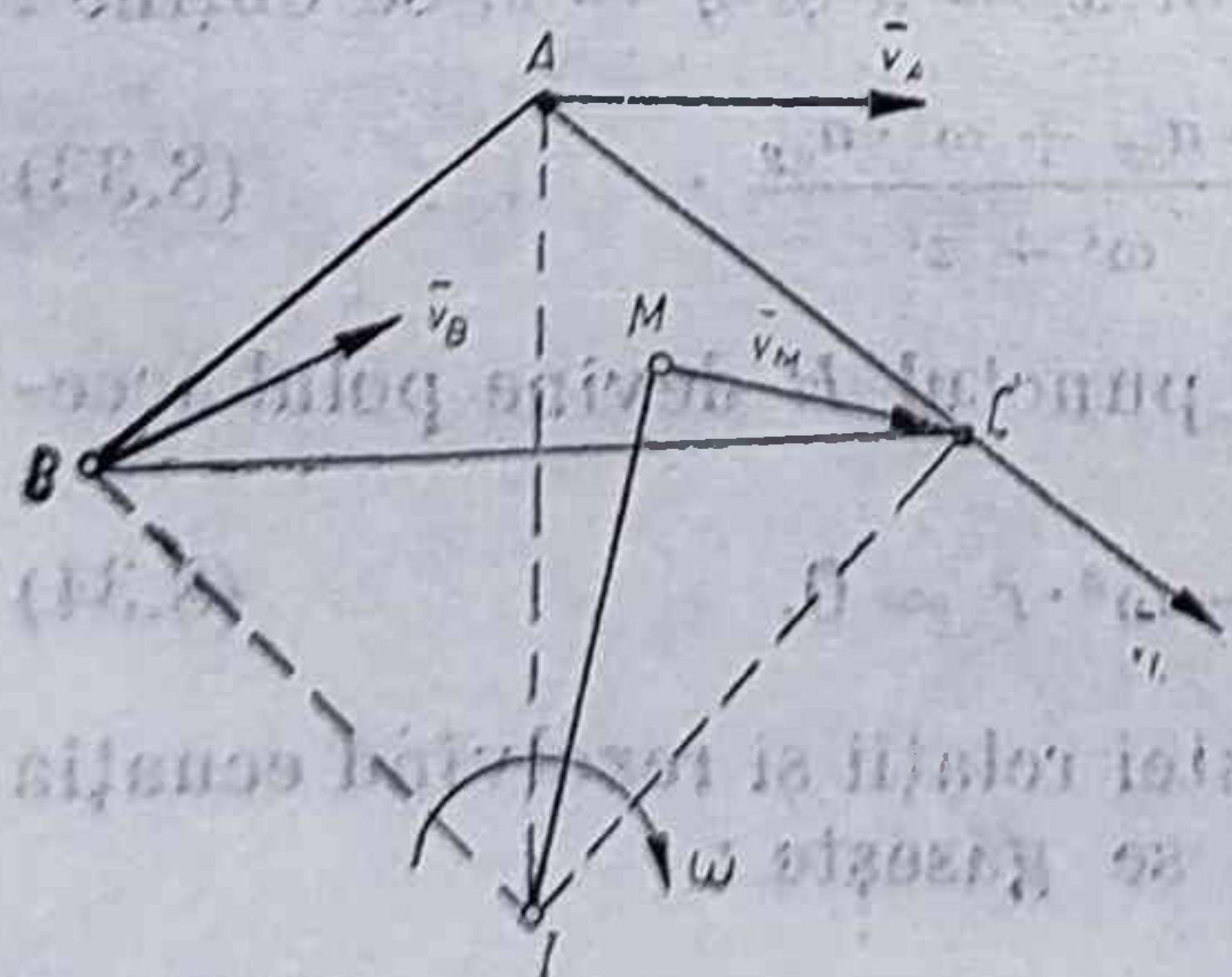


Fig. 8.16

Metoda bazată pe determinarea centrului instantaneu de rotație. Pentru a putea folosi această metodă este necesar să se cunoască direcția vitezelor a două puncte și mărimea și sensul uneia din ele. Dacă se consideră placa ABC care are o mișcare plan-paralelă și se cunoaște viteza punctului A ca mărime, direcție și sens și direcția vitezei altui punct, de exemplu, B , se poate determina viteza oricărui punct al plăcii (fig. 8.16). Centrul instantaneu de rotație se determină ducînd normalele la

vitezele v_A și direcția v_B în punctele A și B . La intersecția lor se află punctul I , care este *centrul instantaneu de rotație*.

Dacă se cunoaște mărimea vitezei punctului A se pot scrie relațiile :

$$v_A = IA \cdot \omega; \quad v_B = IB \cdot \omega \text{ și } v_C = IC \cdot \omega.$$

Viteza unghiulară rezultă din prima relație : $\omega = \frac{v_A}{IA}$.

Pentru celelalte viteze, se obține :

$$v_B = IB \frac{v_A}{IA}; \quad v_C = IC \frac{v_A}{IA}; \quad v_M = IM \cdot \omega = IM \frac{v_A}{IA}.$$

Segmentele ce reprezintă razele IA , IB , IC , IM etc. se măsoară pe desen și folosind o scară convenabilă se efectuează calculul cuvenit.

Metoda bazată pe teorema proiecțiilor vitezelor. Pornind de la relația de legătură între vitezele a două puncte A și B : $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{BA} \times \vec{AB} = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$, se poate arăta că proiecțiile vitezelor pe direcția AB sînt egale, adică : $Aa = Bb$ (fig. 8.17) :

$$Bb = \frac{\vec{v}_B \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{\vec{v}_A \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{(\vec{\omega}_{BA} \times \vec{AB}) \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}|} = Aa. \quad (8.37)$$

Dacă se consideră o placă ABC care are o mișcare plan-paralelă la care se cunoaște viteza unui punct A ca mărime, direcție și sens și direcția Δ a vitezei unui alt punct B , folosind teorema de mai sus se poate determina mărimea și sensul vitezei lui B și apoi a oricărui alt punct (fig. 8.18).

Conform celor arătate mai sus, există relația $Aa = Bb$ și, ca atare, pe dreapta AB se măsoară segmentul $Bb = Aa$, plasîndu-se literele mici în același sens. În punctul b se proiectează vîrfurile vitezei punctului B ; rezultă că acesta se va afla pe dreapta $bb' \perp AB$. Deoarece se cunoaște că suportul vitezei lui B îl constituie dreapta Δ , rezultă că vîrfurile vectorului \vec{v}_B se va afla la intersecția acestei drepte cu bb' .

Pentru a afla viteza punctului C se poate observa că proiecția vitezelor punctului de pe dreapta BC este $Bb_2 = Cc_2$, vîrfurile vitezei punctului C se proiectează în c_1 și c_2 pe dreptele AC și BC . Ducînd normale în c_1 și c_2 pe dreptele AC și BC , acestea se intersectează în vîrfurile vectorului vitezei lui C . Se obține vectorul \vec{v}_C .

Metoda planului vitezelor. Este o metodă grafo-analitică ce se bazează pe ecuațiile vectoriale ale lui Euler și pe teorema asemănării.

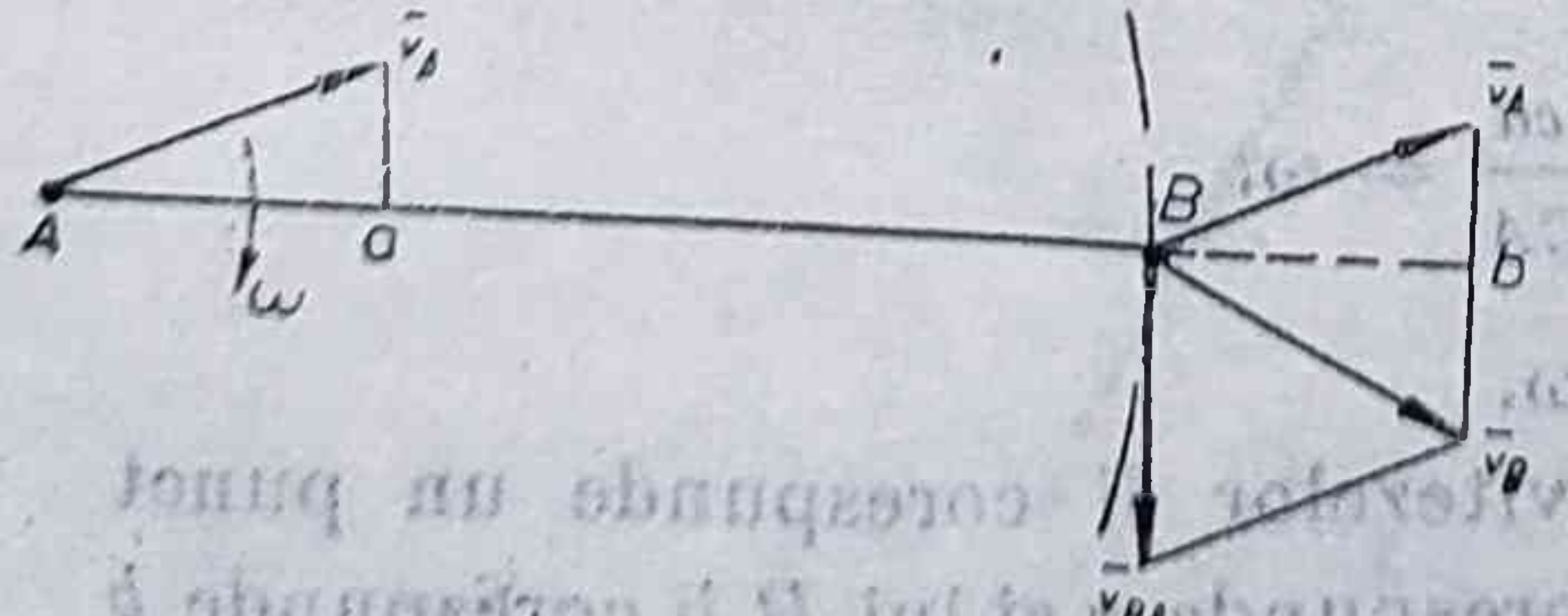


Fig. 8.17

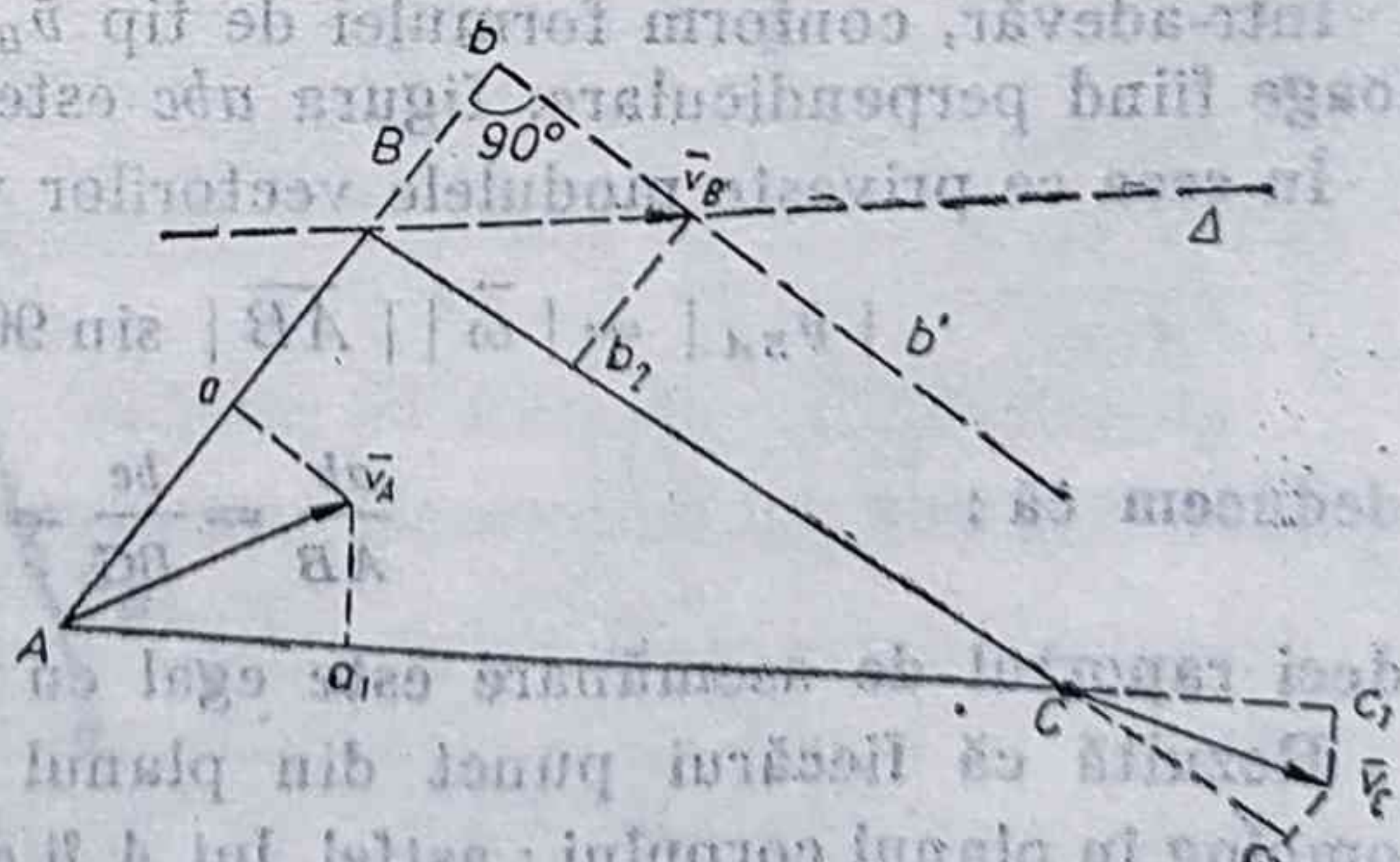


Fig. 8.18

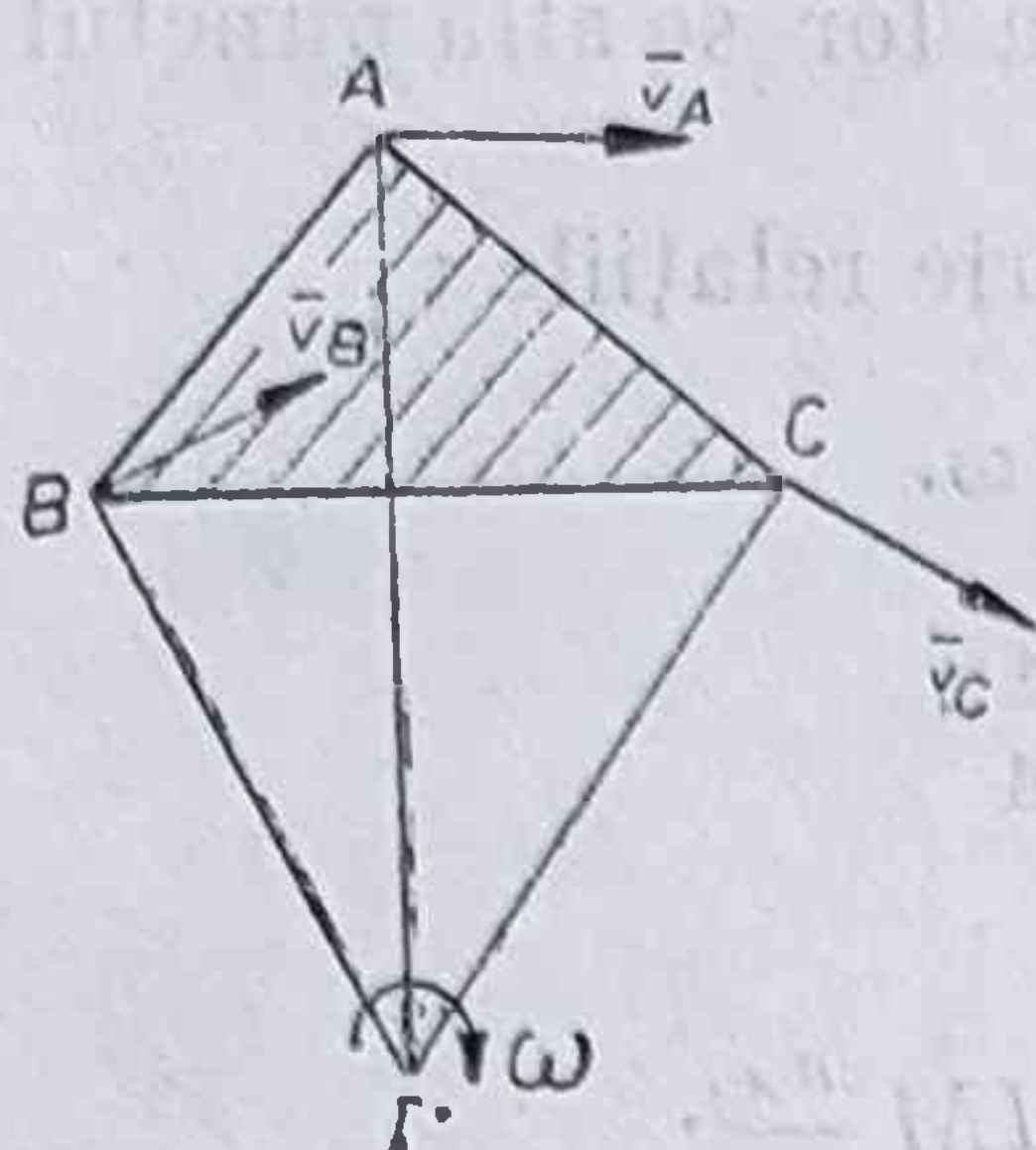


Fig. 8.19

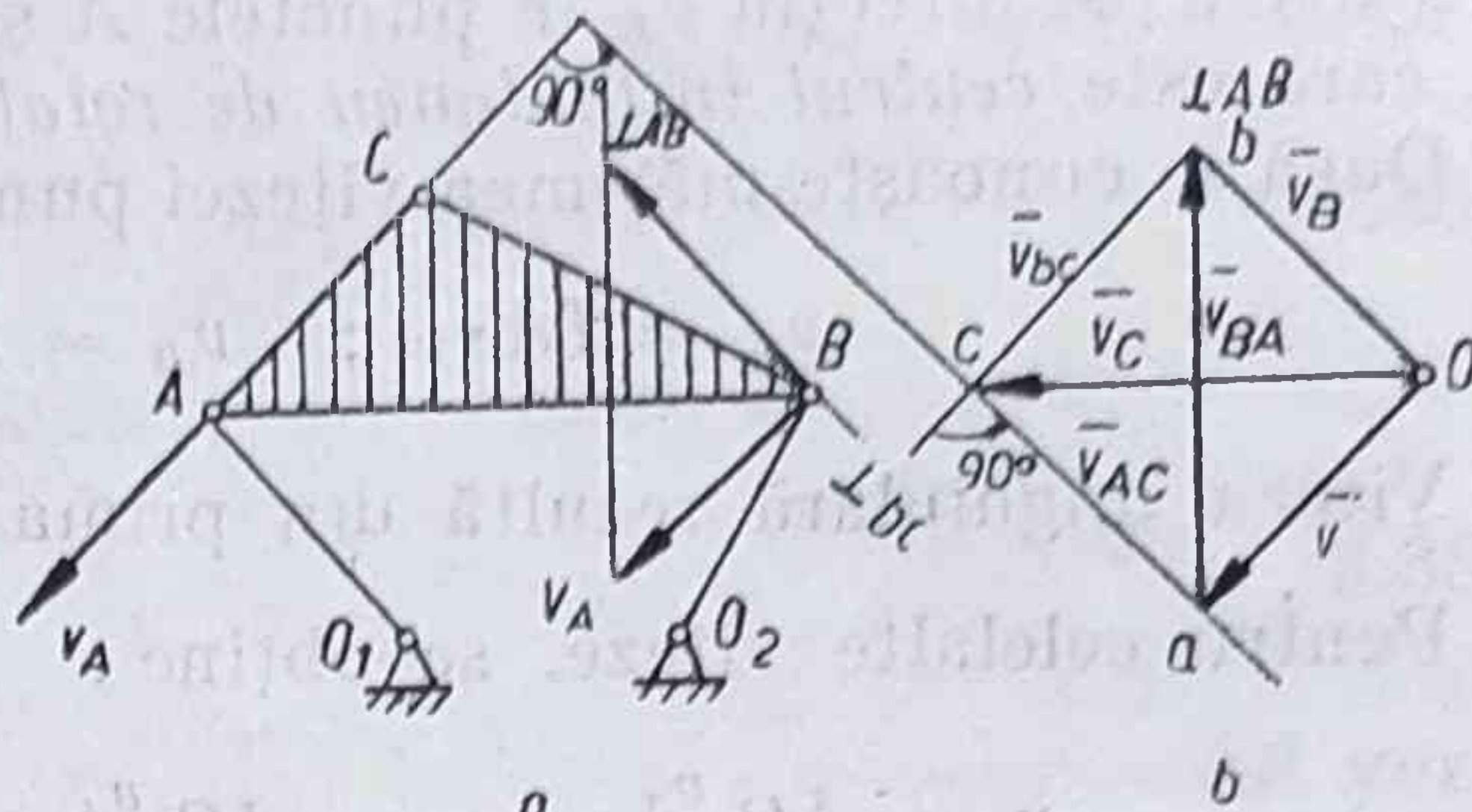


Fig. 8.20

Se numește plan al vitezelor, figura formată de vectorii \vec{v}_A , \vec{v}_B , \vec{v}_C , aplicați într-un același punct, polul p , reprezentând vitezele punctelor A , B , C de pe corpul în mișcare plană (fig. 8.19).

Se construiește deci $\overline{pa} = \vec{v}_A$, $\overline{pb} = \vec{v}_B$, $\overline{pc} = \vec{v}_C$, obținând și vectori de tip \overline{ab} , \overline{bc} , \overline{ca} , ce se notează $\overline{ab} = \vec{v}_{BA}$ etc.

Se vede că pentru două puncte oarecare ale corpului avem :

$$\overline{pb} = \overline{pa} + \overline{ab} \text{ sau } \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}. \quad (8.38)$$

Pe de altă parte, din formulele lui Euler, scrise pentru două puncte A și B , avem :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \overline{OB};$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \overline{OA};$$

Deci

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overline{AB}, \quad (8.39)$$

sau

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

unde

$$\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \overline{AB} \quad (8.40)$$

reprezintă viteza lui B față de A considerat ca punct fix (fig. 8.20).

Rezultă că $\vec{v}_{BA} \perp \overline{AB}$, respectiv $\overline{ab} \perp \overline{AB}$, analog $\overline{bc} \perp \overline{BC}$; $\overline{ca} \perp \overline{CA}$. (8.41)

Aceasta conduce la proprietatea cunoscută sub numele de „teorema asemănării”, care afirmă că : $\triangle abc \sim \triangle ABC$, este rotit cu 90° în sensul lui ω , raportul de asemănare al laturilor omoloage fiind ω .

Într-adevăr, conform formulei de tip \vec{v}_{BA} , se poate afirma că laturile omoloage fiind perpendiculare, figura abc este rotită cu 90° în sensul lui ω .

În ceea ce privește modulele vectorilor viteză ;

$$|\vec{v}_{BA}| = |\vec{\omega}| |\overline{AB}| \sin 90^\circ \text{ sau } ab = AB \cdot \omega,$$

deducem că :

$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{ca}{CA} = \omega,$$

deci raportul de asemănare este egal cu ω .

Rezultă că fiecărui punct din planul vitezelor îi corespunde un punct omolog în planul corpului ; astfel, lui A îi corespunde a și lui B îi corespunde b etc., iar centrului instantaneu de rotație I îi corespunde polul vitezelor p .

Se ia, de exemplu, cazul unui mecanism patrulater O_1ABO_2 care imprimă plăcii ABC o mișcare plan-paralelă. Se cunosc ω și toate elementele geometrice. Se cere să se determine \bar{v}_C (fig. 8.20, a).

Punctul A descrie un cerc cu centrul în O_1 , raza O_1A , cu viteza $v_A = O_1A \cdot \omega$. Punctul B descrie un alt cerc cu centrul în O_2 , cu raza O_2A . Pentru viteza sa se poate scrie: $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$,

Dar $\bar{v}_{BA} \perp \overline{AB}$ și se deduce că vârful vitezei \bar{v}_B se află pe direcția perpendiculară pe AB ce este dusă din vârful vectorului echipolent cu \bar{v}_A dus din polul O (sau din punctul B).

Dacă din originea vectorului echipolent cu \bar{v}_A (fig. 8.20, b) se duce o paralelă la direcția vitezei \bar{v}_B a punctului B , se obține, la intersecția cu dreapta perpendiculară pe AB , vârful vectorului \bar{v}_B . Pentru a determina viteza punctului C se poate porni de la vitezele punctelor A și B care se cunosc. Astfel: $\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{CA}$ și $\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB}$.

Din vîrfurile vectorilor \bar{v}_A și \bar{v}_B se duc direcțiile vectorilor \bar{v}_{CA} și, respectiv, \bar{v}_{CB} , perpendiculare pe AC respectiv pe BC . La intersecția lor se găsește vârful vitezei \bar{v}_C al punctului C . Unind polul O cu c se obține \bar{v}_C .

Metode pentru determinarea accelerațiilor. Metoda polului accelerațiilor. Metoda este analoagă metodei centrului instantaneu ce s-a folosit la viteze. Pentru găsirea polului P (fig. 8.21, a), dacă se cunoaște complet accelerația unui punct \bar{a}_A , precum și ω , ε , atunci se calculează

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a^\tau}{a^v} = \frac{\varepsilon}{\omega^2};$$

se măsoară unghiul φ , în sensul lui ε , de la direcția \bar{a}_A cunoscută, obținîndu-se dreapta pe care, la distanța $AP = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ se găsește polul accelerațiilor P .

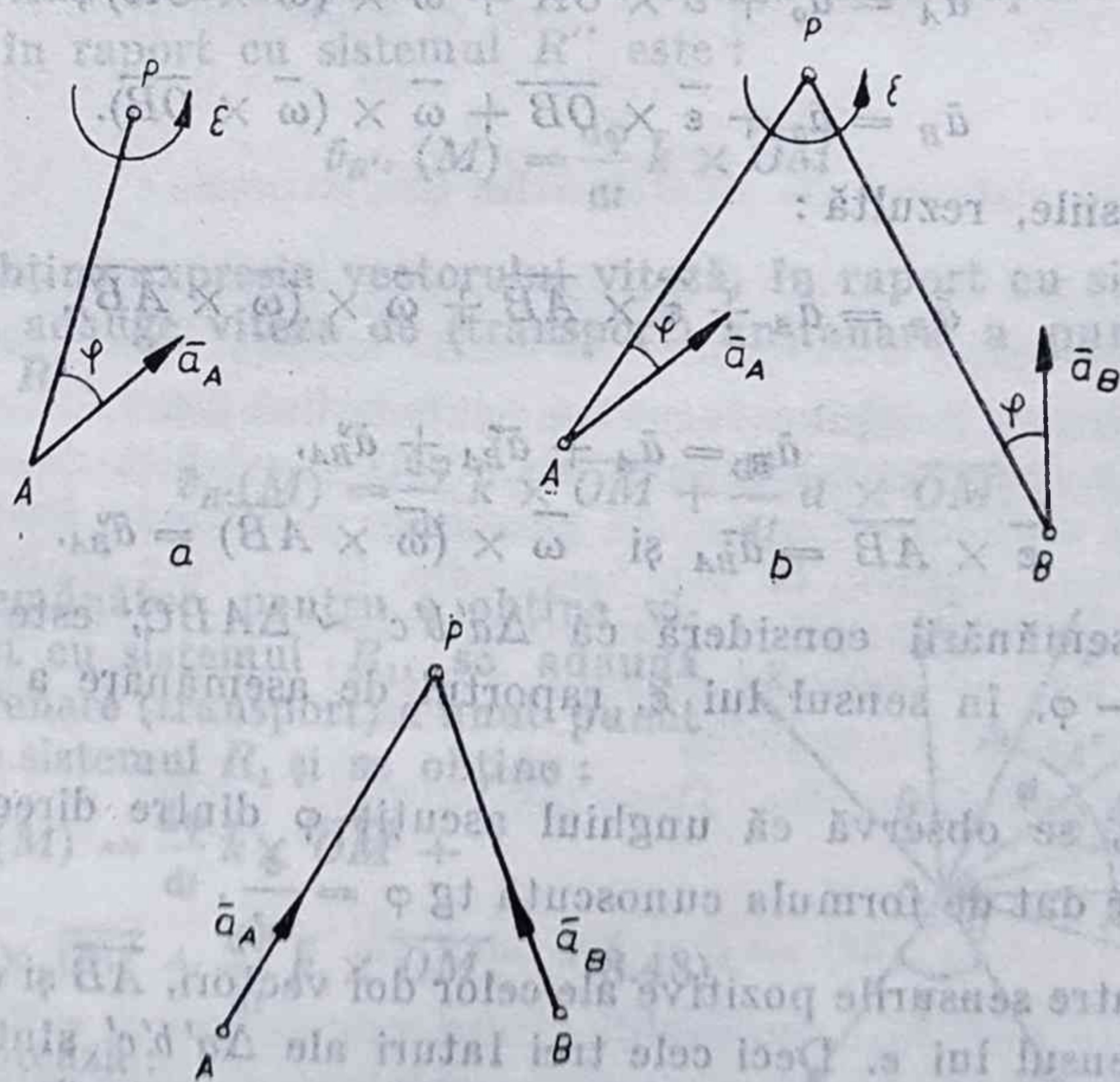


Fig. 8.21

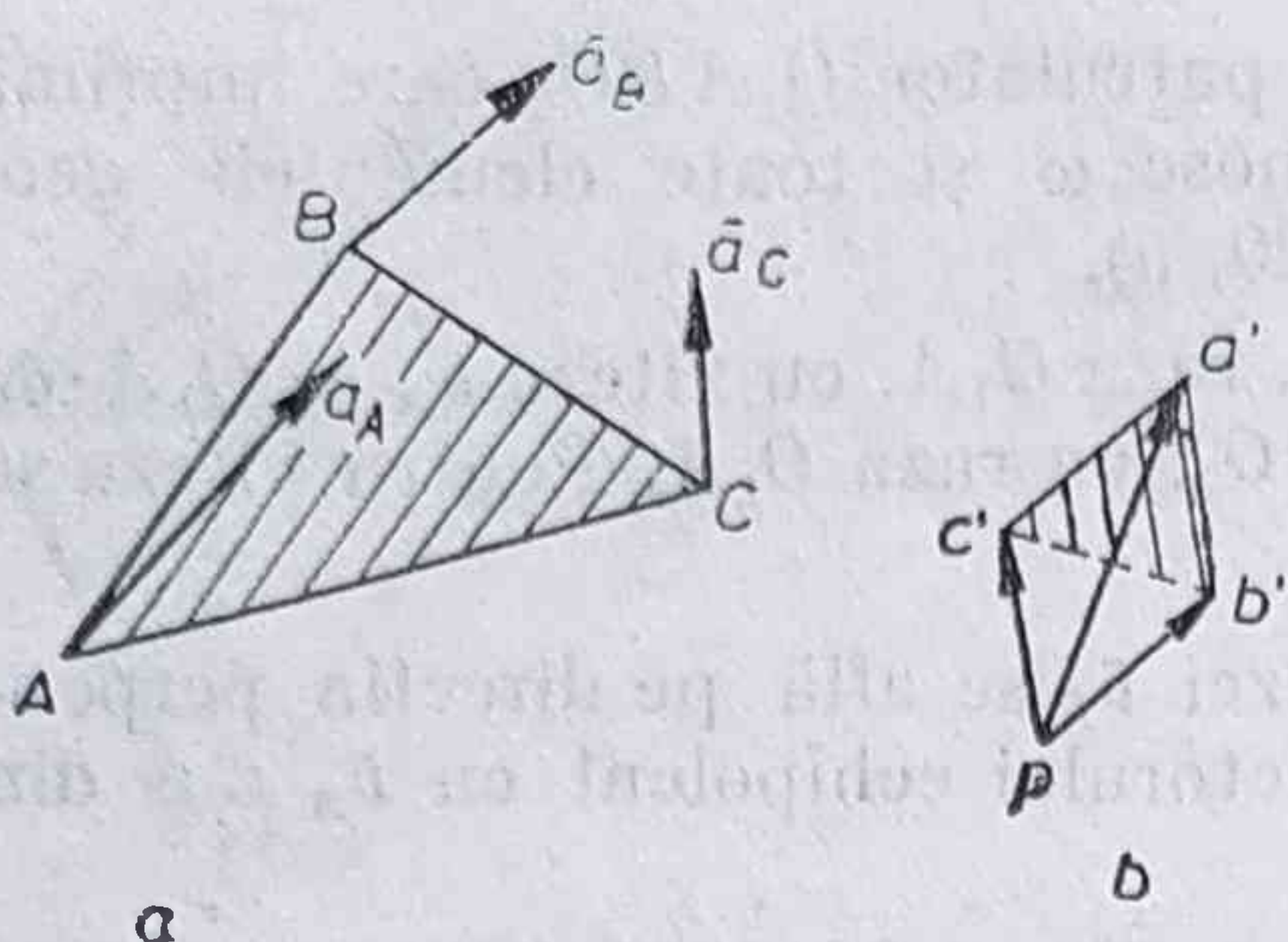


Fig. 8.22

Cunoscînd pe P , se va putea determina accelerația oricărui punct, el avînd rolul de centru al accelerațiilor. Dacă sînt cunoscute direcțiile a două accelerații \bar{a}_A și \bar{a}_B , precum și ω și ϵ , atunci polul P se găsește la intersecția direcțiilor accelerațiilor normale, direcții obținute prin măsurarea unghiului dat de $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\epsilon}{\omega^2}$ în sensul lui ϵ (fig. 8.21, b).

Caz particular: dacă $\omega = \text{ct}$, atunci $\epsilon = 0$; $\operatorname{tg} \varphi = 0$; $a^r = 0$, rezultînd că polul P se găsește la intersecția accelerațiilor totale care sînt totodată și normale (fig. 8.21, c).

Va rezulta: $a_A = a_A^v = PA \cdot \omega^2$; $a_B = a_B^v = PB \cdot \omega^2$.

Metoda planului accelerațiilor. Metoda este analoagă celei de la planul vitezelor, bazîndu-se pe formulele lui Euler și pe teorema asemănării.

Se consideră trei puncte A, B, C care au accelerațiile respective $\bar{a}_A, \bar{a}_B, \bar{a}_C$ (fig. 8.22, a). Se construiește planul accelerațiilor, alegînd un pol p în care se aplică vectorii $\overline{pa'}$, $\overline{pb'}$, $\overline{pc'}$ echipolenți cu $\bar{a}_A, \bar{a}_B, \bar{a}_C$ (fig. 8.22, b). Se formează vectorii de tip $\overline{a'b'}$, $\overline{b'c'}$, $\overline{c'a'}$, unde:

$$\overline{a'b'} = \overline{pb'} - \overline{pa'} = \bar{a}_B - \bar{a}_A = \bar{a}_{BA}; \quad \overline{b'c'} = \bar{a}_{BC}; \quad \overline{c'a'} = \bar{a}_{CA}.$$

Din formulele Euler scrise pentru accelerațiile dintre două puncte, de exemplu A și B , se obține:

$$\begin{aligned} \bar{a}_A &= \bar{a}_o + \bar{\epsilon} \times \overline{OA} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{OA}); \\ \bar{a}_B &= \bar{a}_o + \bar{\epsilon} \times \overline{OB} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{OB}). \end{aligned} \quad (8.42)$$

Scăzînd expresiile, rezultă:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\epsilon} \times \overline{AB} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB}), \quad (8.43)$$

sau

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^r + \bar{a}_{BA}^v, \quad (8.44)$$

unde

$$\bar{\epsilon} \times \overline{AB} = \bar{a}_{BA}^r \text{ și } \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB}) = \bar{a}_{BA}^v. \quad (8.45)$$

Teorema asemănării consideră că $\Delta a'b'c' \sim \Delta ABC$, este rotit față de acesta cu $\pi - \varphi$, în sensul lui ϵ , raportul de asemănare a laturilor fiind $\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}$.

Într-adevăr, se observă că unghiul ascuțit φ dintre direcțiile vectorilor \overline{AB} și \bar{a}_{BA} este dat de formula cunoscută $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\epsilon}{\omega^2}$.

Unghiul dintre sensurile pozitive ale celor doi vectori, \overline{AB} și $a'b'$ este $\pi - \varphi$, măsurat în sensul lui ϵ . Deci cele trei laturi ale $\Delta a'b'c'$ sînt rotite față de laturile omoloage ale ΔABC cu $\pi - \varphi$, deci triunghiurile sînt asemenea, avînd unghiuri egale.

Cum :

$$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^x)^2 + (a_{BA}^y)^2} = AB \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a'b',$$

rezultă

$$\frac{a'b'}{AB} = \frac{b'c'}{BC} = \frac{c'a'}{CA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Din cele prezentate rezultă că fiecare punct din planul accelerațiilor reprezintă omologul unui punct din planul corpului. Astfel a' este omologul lui A , b' al lui B etc., iar polul accelerațiilor p din planul accelerațiilor este omologul centrului accelerațiilor P al corpului respectiv.

8.6. MIȘCAREA DE ROTATIE A UNUI CORP SOLID RIGID ÎN JURUL UNUI PUNCT FIX

Se consideră un corp solid rigid (C) care se poate mișca în jurul unui punct fix O_1 , astfel că un punct al solidului coincide în permanență cu punctul fix O_1 . O astfel de mișcare se poate realiza cu o articulație sferică, astfel că rigidul poate efectua numai rotații. Această mișcare se mai numește și mișcare sferică.

De corpul solid rigid se solidarizează un sistem referențial $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}(R)$ și mobil față de sistemul $O_1\bar{i}_1\bar{j}_1\bar{k}_1(R_1)$ în raport cu care urmează a fi studiată mișcarea corpului (fig. 8.23), astfel încît $O_1 = O$.

Se poate proceda la transformarea sistemului R_1 în R prin trei rotații succesive, și anume :

$R_1(O\bar{i}_1\bar{j}_1\bar{k}_1) \rightarrow R'(O\bar{u}\bar{v}\bar{k}_1)$ prin rotirea cu unghiul ψ în jurul axei $(O\bar{k}_1)$;

$R'(O\bar{u}\bar{v}\bar{k}_1) \rightarrow R''(O\bar{u}\bar{v}\bar{k})$ prin rotirea cu unghiul θ în jurul axei $(O\bar{u})$;

$R''(O\bar{u}\bar{v}\bar{k}) \rightarrow R(O\bar{i}\bar{j}\bar{k})$ prin rotirea cu unghiul φ în jurul axei $(O\bar{k})$.

Vectorul viteză al unui punct M al corpului C în raport cu sistemul R_1 este nul, iar în raport cu sistemul R'' este :

$$\bar{v}_{R''}(M) = \frac{d\varphi}{dt} \bar{k} \times \overline{OM} \quad (8.46)$$

Pentru a obține expresia vectorului viteză, în raport cu sistemul R' , este necesar să se adauge viteza de (transport) antrenare a punctului din R'' în raport cu R' :

$$\bar{v}_{R'}(M) = \frac{d\varphi}{dt} \bar{k} \times \overline{OM} + \frac{d\theta}{dt} \bar{u} \times \overline{OM}. \quad (8.47)$$

În mod asemănător, pentru a obține viteza în raport cu sistemul R_1 , se adaugă viteza de antrenare (transport) a unui punct din R' față de sistemul R_1 și se obține :

$$\bar{v}_{R_1}(M) = \frac{d\varphi}{dt} \bar{k} \times \overline{OM} +$$

$$\frac{d\theta}{dt} \bar{u} \times \overline{OM} + \frac{d\psi}{dt} \bar{k}_1 \times \overline{OM}. \quad (8.48)$$

Dacă se notează :

$$\bar{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \bar{k} + \frac{d\theta}{dt} \bar{u} + \frac{d\psi}{dt} \bar{k}_1,$$

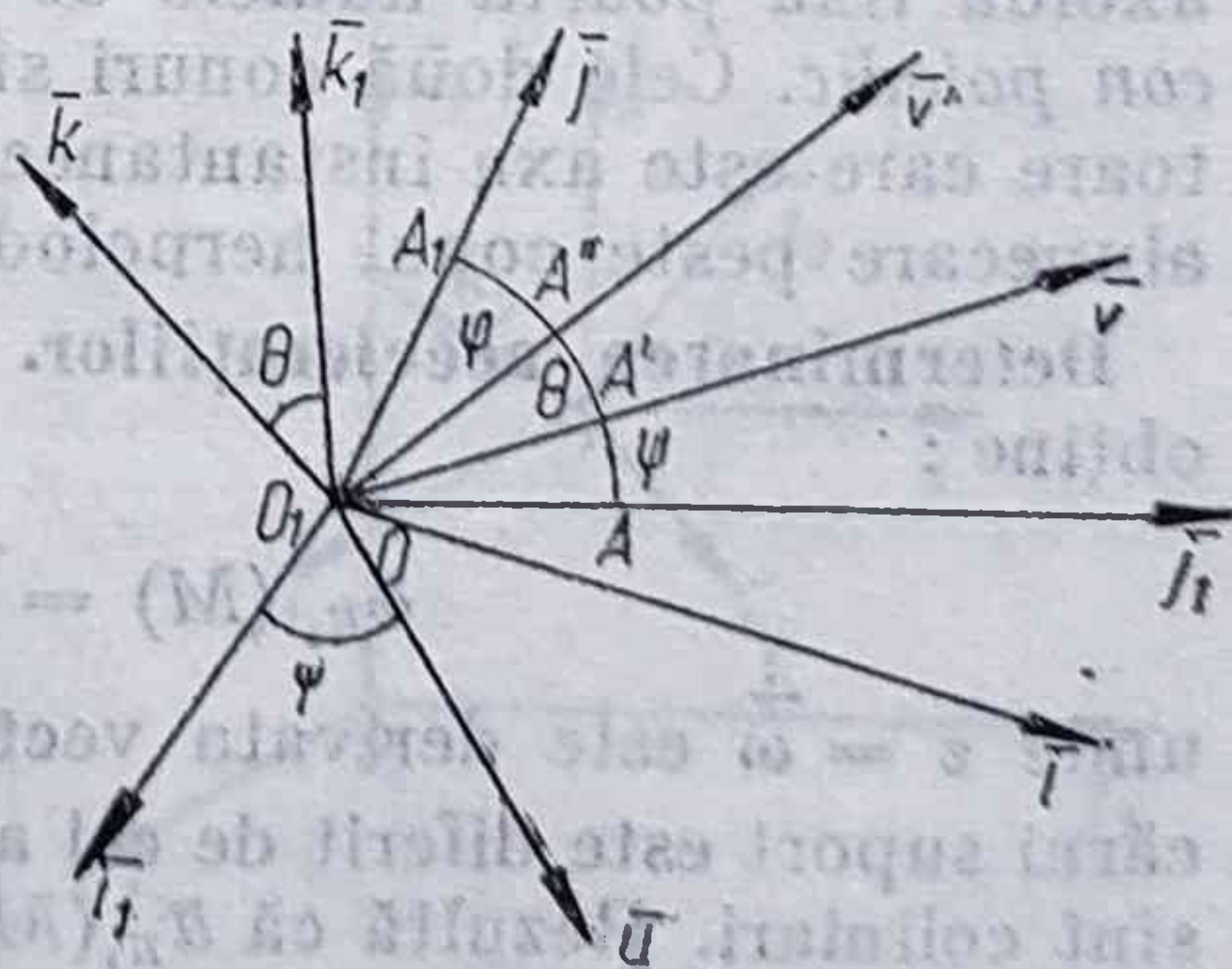


Fig. 8.23

ψ , θ și φ fiind cunoscute sub numele de unghiurile lui Euler (ψ — unghiul de precesie; θ — unghiul de nutație; φ — unghiul de rotație proprie), se poate scrie :

$$\vec{v}_{R_1}(M) = \vec{\omega} \times \vec{OM}$$

$\vec{\omega}$ fiind vectorul viteză unghiulară de rotație a corpului solid (\mathcal{C}) în mișcarea sa față de sistemul R_1 .

Expresia vitezei unui punct M oarecare, arătată mai sus : $\vec{v}_{R_1}(M) = \vec{\omega} \times \vec{OM}$ se mai poate scrie : $\vec{v}_{R_1}(M) = \vec{\omega} \times \vec{r}$, unde \vec{r} este vectorul de poziție al punctului M de coordonate x, y, z în raport cu sistemul referențial R_1 .

Vectorul $\vec{\omega}$ este un vector de modul și direcție variabilă ce trece permanent prin punctul fix O și are o expresie analitică de forma :

$$\vec{\omega} = \omega_x \cdot \vec{i} + \omega_y \cdot \vec{j} + \omega_z \cdot \vec{k};$$

$$\vec{v}_{R_1}(M) = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_{R_1}(M) = [\omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y] \vec{i} + [\omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z] \vec{j} + [\omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x] \vec{k} \quad (8.49, a)$$

Pentru a găsi punctele de viteză nulă se pune condiția : $\vec{v}_{R_1}(M) = \vec{\omega} \times \vec{r} = 0$ care este satisfăcută dacă $\vec{r} = 0$ (punctul fix) și dacă $\vec{r} = \lambda \cdot \vec{\omega}$ (condiția de colinearitate).

Această expresie arată că punctele de viteză nulă se află la un moment dat pe o dreaptă variabilă ce trece permanent prin punctul fix O . Această dreaptă poartă numele de *axă instantanee de rotație*. Ecuația axei instantanee față de sistemul mobil rezultă din condiția de colinearitate și are expresia :

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}, \quad (8.49, b)$$

Iar în raport cu sistemul de referință fix are expresia :

$$\frac{x_1}{\omega_{x_1}} = \frac{y_1}{\omega_{y_1}} = \frac{z_1}{\omega_{z_1}}. \quad (8.49, c)$$

Locul geometric al pozițiilor succesive ocupate de axele instantanee de rotație, atât față de sistemul fix (axoïda fixă), cât și cel față de sistemul mobil (axoïda mobilă), sînt conuri ce poartă numele de conurile lui Poincot, și anume axoïda fixă poartă numele de *con herpolodic*, iar axoïda mobilă se numește *con polodic*. Cele două conuri sînt permanent tangente între ele pe o generatoare care este axa instantanee de rotație. Conul polodic se rostogolește fără alunecare peste conul herpolodic.

Determinarea accelerațiilor. Derivînd expresia vitezei $\vec{v}_{R_1}(M) = \vec{\omega} \times \vec{r}$ se obține :

$$\vec{a}_{R_1}(M) = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (8.50, a)$$

unde $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ este derivata vectorului viteză unghiulară și este un vector al cărui suport este diferit de cel al vitezei unghiulare $\vec{\omega}$, adică cei doi vectori nu sînt coliniari. Rezultă că $\vec{a}_{R_1}(M)$ este nulă numai pentru $\vec{r} = 0$, adică pentru punctul fix.

Se poate reține, deci, că în cazul mișcării solidului cu punct fix distribuția de accelerații nu poate fi redusă sau asimilată cu distribuția unei alte mișcări mai simple. Termenul $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ reprezintă accelerația tangențială, iar termenul $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$ reprezintă accelerația axipetă. Expresia analitică a accelerației este :

$$\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y & \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z & \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x \end{vmatrix} \quad (8.50, b)$$

8.7. MIȘCAREA GENERALĂ A UNUI CORP SOLID RIGID

Pentru a studia mișcarea generală a unui corp solid în raport cu un sistem referențial $(R_1) (O_1 \bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1)$ vom folosi următoarele sisteme referențiale intermediare (fig. 8.24) :

- sistemul $(R) (O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ unde punctul O este un punct al corpului solid, iar vectorii $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$ sînt paraleli cu vectorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$;

- sistemul $(R_2) (O, \bar{i}_2, \bar{j}_2, \bar{k}_2)$ solidar cu corpul solid. Poziția corpului solid este determinată în raport cu sistemul de referință $(R_1) (O_1 \bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1)$ considerat fix prin :

- coordonatele x_0, y_0, z_0 ale punctului O ;

- unghiurile lui Euler, ψ, θ, φ , ce permit trecerea de la sistemul (R) la (R_2) .

Rezultă că mișcarea generală a corpului solid este o mișcare ce se exprimă prin șase parametri. Aceasta înseamnă că în acest caz corpul solid are șase grade de libertate. Se observă că mișcarea corpului solid în raport cu sistemul (R) este o mișcare de rotație în jurul unui punct fix. Expresia vitezei unui punct M în raport cu O este dată de relația :

$$\bar{v}_R(M) = \bar{\omega} \times \overline{OM}. \quad (8.51)$$

Pentru a determina viteza punctului M în raport cu sistemul referențial (R_1) , este necesar să se adauge viteza de transport a sistemului (R) față de (R_1) . Aceasta este viteza de translație a corpului solid și este egală cu viteza punctului O în raport cu sistemul (R_1) . Viteza punctului M în raport cu sistemul referențial (R_1) este dată de relația :

$$\bar{v}_{R_1}(M) = \bar{v}_{R_1}(O) + \bar{\omega} \times \overline{OM} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Componentele pe cele trei axe ale vitezei sînt :

$$v_x = v_{0x} + \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y ;$$

$$v_y = v_{0y} + \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z ;$$

$$v_z = v_{0z} + \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x \quad (8.52)$$

Dacă vectorii $\bar{v}_{R_1}(M)$ și $\bar{\omega}$ sînt coliniari, atunci există puncte pentru care $\bar{v}_{R_1}(M) = \lambda \cdot \bar{\omega}$, adică

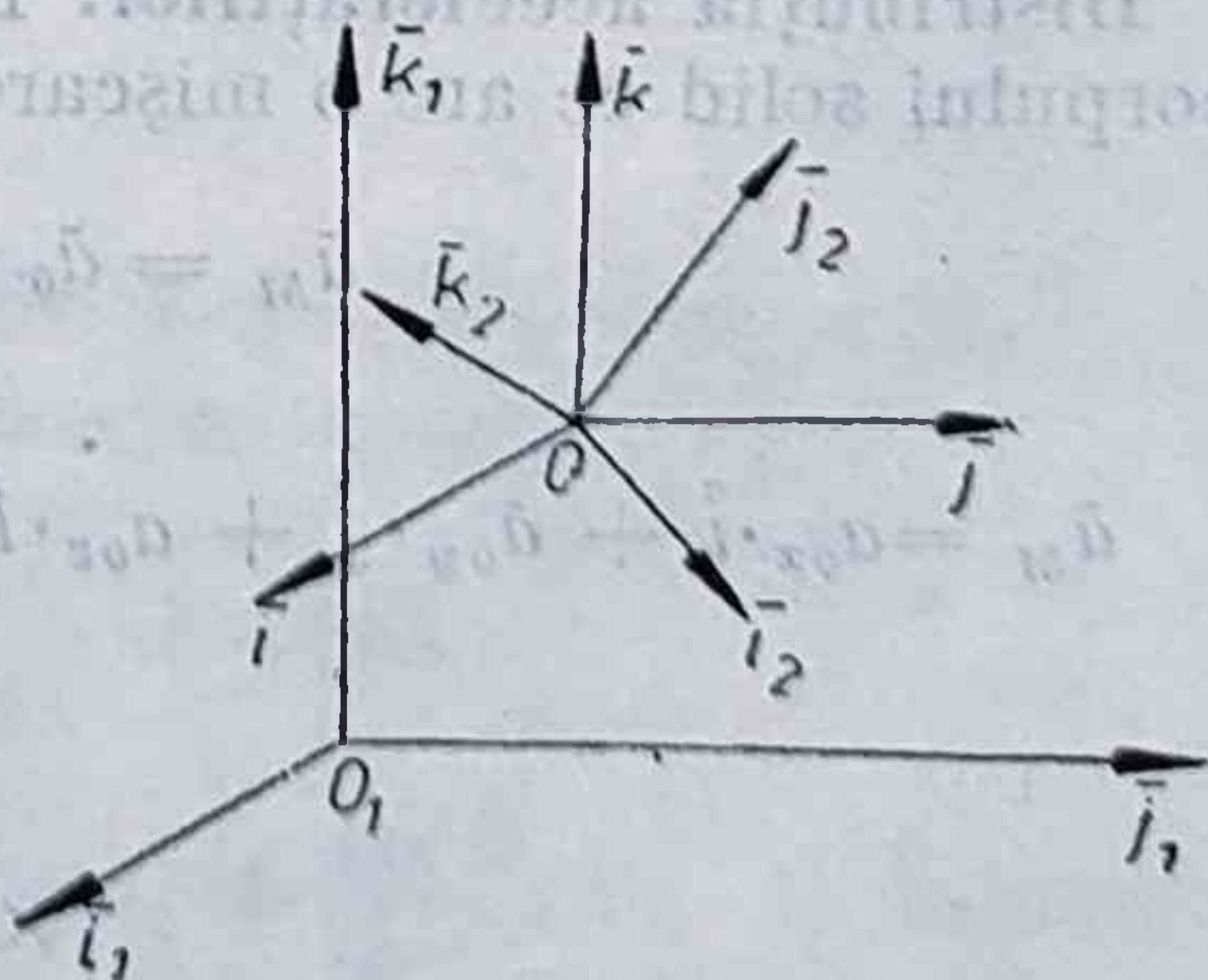


Fig. 8.24

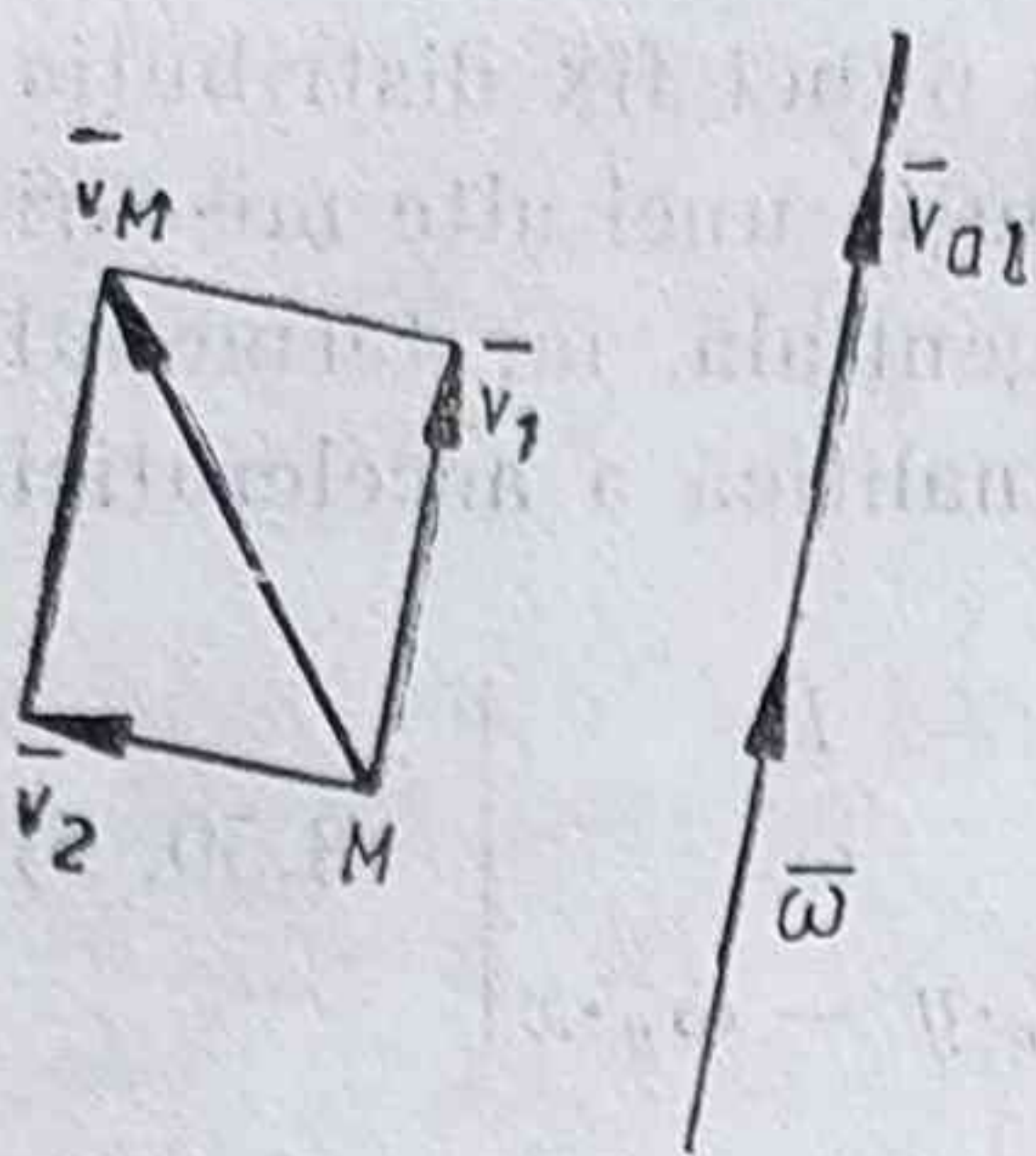


Fig. 8.25

în care vitezele sînt paralele. Această condiție se poate scrie analitic sub forma :

$$\frac{v_x}{\omega_x} = \frac{v_y}{\omega_y} = \frac{v_z}{\omega_z},$$

$$\text{sau : } \frac{v_{0x} + \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y}{\omega_x} = \frac{v_{0y} + \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z}{\omega_y} = \frac{v_{0z} + \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x}{\omega_z}. \quad (8.53)$$

Aceste ecuații reprezintă axa instantanee a mișcării elicoidale la care se reduce mișcarea generală a corpului solid. Această axă este paralelă cu suportul vectorului $\bar{\omega}$.

Rezultă că în mișcarea generală a solidului distribuția de viteze la un moment dat, corespunzător unei anumite poziții a corpului, se obține considerînd corpul solidar că ar efectua o mișcare elicoidală în jurul axei instantanee a mișcării elicoidale, cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ și simultan cu o viteză de translație \bar{v}_0 de-a lungul axei de rotație instantanee.

Locul geometric al pozițiilor succesive ocupate de axele instantanee de rotație, văzute din sistemul de referință fix, este o suprafață riglată și poartă numele de *axoidă fixă*.

Locul geometric al acestor axe, văzute dintr-un sistem de referință mobil legat de corpul solid rigid, poartă numele de *axoidă mobilă*. Cele două axoide sînt permanent tangente după o dreaptă care este tocmai axa instantanee de rotație.

Axoida mobilă se rostogolește fără alunecare în jurul generatoarei de contact, care este tocmai axa instantanee și în același timp alunecă în lungul acestei generatoare cu o viteză care este tocmai viteza de translație a mișcării elicoidale. Se știe că pornind de la expresia vitezei unui punct oarecare $\bar{v}_M = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$ se poate demonstra că proiecția vitezelor punctelor pe direcția vectorului $\bar{\omega}$ este o constantă. Această constantă este tocmai $\bar{v}_1 = \bar{v}_{al}$, viteza (de alunecare) de translație a mișcării elicoidale, și este dată de relația :

$$v_1 = (\bar{v}_{al}) = \bar{v}_M \cdot \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} = (\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} = \frac{\bar{v}_0 \cdot \bar{\omega}}{|\bar{\omega}|};$$

$$\bar{v}_1 = \frac{v_{0x} \cdot \omega_x + v_{0y} \cdot \omega_y + v_{0z} \cdot \omega_z}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}} = \text{const.} \quad (8.54)$$

Distribuția accelerațiilor. Expresia accelerației unui punct oarecare M al corpului solid ce are o mișcare generală este :

$$\bar{a}_M = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r});$$

$$\bar{a}_M = a_{0x} \cdot \bar{i} + a_{0y} \cdot \bar{j} + a_{0z} \cdot \bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x & y & z \end{vmatrix} + \omega_x \cdot \bar{i} + \omega_y \cdot \bar{j} + \omega_z \cdot \bar{k} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (8.55)$$

Componentele accelerației punctului M după cele trei axe sînt :

$$\begin{aligned} a_x &= a_{ox} - (\omega_y^2 + \omega_z^2)x + (\omega_x \cdot \omega_y - \varepsilon_z)y + (\omega_x \cdot \omega_z + \varepsilon_y)z ; \\ a_y &= a_{oy} - (\omega_z^2 + \omega_x^2)y + (\omega_y \cdot \omega_z - \varepsilon_x)z + (\omega_y \cdot \omega_x + \varepsilon_z)x ; \\ a_z &= a_{oz} - (\omega_x^2 + \omega_y^2)z + (\omega_z \cdot \omega_x - \varepsilon_y)x + (\omega_z \cdot \omega_y + \varepsilon_x)y . \end{aligned} \quad (8.56, a)$$

Dacă componentele accelerației a_x , a_y și a_z ale punctului M sînt nule, atunci punctul respectiv este polul accelerațiilor. În acest caz, ecuațiile :

$$a_x = 0 ; \quad a_y = 0 ; \quad a_z = 0 \quad (8.56, b)$$

constituie un sistem de trei ecuații liniare neomogene în x , y , z .

Determinantul coeficienților este :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -(\omega_y^2 + \omega_z^2) & \omega_x \cdot \omega_y - \varepsilon_z & \omega_x \cdot \omega_z + \varepsilon_y \\ \omega_y \cdot \omega_x + \varepsilon_z & -(\omega_z^2 + \omega_x^2) & \omega_y \cdot \omega_z - \varepsilon_x \\ \omega_z \cdot \omega_x - \varepsilon_y & \omega_z \cdot \omega_y + \varepsilon_x & -(\omega_x^2 + \omega_y^2) \end{vmatrix} \quad (8.56, c)$$

Efectuînd calculele, rezultă :

$$\Delta = -(\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon})^2. \quad (8.56, d)$$

Dacă determinantul coeficienților $\Delta \neq 0$, adică $\bar{\omega}$ și $\bar{\varepsilon}$ nu sînt coliniari, atunci există corespunzător la un moment și deci unei anumite poziții a corpului, un singur punct de accelerație nulă. Acest punct poartă numele de *polul accelerațiilor* și se schimbă de la un moment la altul. În acest fel distribuția accelerațiilor este la un moment dat identică cu cea a unui corp solid rigid ce s-ar mișca în jurul unui punct fix, care ar fi tocmai polul accelerațiilor determinat mai sus. Dacă determinantul coeficienților $\Delta = 0$ se pot distinge două cazuri : — nu există punct de accelerație nulă și sîntem în situația mișcărilor de translație sau de mișcare elicoidală ; — apare o nedeterminare, adică există o mulțime de puncte de accelerație nulă aflate pe o dreaptă și, ca atare, situația corespunde unei mișcări simple de rotație sau unei mișcări plan-paralele.

APLICAȚIA 1

Bara $OB = l$ se deplasează astfel încît capătul O alunecă cu viteza v_0 , constantă, pe dreapta O_1x_1 , bara rămînînd tangentă la cercul de rază R . Să se determine, cu ajutorul centrelor I și P , viteza v_A , baza și rostogolitoarea, accelerațiile punctelor A și I ; a_A și a_I .

Rezolvare

Studiul vitezelor. Se determină poziția centrului instantaneu de rotație I , la intersecția perpendicularelor pe direcțiile vitezelor v_0 și v_A . Deci :

$$\begin{aligned} v_0 &= IO \cdot \omega ; \\ v_A &= IA \cdot \omega , \end{aligned} \quad \text{Rezultă : } v_A = v_0 \frac{IA}{IO} = v_0 \cdot \sin \theta .$$

Viteza unghiulară instantanee : $\omega = \dot{\theta} = \frac{v_0}{IO} = v_0 \cdot R \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta}$ este o mărime variabilă.

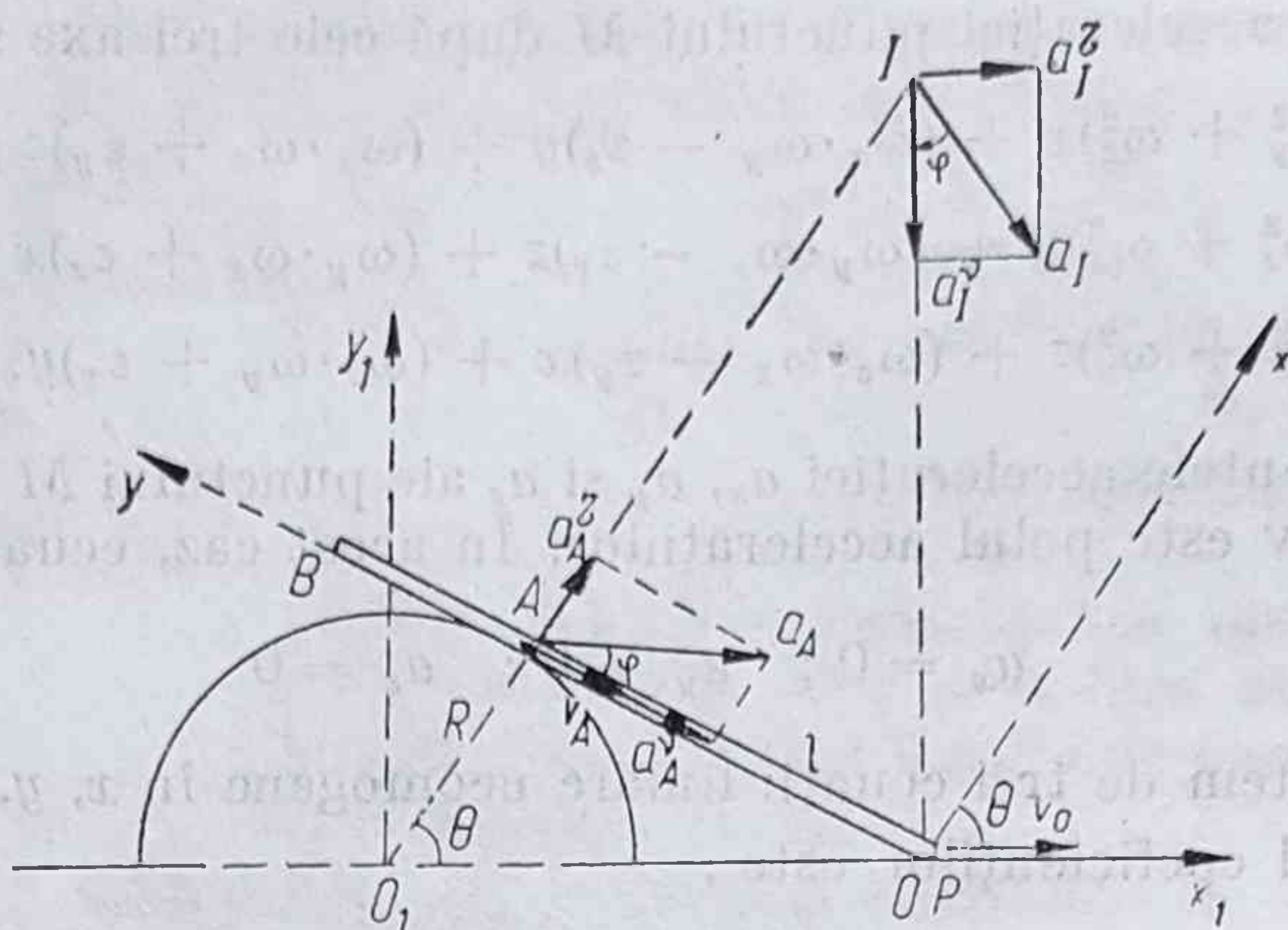


Fig. 8.26

Pentru determinarea bazei și rostogolitoarei, se scriu coordonatele lui I față de sistemul de axe fix $O_1x_1y_1$ și mobil Oxy , astfel :

$$\begin{cases} x_1 = O_1O = \frac{R}{\cos \theta}; & x = OA = R \operatorname{tg}^2 \theta; \\ y_1 = IO = \frac{R \sin \theta}{\cos^2 \theta}; & y = IA = R \operatorname{tg} \theta. \end{cases}$$

Eliminînd parametrul θ , ecuația bazei este : $x_1^4 - R^2 \cdot x_1^2 - R^2 y_1^2 = 0$, iar rostogolitoarea este parabola : $y^2 = R \cdot x$.

Studiul accelerațiilor. Pentru determinarea polului accelerațiilor P , se observă că acesta coincide cu punctul O , fiindcă $v_0 = \text{const.}$ și deci $a_0 = 0$.

Se calculează accelerația unghiulară ε prin derivarea lui ω , obținînd :

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{v_0}{R \sin^2 \theta} [-2 \sin^2 \theta \cdot \cos \theta - \cos^3 \theta] \dot{\theta} = -\frac{v_0^2}{R} \operatorname{ctg}^3 \theta (1 + \sin^2 \theta).$$

Componentele accelerației a_A pe direcția tangentei și normalei sînt :

$$a_A \begin{cases} a^{\tau} = PA \cdot \dot{\omega} = -\frac{v_0^2}{R} \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} (1 + \sin^2 \theta); \\ a^{\nu} = PA \cdot \omega^2 = \frac{v_0^2}{R} \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta}. \end{cases}$$

Unghiul φ dintre accelerație și componenta normală este dat de : $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = -\frac{1 + \sin^2 \theta}{\sin \theta \cdot \cos \theta}$. Unghiul φ este negativ, deci vectorul a^{ν} se găsește la dreapta vectorului accelerație.

Componentele accelerației punctului I vor fi :

$$a_I \begin{cases} a^{\tau} = PI \cdot \dot{\omega} = -\frac{v_0^2}{R} \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} (1 + \sin^2 \theta); \\ a^{\nu} = PI \cdot \omega^2 = \frac{v_0^2}{R} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}. \end{cases}$$

APLICAȚIA 2

Cunoscînd elementele geometrice ale mecanismului din figură (8.27, a), poziția dată de unghiul 45° și viteza unghiulară constantă ω a barei O_1A , să se determine viteza și accelerația culisei D , folosind metoda asemănării.

Rezolvare

Studiul vitezelor (fig. 8.27, b). Bara O_1A fiind în rotație, rezultă $v_A = \sqrt{2}l\omega$, perpendiculară pe O_1A , spre stînga. Bara AB este în mișcare plană. Se folosește formula Euler pentru viteze :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

$$\perp O_2B \quad \perp O_1A \quad \perp BA$$

în care direcțiile celor trei viteze sînt cunoscute, în plus și mărimea lui v_A . Se construiește planul vitezelor, din care rezultă : $v_B = v_{BA} = l \cdot \omega$. Punctul c , capăt al vectorului $\vec{p}_v c = \vec{v}_c$, se obține unind p_v cu $\frac{1}{2} ab$; rezultă :

$$v_c = \sqrt{v_B^2 + \left(\frac{1}{2} v_{BA}\right)^2} = \frac{l \cdot \omega}{2} \sqrt{5}.$$

Pentru bara CD aflată în mișcare plană, se scrie ecuația lui Euler :

$$\vec{v}_D = \vec{v}_c + \vec{v}_{DC}.$$

$$\parallel y \quad \parallel \vec{p}_v c \quad \perp DC$$

Din construcția grafică rezultă :

$$v_{DC} = \sqrt{2}l \cdot \omega ; \quad v_D = \frac{l \cdot \omega}{2}.$$

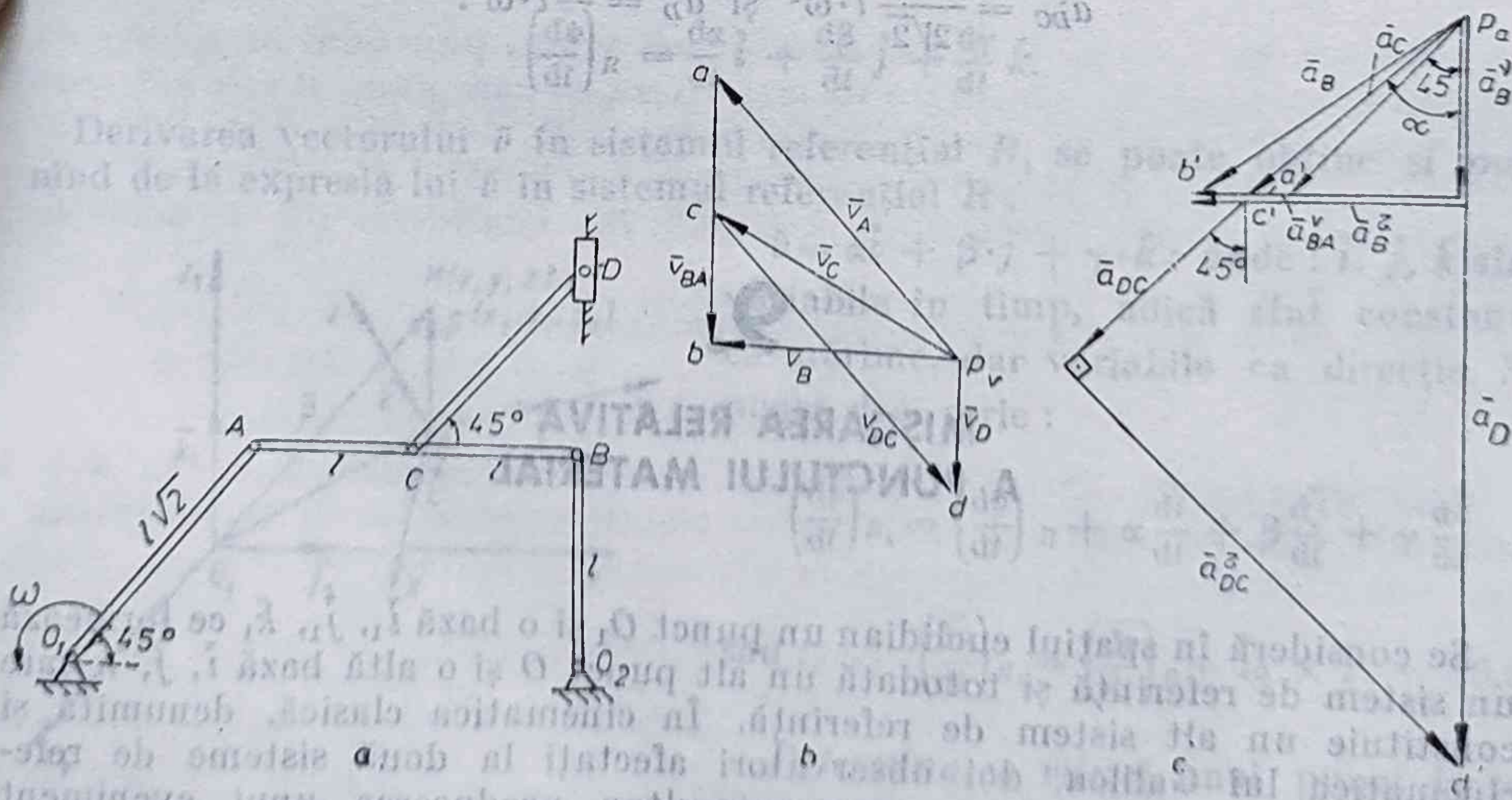


Fig. 8.27

Studiul accelerațiilor (fig. 8.27, c). Pentru bara AB se folosește relația lui Euler :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^v + \vec{a}_{BA}^{\tau},$$

$$\overline{\|O_1A\|} \quad \overline{\|BA\|} \quad \overline{\perp BA}$$

unde :

$$a_A = \sqrt{2}l \cdot \omega^2 \text{ îndreptată spre } O_1,$$

$$a_{BA}^v = \frac{v_{BA}^2}{BA} = \frac{l \cdot \omega^2}{2}, \text{ îndreptată spre } A.$$

Dar, privind față de centrul de rotație O_2 , avem :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^v + \vec{a}_B^{\tau},$$

$$\overline{\|BO_2\|} \quad \overline{\perp BO_2}$$

unde :

$$a_B^v = l \cdot \omega^2.$$

Ducînd a_B^v și direcția paralelă cu a_B^{τ} , se obține punctul b' de intersecție a celor două căi ; se deduce că $a_{BA}^{\tau} = 0$ și $a_B^{\tau} = \frac{3}{2} l \cdot \omega^2$.

Se obține apoi punctul c' la jumătatea lui $a'b'$, determinînd astfel vectorul \vec{a}_c , care are mărimea $a_c = \frac{\sqrt{41}}{4} l \cdot \omega^2$.

Pentru bara CD , relația lui Euler conduce la :

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}^v + \vec{a}_{DC}^{\tau}$$

$$\overline{\|y\|} \quad \overline{\|p_{ac'}\|} \quad \overline{\|DC\|} \quad \overline{\perp DC}$$

unde :

$$a_{DC}^v = \frac{v_{DC}^2}{DC} = \sqrt{2} l \cdot \omega^2.$$

Din construcția grafică rezultă :

$$a_{DC}^{\tau} = \frac{9}{2\sqrt{2}} l \cdot \omega^2 \text{ și } a_D = \frac{17}{4} l \cdot \omega^2.$$

9.

MIȘCAREA RELATIVĂ A PUNCTULUI MATERIAL

Se consideră în spațiul euclidian un punct O_1 și o bază $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ ce formează un sistem de referință și totodată un alt punct O și o altă bază $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ care constituie un alt sistem de referință. În cinematica clasică, denumită și cinematica lui Galileu, doi observatori afectați la două sisteme de referință din spațiul euclidian percep simultan producerea unui eveniment

într-un același punct din spațiu. Ei dispun de un același reper pentru timp și, ca atare, ei atribuie evenimentului același moment.

Asociația reperului spațial $O_1\bar{i}_1\bar{j}_1\bar{k}_1$ cu reperul timpului constituie un sistem referențial R_1 , iar asociația reperului spațial $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ cu reperul timp, același, comun, formează sistemul referențial R (fig. 9.1). Sistemul referențial R_1 poate fi considerat fix, în timp ce sistemul referențial R se află în mișcare. Reperul spațial $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ este nedeformabil în timp și poate fi considerat ca un corp solid. Versorii $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ sînt constanți ca mărime, dar variabili ca direcție. Se observă că se pot aplica fiecăruia din acești versori relațiile din mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe sau în mod echivalent în mișcarea de rotație a sistemului R în raport cu sistemul R_1 . Se poate scrie :

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}; \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}; \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}, \quad (9.1)$$

unde $\bar{\omega}$ este vectorul viteză unghiulară de rotație a sistemului R față de R_1 .

Se consideră un vector \bar{v} ale cărui componente în sistemul R_1 sînt $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, iar în sistemul R sînt α, β, γ , adică se poate scrie :

$$\bar{v} = \alpha_1 \cdot \bar{i}_1 + \beta_1 \cdot \bar{j}_1 + \gamma_1 \cdot \bar{k}_1, \quad (9.2, a)$$

$$\text{și} \quad \bar{v} = \alpha \cdot \bar{i} + \beta \cdot \bar{j} + \gamma \cdot \bar{k} \quad (9.2, b)$$

Derivata vectorului \bar{v} în R_1 este :

$$\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_{R_1} = \frac{d\alpha_1}{dt} \bar{i}_1 + \frac{d\beta_1}{dt} \bar{j}_1 + \frac{d\gamma_1}{dt} \bar{k}_1,$$

unde $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$ sînt constante, iar în raport cu R este :

$$\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_R = \frac{d\alpha}{dt} \bar{i} + \frac{d\beta}{dt} \bar{j} + \frac{d\gamma}{dt} \bar{k}.$$

Derivarea vectorului \bar{v} în sistemul referențial R_1 se poate obține și pornind de la expresia lui \bar{v} în sistemul referențial R :

$\bar{v} = \alpha \bar{i} + \beta \bar{j} + \gamma \bar{k}$; unde : $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sînt variabile în timp, adică sînt constante ca mărime, dar variabile ca direcție. Se poate deci scrie :

$$\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_{R_1} = \left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_R + \alpha \frac{d\bar{i}}{dt} + \beta \frac{d\bar{j}}{dt} + \gamma \frac{d\bar{k}}{dt}$$

$$\text{sau :} \quad \left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_{R_1} = \left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_R + \bar{\omega} \times \bar{v}. \quad (9.3)$$

Determinarea vitezei unui punct în raport cu sistemele R și R_1 (fig. 9.2).

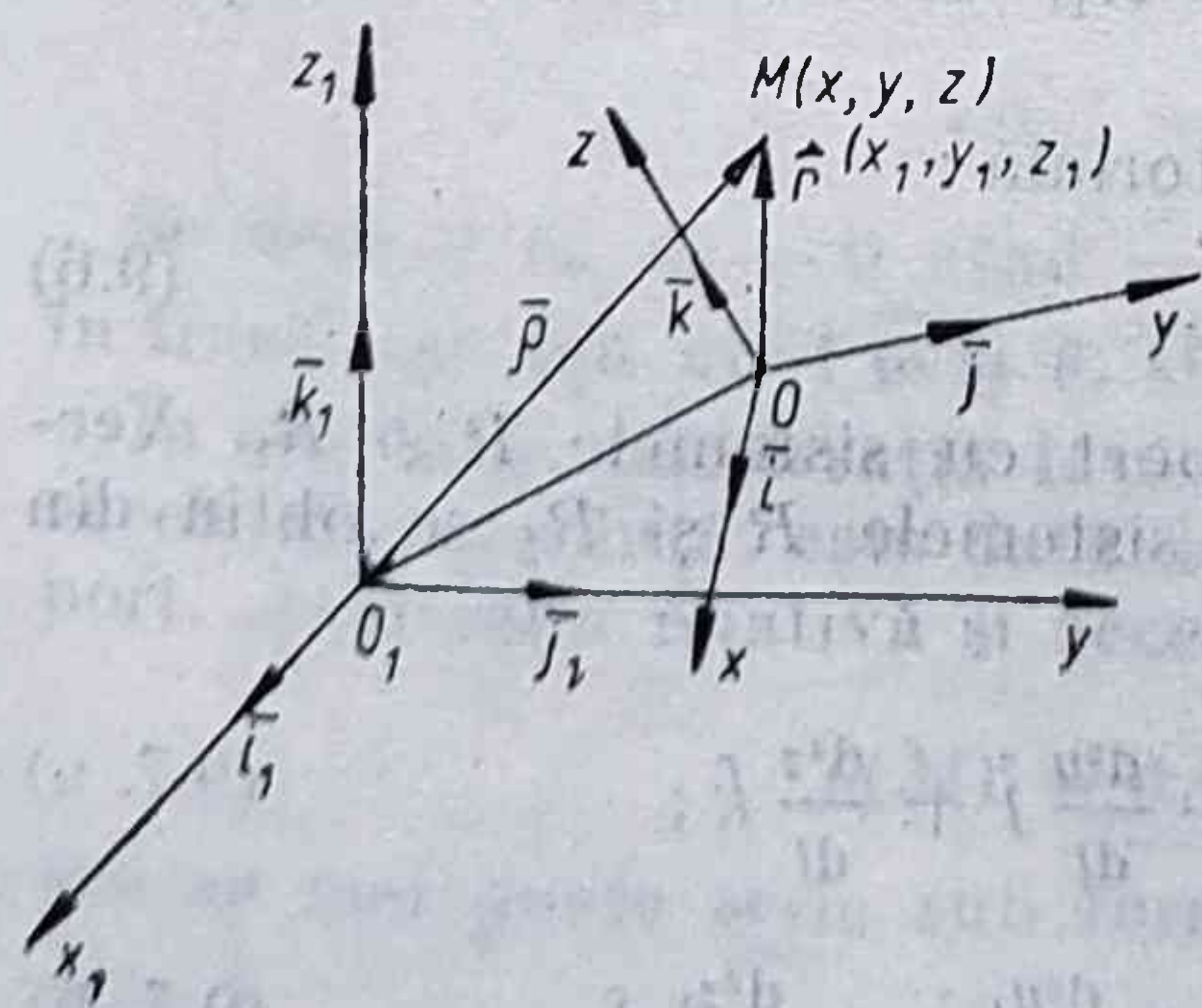


Fig. 9.2

Se consideră un punct M de coordonate x, y, z , în sistemul R și x_1, y_1, z_1 în sistemul R_1 . Vectorii de poziție respectivi sînt exprimați prin :

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \overline{OM} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}; \\ \bar{\rho} &= \overline{O_1M} = x_1 \cdot \bar{i}_1 + y_1 \cdot \bar{j}_1 + z_1 \cdot \bar{k}_1.\end{aligned}\quad (9.4)$$

Expresiile vectorilor viteză ale lui M în sistemele R și R_1 sînt :

$$\begin{aligned}\bar{v}_R(M) &= \left(\frac{d\overline{OM}}{dt} \right)_R = \dot{\bar{r}} = \frac{dx}{dt} \bar{i} + \frac{dy}{dt} \bar{j} + \frac{dz}{dt} \bar{k} = \dot{x} \cdot \bar{i} + \dot{y} \cdot \bar{j} + \dot{z} \cdot \bar{k}; \\ \bar{v}_{R_1}(M) &= \left(\frac{d\overline{O_1M}}{dt} \right)_{R_1} = \dot{\bar{\rho}} = \frac{dx_1}{dt} \bar{i}_1 + \frac{dy_1}{dt} \bar{j}_1 + \frac{dz_1}{dt} \bar{k}_1 = \dot{x}_1 \cdot \bar{i}_1 + \dot{y}_1 \cdot \bar{j}_1 + \dot{z}_1 \cdot \bar{k}_1.\end{aligned}$$

Se observă că între vectorii de poziție \bar{r} și $\bar{\rho}$ ai punctului M , în raport cu cele două sisteme referențiale, există relația :

$$\bar{\rho}_M = \overline{O_1O} + \bar{r} \quad \text{sau} \quad \overline{O_1M} = \overline{O_1O} + \overline{OM}.$$

Prin derivare în raport cu timpul, se obține :

$$\bar{v}_{R_1}(M) = \frac{d(\overline{O_1O})}{dt} + \left(\frac{d\overline{OM}}{dt} \right)_R.$$

Vectorul \overline{OM} reprezintă vectorul de poziție al punctului M în sistemul referențial R . Aplicînd regula de derivare arătată mai sus, se obține :

$$\begin{aligned}\bar{v}_{R_1}(M) &= \bar{v}_{R_1}(O) + \bar{\omega} \times \overline{OM} + \bar{v}_R(M) \\ \text{sau} \quad \bar{v}_R(M) &= \dot{\bar{\rho}}_M = \dot{\bar{\rho}}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t},\end{aligned}\quad (9.5)$$

unde s-a notat cu $\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$ derivata vectorului $\bar{r} = \overline{OM}$ în raport cu sistemul referențial R considerînd $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ constante. Această derivată se numește derivată locală.

Se observă că $\bar{v}_t = \dot{\bar{\rho}}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$ este tocmai viteza punctului M solidar cu sistemul referențial R_1 , adică este tocmai viteza cu care punctul este antrenat de sistemul referențial R . Această viteză se numește, de regulă, *viteza de transport*. Viteza punctului M față de sistemul de referință mobil R poartă numele de *viteză relativă*, iar față de sistemul R_1 , considerat fix se numește *viteză absolută*.

Rezultă că se mai poate scrie relația vectorială :

$$\bar{v}_a = \bar{v}_t + \bar{v}_r. \quad (9.6)$$

Determinarea accelerației unui punct în raport cu sistemele R și R_1 . Vectorii accelerație ai punctului M în raport cu sistemele R și R_1 se obțin din expresiile vitezelor :

$$\bar{a}_R(M) = \frac{d}{dt} \bar{v}_R(M) = \frac{d^2x}{dt^2} \bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \bar{k}; \quad (9.7, a)$$

$$\bar{a}_{R_1}(M) = \frac{d}{dt} \bar{v}_{R_1}(M) = \frac{d^2x_1}{dt^2} \bar{i}_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2} \bar{j}_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2} \bar{k}_1. \quad (9.7, b)$$

Reluînd expresia vitezei :

$$\bar{v}_{R_1}(M) = \bar{v}_{R_1}(O) + \bar{\omega} \times \overline{OM} + \bar{v}_R(M), \quad (9.8)$$

prin derivare în raport cu timpul se obține :

$$\bar{a}_{R_1}(M) = \bar{a}_{R_1}(O) + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \overline{OM} + \bar{\omega} \times \frac{d}{dt}(\overline{OM})_R + \left[\frac{d}{dt} \bar{v}_R(M) \right]$$

sau :

$$\begin{aligned} \bar{a}_{R_1}(M) = \bar{a}_{R_1}(O) + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \overline{OM} + \bar{\omega} \times \left[\frac{d}{dt}(\overline{OM})_{R_1} + \bar{\omega} \times \overline{OM} \right] + \\ + \frac{d}{dt} \bar{v}_R(M) + \bar{\omega} \times \bar{v}_R(M) \end{aligned} \quad (9.9, a)$$

Accelerația punctului M față de sistemul de referință R , considerat fix, se poate scrie sub forma :

$$\begin{aligned} \bar{a}_{R_1}(M) = \bar{a}_{R_1}(O) + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \overline{OM} + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times \overline{OM} + \\ + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_R(M) + \bar{a}_R(M) \end{aligned} \quad (9.9, b)$$

Primii trei termeni constituie expresia vectorului accelerație a unui punct M considerat fix în R , care este deci solidar cu sistemul R . Acest vector se numește accelerația de transport a punctului M antrenat de sistemul R :

$$\bar{a}_t = \bar{a}_{R_1}(O) + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \overline{OM} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{OM}). \quad (9.10)$$

Termenul

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_R(M) \quad (9.11, a)$$

poartă numele de *accelerație complementară*, deoarece expresia lui nu apare în nici una din cele două accelerații $\bar{a}_R(M)$ sau $\bar{a}_{R_1}(M)$. Această accelerație poartă și numele de *accelerația Coriolis*.

Se mai poate scrie :

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r. \quad (9.11, b)$$

Proprietățile lui \bar{a}_c rezultă din expresia sa ca produs vectorial. Este un vector cu direcția perpendiculară pe planul lui $\bar{\omega}$ și \bar{v}_r , cu sensul îndreptat astfel încît să formeze un triedru drept, cu modulul

$$|\bar{a}_c| = 2\omega \cdot v_r \sin(\bar{\omega}, \bar{v}_r). \quad (9.11, c)$$

Se deduce că $\bar{a}_c = 0$ cînd $\bar{\omega} = 0$, adică sistemul de referință mobil este în translație, sau cînd $\bar{\omega}$ și \bar{v}_r sînt coliniari.

În concluzie, accelerația față de sistemul R_1 considerat fix, denumită și accelerație absolută, este dată de suma vectorială dintre accelerația de transport, accelerația relativă și accelerația complementară :

$$\bar{a}(M) = \bar{a}_t(M) + \bar{a}_r(M) + \bar{a}_c(M), \quad (9.12, a)$$

sau se mai poate scrie sub forma :

$$\bar{a}_a = \bar{a}_t + \bar{a}_r + \bar{a}_c \quad (9.12, b)$$

APLICAȚIA 1

O placă pătrată de latură $l = 2 \text{ m}$, se rotește cu viteza unghiulară constantă $\omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, în sens trigonometric. Mobilul M se deplasează cu accelerație constantă $a = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ pe latura AB , de la A spre B .

Să se determine viteza și accelerația absolută a mobilului M ajuns în B (fig. 9.3).

Rezolvare

Studiul vitezelor. Viteza absolută se calculează cu formula: $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t$. Se identifică definițiile respective cu datele problemei. Mișcarea relativă este mișcarea lui M în lungul lui AB , iar mișcarea de transport este mișcarea punctului B cu care coincide M , față de O .

$$v_r = a \cdot t_B = 1 \cdot 2 = 2 \text{ m/s, unde: } AB = \frac{a \cdot t_B^2}{2};$$

$$t_B = \sqrt{\frac{2AB}{a}} = 2 \text{ s};$$

$$v_t = OB \cdot \omega = 2\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2} \text{ m/s.}$$

$$v_a \begin{cases} v_x = v_t \frac{\sqrt{2}}{2} - v_r = 2 \text{ m/s}; \\ v_y = v_t \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \text{ m/s}; \end{cases}$$

$$|\vec{v}_a| = 2\sqrt{5} \text{ m/s.}$$

Studiul accelerațiilor. Accelerația absolută se calculează cu formula:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_c.$$

$$a_r = \dot{v}_r = a = 1 \text{ m/s}^2;$$

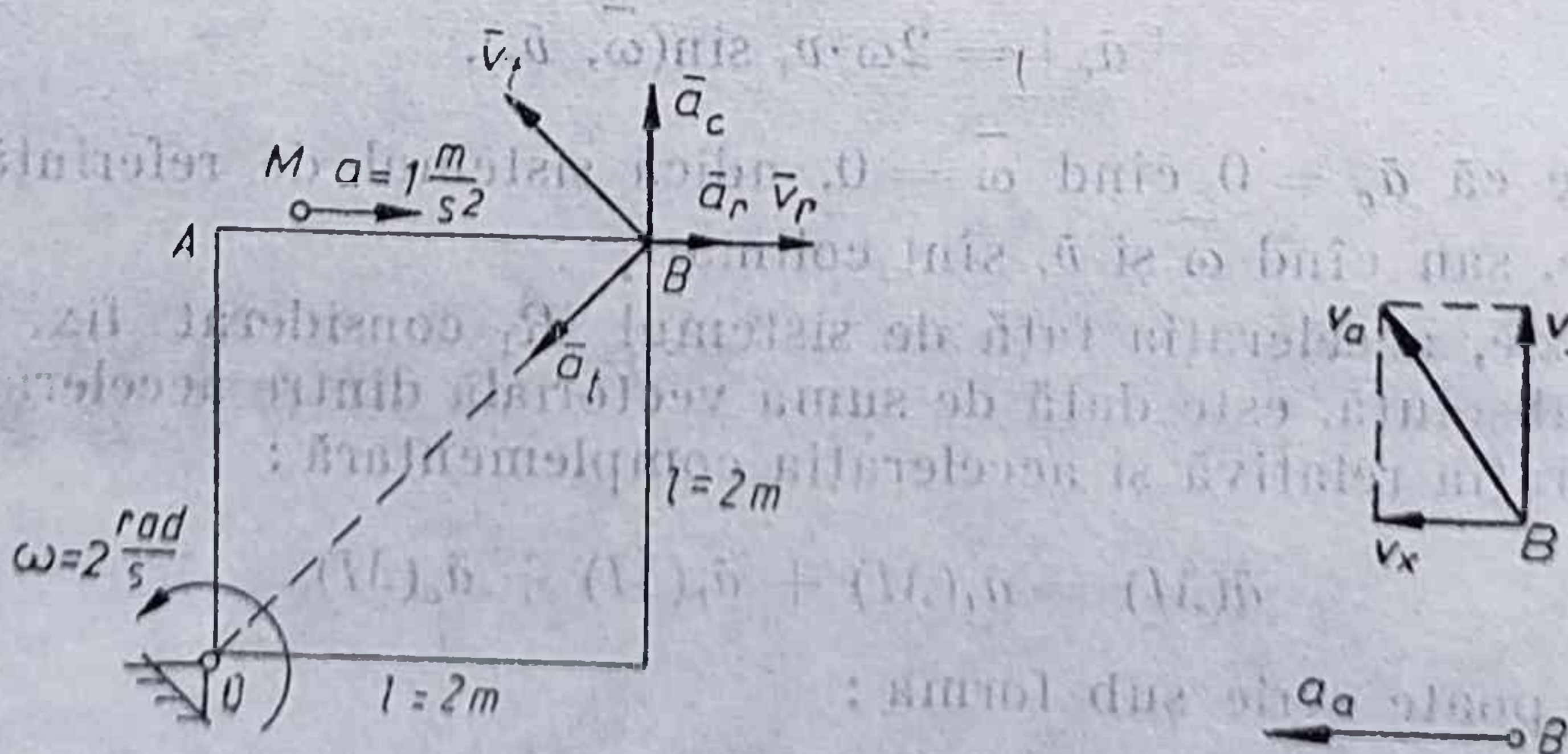


Fig. 9.3

$$a_t \begin{cases} a_t^r = 0; \\ a_t^v = 8\sqrt{2} \text{ m/s}^2; \end{cases}$$

$$a_c = 2\omega_t \cdot v_r \sin(\bar{\omega}_t, \bar{v}_r) = 8 \text{ m/s}^2;$$

$$a_a \begin{cases} a_x = a_t^v \frac{\sqrt{2}}{2} - a_r = 7 \text{ m/s}^2; \\ a_y = a_c - a_t^v \frac{\sqrt{2}}{2} = 0; \end{cases}$$

deci :

$$|\bar{a}_a| = a_x = 7 \text{ m/s}^2.$$

APLICAȚIA 2

Semicercul de rază R se rotește cu viteza unghiulară variabilă $\omega_1 = \omega_1(t)$, unde $\dot{\omega}_1 = \varepsilon_1 = \text{const.}$, în jurul axei verticale (Δ) fixă. Mobilul M parcurge periferia semicercului după legea $\theta = \frac{\varepsilon_2 \cdot t^2}{2}$, unde $\varepsilon_2 = \text{const.}$, cunoscut. Să se determine viteza și accelerația absolută a mobilului M într-o poziție oarecare și apoi în poziția A , unde $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Rezolvare

Studiul vitezelor. Viteza absolută se va calcula după formula: $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$. Se identifică definițiile respectivelor viteze cu datele problemei. Astfel, mișcarea relativă fiind mișcarea lui M pe cercul cu centrul în O , iar mișcarea de transport fiind mișcarea lui M fixat pe cadru, adică pe cercul cu centrul în O_1 și rază O_1M , vitezele vor fi :

viteza relativă: $v_r = OM \cdot \dot{\theta} = R \cdot \varepsilon_2 \cdot t$, pe tangenta la cerc;

viteza de transport: $v_t = O_1M \cdot \omega_1 = R \sin \theta \cdot \omega_1$, perpendiculară pe figură, ieșind din ea;

viteza absolută:

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{v_r^2 + v_t^2} = R \sqrt{\varepsilon_2^2 \cdot t^2 + \sin^2 \theta \cdot \omega_1^2}.$$

Studiul accelerațiilor. Accelerația relativă are componentele :

$$a_r \begin{cases} a_r^r = R \cdot \ddot{\theta} = R \cdot \varepsilon_2; \\ a_r^v = R \cdot \dot{\theta}^2 = R \cdot (\varepsilon_2 \cdot t)^2. \end{cases}$$

Accelerația de transport are componentele :

$$a_t \begin{cases} a_t^r = O_1M \cdot \dot{\omega}_1 = R \sin \theta \cdot \varepsilon_1 = R \sin \theta \cdot \varepsilon_1; \\ a_t^v = O_1M \cdot \omega_1^2 = R \sin \theta \cdot \omega_1^2. \end{cases}$$

Accelerația Coriolis se calculează după formula : $\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r$; $|\bar{a}_c| = 2|\bar{\omega}_t| |\bar{v}_r| \sin(\bar{\omega}_t, \bar{v}_r) = 2\omega_1 \cdot R \cdot \varepsilon_2 \cdot t \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = 2\omega_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot R \cdot t \cos \theta$, și

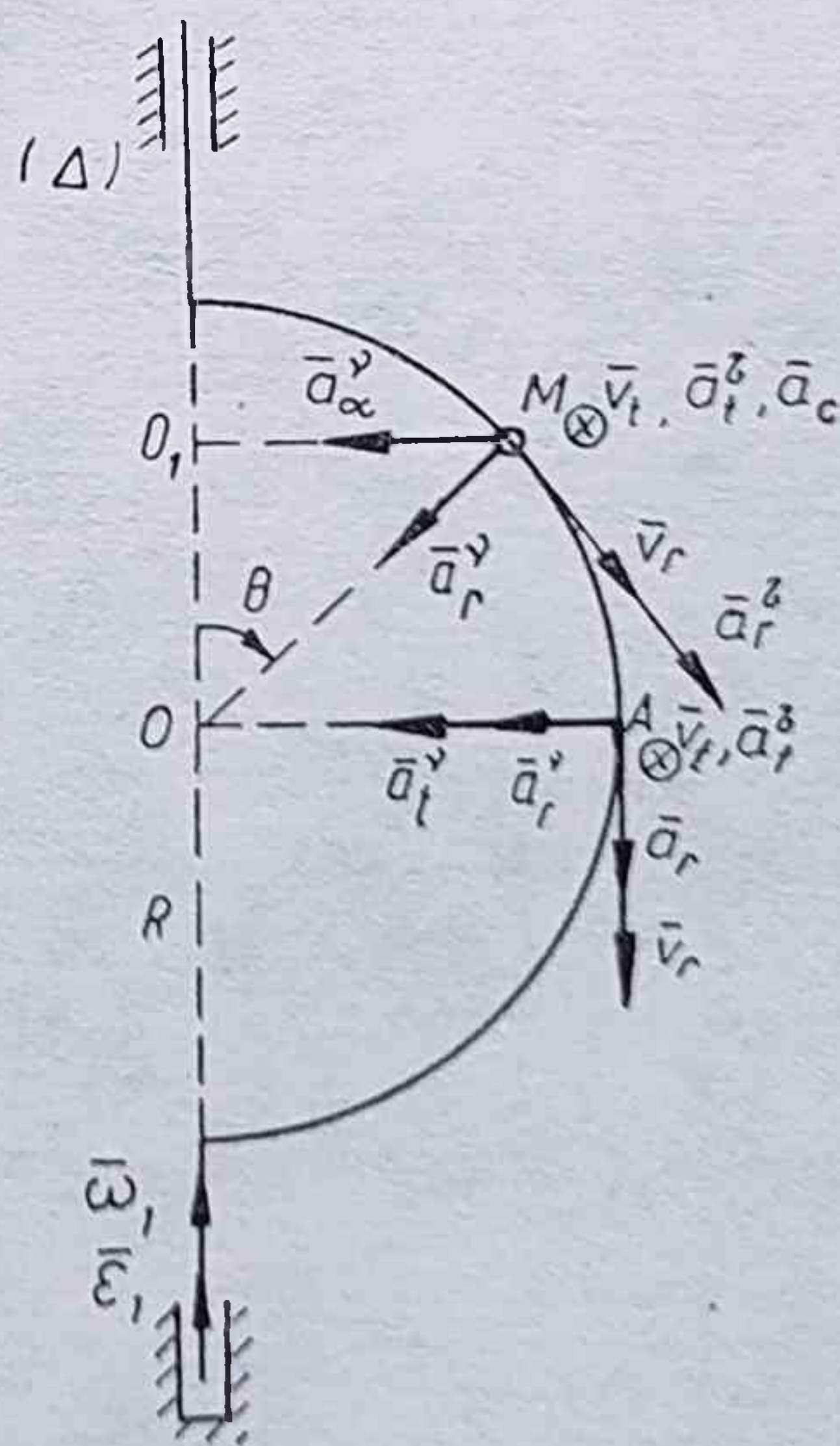


Fig. 9.4

are suportul perpendicular pe planul cadrului, ieșind din figură. Accelerația absolută este $\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c$ și are componentele :

$$a_a \begin{cases} a_x = a_r^x - a_t^y \cos \theta = R \cdot \varepsilon_2 - R \sin \theta \cdot \omega_1^2 \cos \theta \\ a_y = a_r^y + a_t^x \sin \theta = R \cdot \varepsilon_2 \cdot t^2 + R \sin^2 \theta \cdot \omega_1^2 \\ a_z = a_c + a_r^z = 2\omega_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot R \cdot t \cos \theta + R \sin \theta \cdot \varepsilon_1 \end{cases}$$

$$|\bar{a}_a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Caz particular : în poziția A, unde $\theta = \frac{\pi}{2}$, $t_A = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon_2}}$.

$$v_a \begin{cases} v_r = R \sqrt{\pi \cdot \varepsilon_2} \\ v_t = R \cdot \omega_1 \end{cases} \quad |\bar{v}_a| = R \sqrt{\omega_1^2 + \pi \cdot \varepsilon_2}$$

$$a_r \begin{cases} a_r^x = R \cdot \varepsilon_2 \\ a_r^y = R \cdot \varepsilon_2 \cdot \pi \end{cases} \quad a_t \begin{cases} a_t^x = R \cdot \varepsilon_1 \\ a_t^y = R \cdot \omega_1^2 \end{cases} \quad a_c = 0$$

$$a_a \begin{cases} a_x = a_r^x = R \cdot \varepsilon_2 \\ a_y = a_r^y + a_t^x = R \cdot \varepsilon_2 \cdot \pi + R \cdot \omega_1^2 \\ a_z = a_r^z = R \varepsilon_1. \end{cases}$$

$$|\bar{a}_a| = R \sqrt{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^2 + (\varepsilon_2 \cdot \pi + \omega_1^2)^2}$$



Partea a III-a

DINAMICA

În acest capitol al mecanicii se studiază mișcarea punctului material, a sistemelor de puncte materiale, a corpului sau a sistemelor de corpuri, ținându-se seama de masele acestor corpuri și de forțele care acționează asupra lor.

10.

DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

10.1. LEGEA FUNDAMENTALĂ A DINAMICII ÎN CAZUL PUNCTULUI MATERIAL LIBER

Mișcarea punctului material este exprimată foarte clar și concis de ecuația fundamentală a mecanicii :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}, \quad (10.1, a)$$

unde m este masa punctului material, \vec{a} este accelerația sa față de sistemul de referință considerat fix, iar \vec{F} este rezultanta forțelor ce acționează asupra acestui punct.

Ecuația fundamentală se poate scrie sub forma :

$$\vec{F} = m \cdot \ddot{\vec{r}} \quad (10.1, b)$$

accelerația fiind derivată a doua în raport cu timpul a vectorului de poziție \vec{r} . În cazul cel mai general, vectorul forță \vec{F} este o funcție de timp, de viteză, de vectorul de poziție, putând fi exprimat matematic sub forma :

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{v}, \vec{r}). \quad (10.2)$$

Ca exemplu de forță ce depinde de timp explicit se poate da forța reactivă ce acționează asupra unei rachete din momentul lansării, pînă la consumarea întregului combustibil, ce are expresia de forma $F = \alpha - \beta \cdot t$. Ca exemplu de forțe ce depind de viteza punctului se poate cita rezistența pe care o întîmpină un proiectil în aer, care este proporțională cu viteza ridicată la o anumită putere. Pentru cele ce depind de poziția punctului se poate cita forța elastică sau forța de atracție universală.

Astfel, rezistența aerului asupra unui proiectil se poate exprima sub forma :

$$\vec{R} = -k \cdot \vec{v} = -k \cdot \dot{\vec{r}}. \quad (10.2, a)$$

Proiecțiile ei pe cele trei axe au expresii de forma :

$$R_x = -k \cdot \dot{x}; \quad R_y = -k \cdot \dot{y}; \quad R_z = -k \cdot \dot{z}. \quad (10.2, b)$$

Forța elastică depinde de poziția punctului și are o expresie [de forma :

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{r}, \quad (10.2, c)$$

iar proiecțiile sale sînt :

$$X = -k \cdot x; Y = -k \cdot y; Z = -k \cdot z. \quad (10.2, d)$$

Forța de atracție universală are expresia :

$$\vec{F} = -f \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -f \frac{m \cdot M}{r^3} \vec{r}, \quad (10.2, e)$$

iar proiecțiile sale pe axe sînt :

$$\begin{aligned} X &= -\frac{f \cdot m \cdot M \cdot x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}; \\ Y &= -\frac{f \cdot m \cdot M \cdot y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}; \\ Z &= -\frac{f \cdot m \cdot M \cdot z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (10.2, f)$$

Ținînd seama de expresia generală a forței, ecuația fundamentală a dinamicii se scrie sub formă vectorială :

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}). \quad (10.3, a)$$

Proiectată pe axele de coordonate ale sistemului cartezian, această ecuație diferențială vectorială se transformă în trei ecuații diferențiale scalare :

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= X(t, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z), \\ m \cdot \ddot{y} &= Y(t, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z), \\ m \cdot \ddot{z} &= Z(t, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z). \end{aligned} \quad (10.3, b)$$

Presupunînd că sistemul a fost integrat, soluția generală este dată de :

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, \dots, C_6); y = y(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ z &= z(t, C_1, C_2, \dots, C_6). \end{aligned} \quad (10.4)$$

În expresia soluției generale au apărut șase constante de integrare $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

Pentru determinarea unei soluții particulare, se aplică condițiile inițiale la $t = 0$:

$$\begin{aligned} x &= x_0; & \dot{x} &= v_{0x}; \\ y &= y_0; & \dot{y} &= v_{0y}; \\ z &= z_0; & \dot{z} &= v_{0z}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Aceste condiții, introduse în expresiile lui x, y, z și a derivatelor lor $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, la momentul $t = 0$, conduc la :

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); & v_{0x} &= \dot{x}(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ y_0 &= y(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); & v_{0y} &= \dot{y}(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ z_0 &= z(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); & v_{0z} &= \dot{z}(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Acste ecuații alcătuiesc un sistem avînd ca necunoscute cele șase constante. Rezolvînd acest sistem, se obțin constantele :

$$\begin{aligned} C_1 &= \varphi_1(x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) ; \\ C_2 &= \varphi_2(x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) ; \\ &\vdots \\ C_6 &= \varphi_6(x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}). \end{aligned} \quad (10.7)$$

Rezultă soluția particulară sub forma :

$$\begin{aligned} x &= f_1(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) ; \\ y &= f_2(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) ; \\ z &= f_3(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}). \end{aligned} \quad (10.8)$$

În cazul coordonatelor polare r și θ , ecuația fundamentală poate fi proiectată pe direcția radială și pe o direcție perpendiculară, astfel că se obține :

$$\begin{aligned} m \cdot a_p &= m(\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2) = F_p ; \\ m \cdot a_n &= m(2\dot{r} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \ddot{\theta}) = m \frac{1}{r} \frac{d(r^2 \cdot \dot{\theta})}{dt} = F_n. \end{aligned} \quad (10.9, a)$$

În coordonate cilindrice corespunzător ecuației fundamentale se obține :

$$m(\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2) = F_p ; \quad m(r \cdot \ddot{\theta} + 2\dot{r} \cdot \dot{\theta}) = F_n ; \quad m \cdot \ddot{z} = F_z. \quad (10.9, b)$$

Pentru sistemul de coordonate intrinseci (triedrul lui Frenet) proiecțiile ecuației fundamentale se scriu sub forma :

$$m \cdot \ddot{s} = F_\tau(s, \dot{s}, t) ; \quad m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n(s, \dot{s}, t) ; \quad 0 = F_p(s, \dot{s}, t). \quad (10.9, c)$$

10.1.1. MIȘCAREA PUNCTULUI MATERIAL ÎN VID

Se studiază mișcarea unui punct material liber, de masă m , lansat în vid cu viteza v_0 înclinată cu unghiul α față de orizontală (fig. 10.1).

Se alege sistemul de axe luînd planul Oxy definit de v_0 și greutatea $m \cdot g$, deci planul vertical.

Ecuațiile diferențiale ale mișcării sînt :

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= 0 ; \quad m \cdot \ddot{y} = \\ &= -m \cdot g ; \quad m \cdot \ddot{z} = 0, \end{aligned} \quad (10.10)$$

sau

$$\ddot{x} = 0 ; \quad \ddot{y} = -g ; \quad \ddot{z} = 0.$$

Prin integrare se obține :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_1 ; \quad \dot{y} = -g \cdot t + C_2 ; \\ \dot{z} &= C_3, \end{aligned} \quad (10.11, a)$$

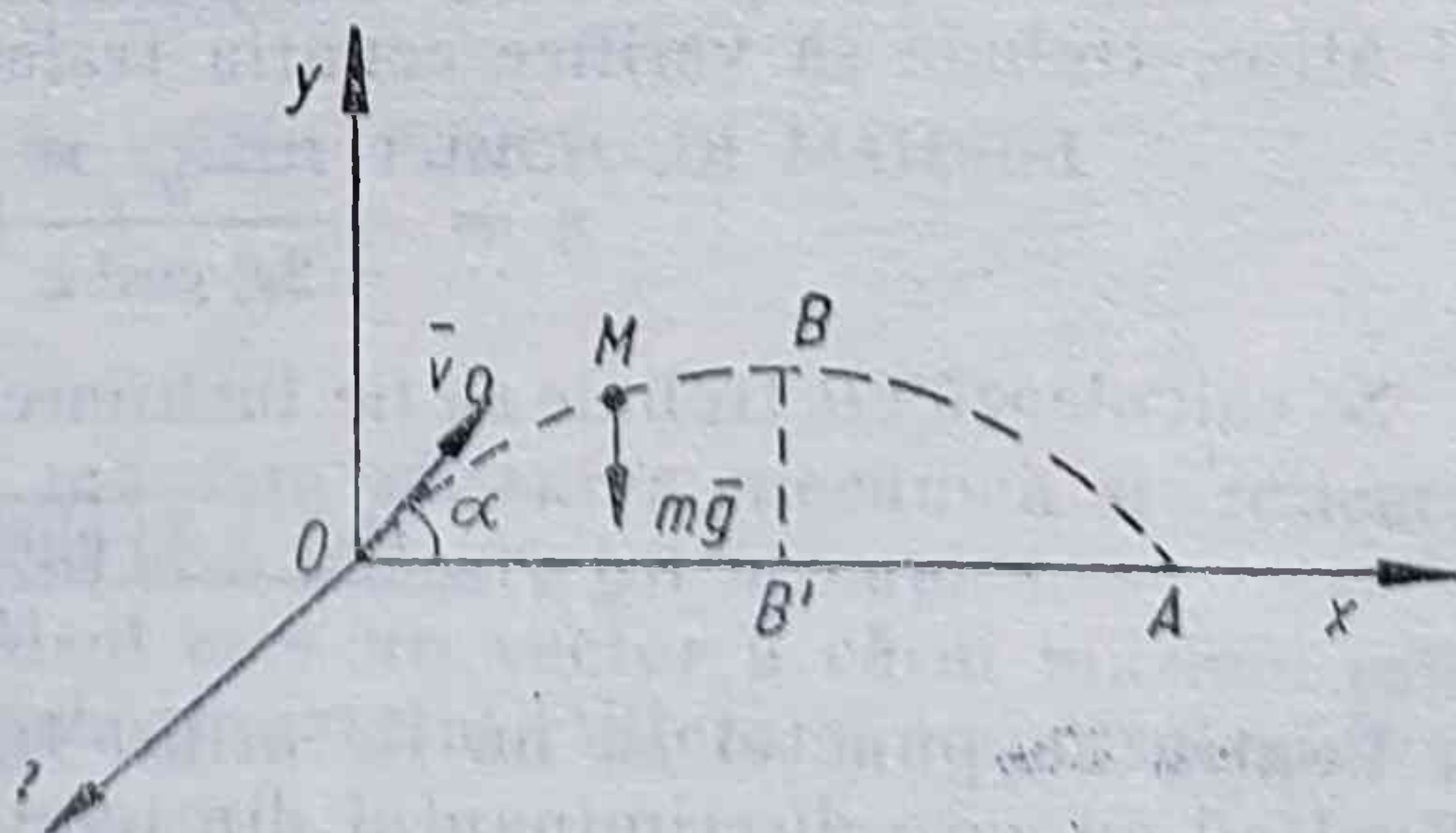


Fig. 10.1

precum și

$$x = C_1 \cdot t + C_2; \quad y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + C_3 \cdot t + C_4; \quad z = C_5 \cdot t + C_6 \quad (10.11, b)$$

Condițiile inițiale sînt :

$$\begin{aligned} \text{la } t = 0; \quad x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0 \\ \dot{x} = v_0 \cos \alpha; \quad \dot{y} = v_0 \sin \alpha; \quad \dot{z} = 0. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Rezultă constantele :

$$C_1 = v_0 \cos \alpha; \quad C_3 = v_0 \sin \alpha; \quad C_2 = C_4 = C_5 = C_6 = 0. \quad (10.13)$$

Se obțin astfel ecuațiile parametrice ale mișcării :

$$x = t \cdot v_0 \cos \alpha; \quad y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + t \cdot v_0 \sin \alpha; \quad z = 0 \quad (10.14)$$

Din ultimele ecuații se deduce că mișcarea se petrece într-un plan vertical.

Eliminînd parametrul t între primele două ecuații parametrice, rezultă ecuația traiectoriei :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2, \quad (10.15)$$

care este o parabolă.

Parametrii traiectoriei se studiază în continuare, pe baza unor considerente cinematice.

Distanța OA , denumită bătaie, se calculează punînd condiția $y_A = 0$. Rezultă :

$$t_A = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \text{ și } x_A = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (10.16)$$

Înălțimea maximă a traiectoriei, BB' , se obține observînd că în punctul B viteza este orizontală, deci $\dot{y}_B = 0$. Rezultă că :

$$t_B = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \text{ și } BB' = y_B = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (10.17)$$

Se observă că bătaia cea mai mare, pentru un v_0 dat, se obține pentru $\alpha = \frac{\pi}{4}$, iar înălțimea cea mai mare se obține pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Interesează să se determine punctele din plan ce nu pot fi atinse cu un proiectil lansat cu v_0 , indiferent de unghiul de înclinare al vitezei inițiale.

Se consideră un punct M din plan, de coordonate ξ și η care, pentru a fi atins, trebuie să verifice ecuația traiectoriei :

$$\eta = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \xi^2 + \xi \operatorname{tg} \alpha. \quad (10.18)$$

Se calculează cît trebuie să fie înclinarea α pentru ca punctul M să fie atins :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2 \cdot \xi \pm \xi \sqrt{v_0^4(v_0^2 - 2g \cdot \eta) - g \cdot \xi^2}}{g \cdot \xi^2}. \quad (10.19)$$

Pentru ca punctul să nu fie atins, $\operatorname{tg} \alpha$ trebuie să aibă soluții complexe. Egalînd cu zero discriminantul din relația lui $\operatorname{tg} \alpha$, se obține locul geometric al punctelor ce delimitează zona ce nu poate fi atinsă de proiectil. Această

curbă se numește curbă de siguranță :

$$v_0^2(v_0^2 - 2g \cdot \eta) - g^2 \cdot \xi^2 = 0. \quad (10.20)$$

Se vede că această curbă este o parabolă, care coincide la intersecțiile cu axele, cu distanțele maxime pe care le poate străbate proiectilul în lungul axei Ox (pentru $\alpha = \frac{\pi}{4}$) și în lungul axei Oy (pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$) (fig. 10.2).

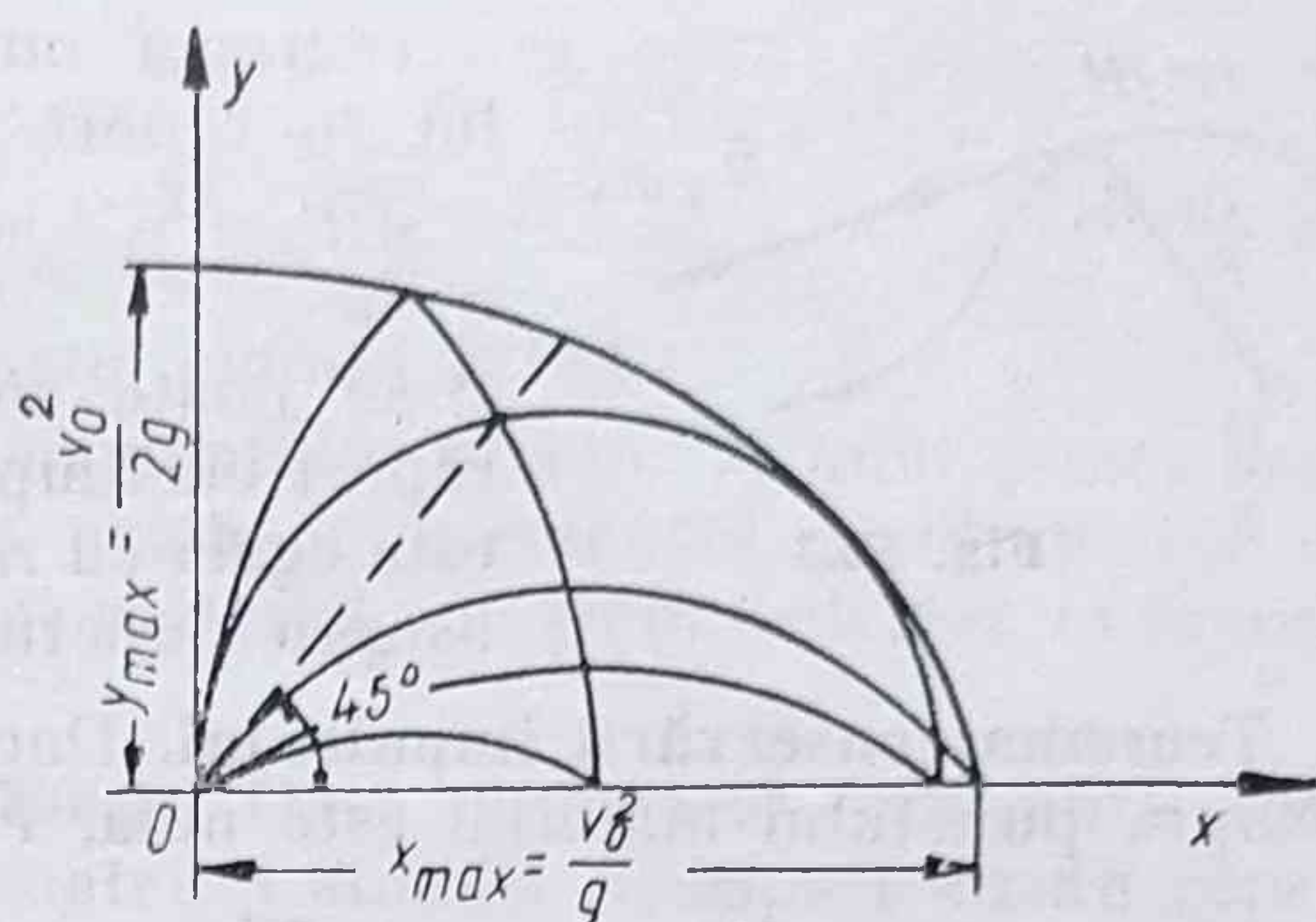


Fig. 10.2

10.1.2. MIȘCAREA PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI

Pentru a studia mișcarea unui punct material supus la legături, în baza axiomei legăturilor se îndepărtează toate legăturile și se introduc în loc forțele de legătură corespunzătoare \bar{F}_l . În acest mod se obține un punct material liber asupra căruia acționează un sistem de forțe format din forțele active (forțele date) și forțele de legătură. În baza acestui raționament, expresia ecuației fundamentale a mecanicii se poate scrie sub forma :

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = \sum \bar{F}_a + \sum \bar{F}_l. \quad (11.21)$$

În cazul punctului material rezemat pe o suprafață fixă dată, forțele de legătură sînt o reacțiune normală și o forță de frecare ce este direct opusă vitezei punctului. Dacă suprafața pe care se sprijină punctul este exprimată prin relația $\varphi(x, y, z) = 0$, reacțiunea normală are o expresie de forma :

$$\bar{N} = \lambda \text{grad } \varphi, \quad (10.22)$$

Ecuația mișcării fără frecare devine în acest caz :

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = \sum \bar{F}_a + \lambda \text{grad } \varphi. \quad (10.23)$$

Dacă punctul se sprijină pe o anumită curbă ce rezultă din intersecția a două suprafețe :

$$\varphi_1(x, y, z) = 0 \text{ și } \varphi_2(x, y, z) = 0, \quad (10.24)$$

reacțiunea va fi exprimată printr-o relație de forma :

$$\bar{N} = \lambda_1 \text{grad } \varphi_1 + \lambda_2 \text{grad } \varphi_2, \quad (10.25)$$

iar ecuația mișcării punctului, neglijînd frecarea, va fi de forma :

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = \sum \bar{F}_a + \lambda_1 \text{grad } \varphi_1 + \lambda_2 \text{grad } \varphi_2, \quad (10.26)$$

unde λ_1 și λ_2 sînt doi scalari nedeterminați.

10.1.3. TEOREMELE GENERALE ÎN CAZUL PUNCTULUI MATERIAL

10.1.3.1. Teorema impulsului

Impulsul este o mărime fizică ce măsoară mișcarea mecanică și reflectă capacitatea ei de a se transforma într-o altă mișcare tot mecanică.

În cazul punctului material, impulsul este un vector a cărui mărime este egală cu produsul dintre masa și viteza punctului. Viteza și impulsul sînt și vectori coliniari (fig. 10.3) :

$$\vec{P} = m \cdot \vec{v}. \quad (10.27)$$

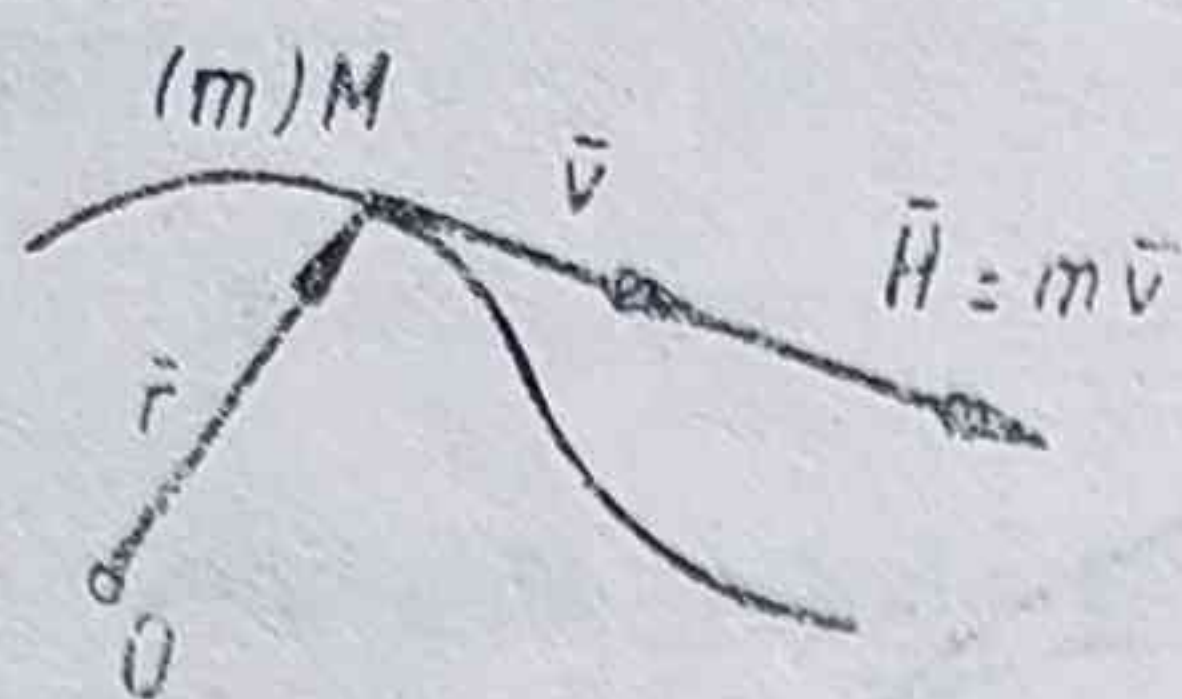


Fig. 10.3

Teorema impulsului. Derivând expresia impulsului în raport cu timpul se obține :

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{\dot{H}} = \frac{d(m \cdot \bar{v})}{dt} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = m \cdot \bar{a} = \bar{F}, \quad (10.28, a)$$

și se poate enunța teorema astfel : — derivata în raport cu timpul a impulsului unui punct material este egală cu rezultanta \bar{F} a forțelor care acționează asupra punctului.

Teorema conservării impulsului. Dacă rezultanta forțelor \bar{F} ce acționează, asupra punctului material este nulă, $\bar{F} = 0$, atunci avem relația :

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{m \cdot d\bar{v}}{dt} = 0; \quad (10.28, b)$$

și rezultă : $\bar{H} = \bar{C}$.

Proiectată pe cele trei axe, relația devine :

$$H_x = C_1; \quad H_y = C_2; \quad H_z = C_3.$$

Dacă doar proiecția pe o axă a forțelor este nulă, de exemplu $F_x = 0$, atunci doar $H_x = C_1$.

Teorema conservării impulsului se poate enunța astfel : dacă rezultanta forțelor ce acționează asupra unui punct material sau numai proiecția ei pe o axă este nulă, atunci impulsul total sau proiecția impulsului punctului material pe această axă este o constantă, adică se conservă.

10.1.3.2. Teorema momentului cinetic

Momentul cinetic este o mărime fizică care conține pe cea de impuls și, prin definiție, este egal cu momentul impulsului punctului material în raport cu un punct O (fig. 10.4), adică :

$$\bar{K}_O = \bar{r} \times m \cdot \bar{v}. \quad (10.29, a)$$

Expresia analitică este :

$$\bar{K}_O = \bar{r} \times m \cdot \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = K_x \cdot \bar{i} + K_y \cdot \bar{j} + K_z \cdot \bar{k}. \quad (10.29, b)$$

Momentul cinetic este o mărime vectorială și are caracterul unui vector legat, adică mărimea, direcția și sensul se modifică dacă se schimbă reperul față de care se calculează momentul cinetic.

Teorema momentului cinetic. Dacă se derivează momentul cinetic, se obține :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{K}_O}{dt} &= \frac{d(\bar{r} \times m \cdot \bar{v})}{dt} = \\ &= \frac{d\bar{r}}{dt} \times m \cdot \bar{v} + \bar{r} \times \frac{d(m \cdot \bar{v})}{dt} = \bar{r} \times \bar{F}. \end{aligned}$$

Aceasta pe baza faptului că :

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \times m \cdot \bar{v} = 0 \text{ și că } \frac{d}{dt}(m \cdot \bar{v}) = \bar{F}.$$

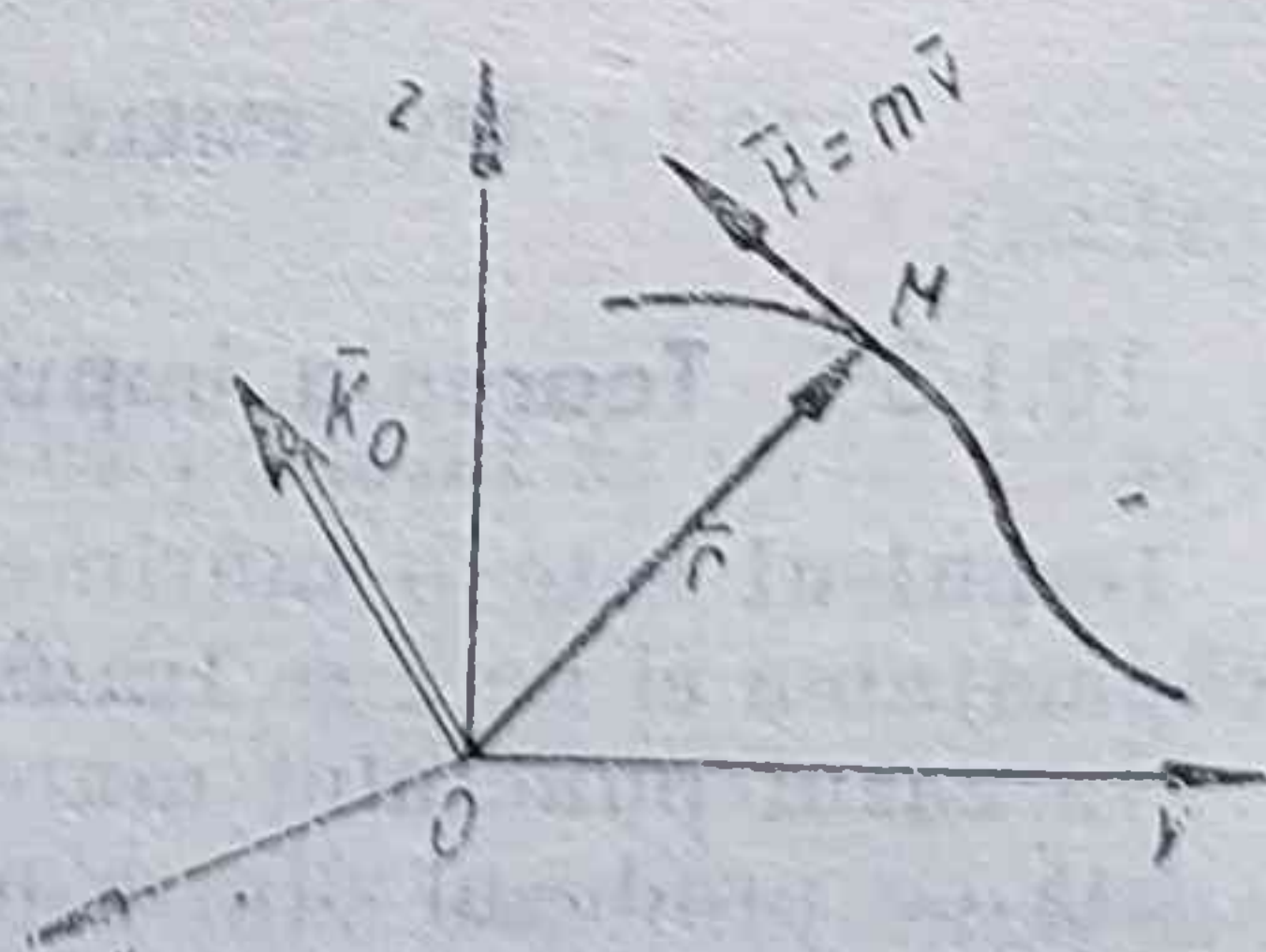


Fig. 10.4

Deci :

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \dot{\bar{K}}_0 = \bar{M}_0. \quad (10.30, a)$$

Teorema momentului cinetic se poate enunța astfel :

— derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unui punct material în raport cu un punct O , este egală cu momentul rezultantei \bar{F} a forțelor ce acționează asupra punctului material, moment calculat în raport cu același punct O .

Teorema conservării momentului cinetic. Dacă momentul rezultantei forțelor ce acționează asupra punctului material stabilit în raport cu un reper fix, este nul, atunci avem :

$$\bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_0 = 0, \text{ atunci } \dot{\bar{K}}_0 = 0 \text{ și } \bar{K}_0 = C. \quad (10.30, b)$$

Dacă numai momentul față de o axă este nul, de exemplu

$$M_z = 0, \text{ atunci } K_z = C_1. \quad (10.30, c)$$

Teorema conservării impulsului se poate enunța astfel :

— dacă momentul forței rezultante în raport cu un punct sau cu o axă este nul, atunci momentul cinetic în raport cu acest punct sau această axă este o constantă, adică se conservă.

10.1.3.3. Teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic

Energia cinetică este o mărime de stare. Ea măsoară capacitatea mișcării mecanice de a trece într-o cantitate echivalentă a unei alte forme de mișcare, nemecanică.

Energia cinetică pentru un punct material are expresia :

$$E = \frac{1}{2} m \cdot v^2, \quad (10.31)$$

fiind o mărime scalară, întotdeauna pozitivă.

Lucrul mecanic este măsura transferului de energie între două stări ale unui sistem material dat.

În cazul unei forțe ce își deplasează punctul de aplicație pe o curbă (C) , expresia lucrului mecanic elementar este dată de produsul scalar dintre forța \bar{F} și deplasarea elementară $d\bar{r}$ (fig. 10.5) :

$$dL = \bar{F} \cdot d\bar{r}. \quad (10.32)$$

Expresia se poate pune sub altă formă, efectuând produsul scalar și notînd $|d\bar{r}| = ds$.

$$dL = F \cdot ds \cos \alpha. \quad (10.33)$$

Lucrul mecanic este o mărime scalară, pozitivă (motor), negativă (rezistent) sau nulă, după valoarea unghiului α dintre direcția forței și deplasare.

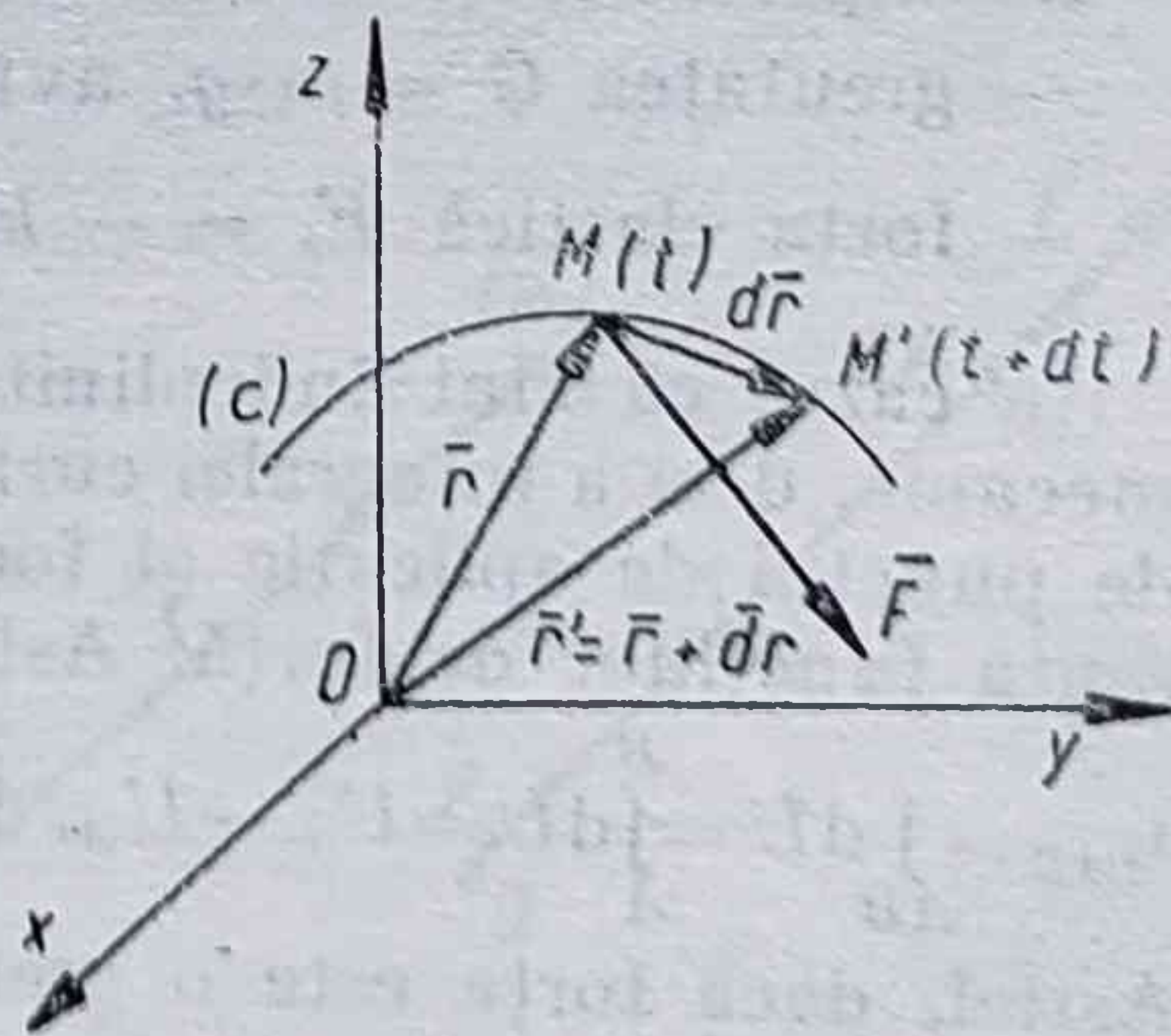


Fig. 10.5

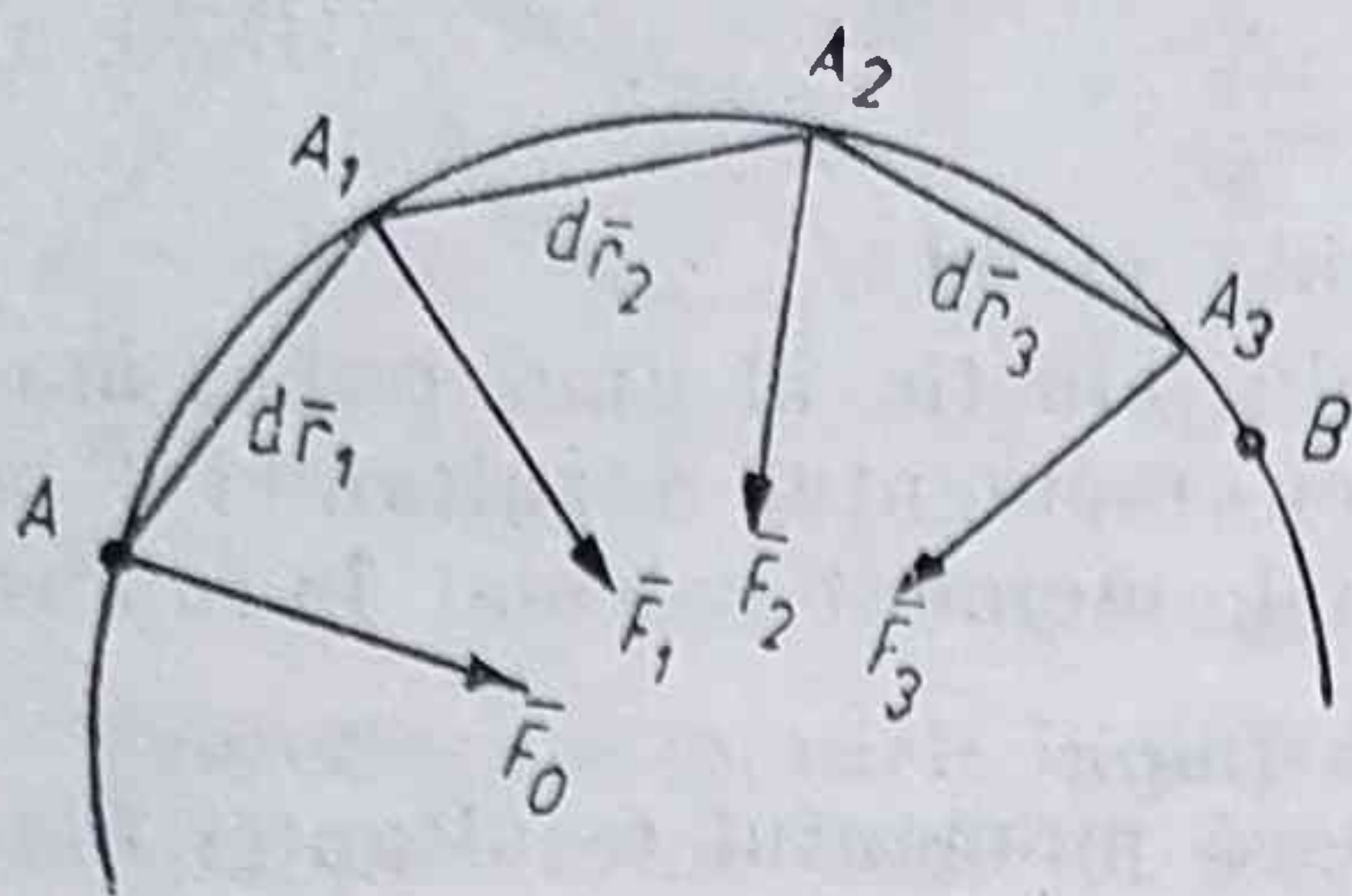


Fig. 10.6

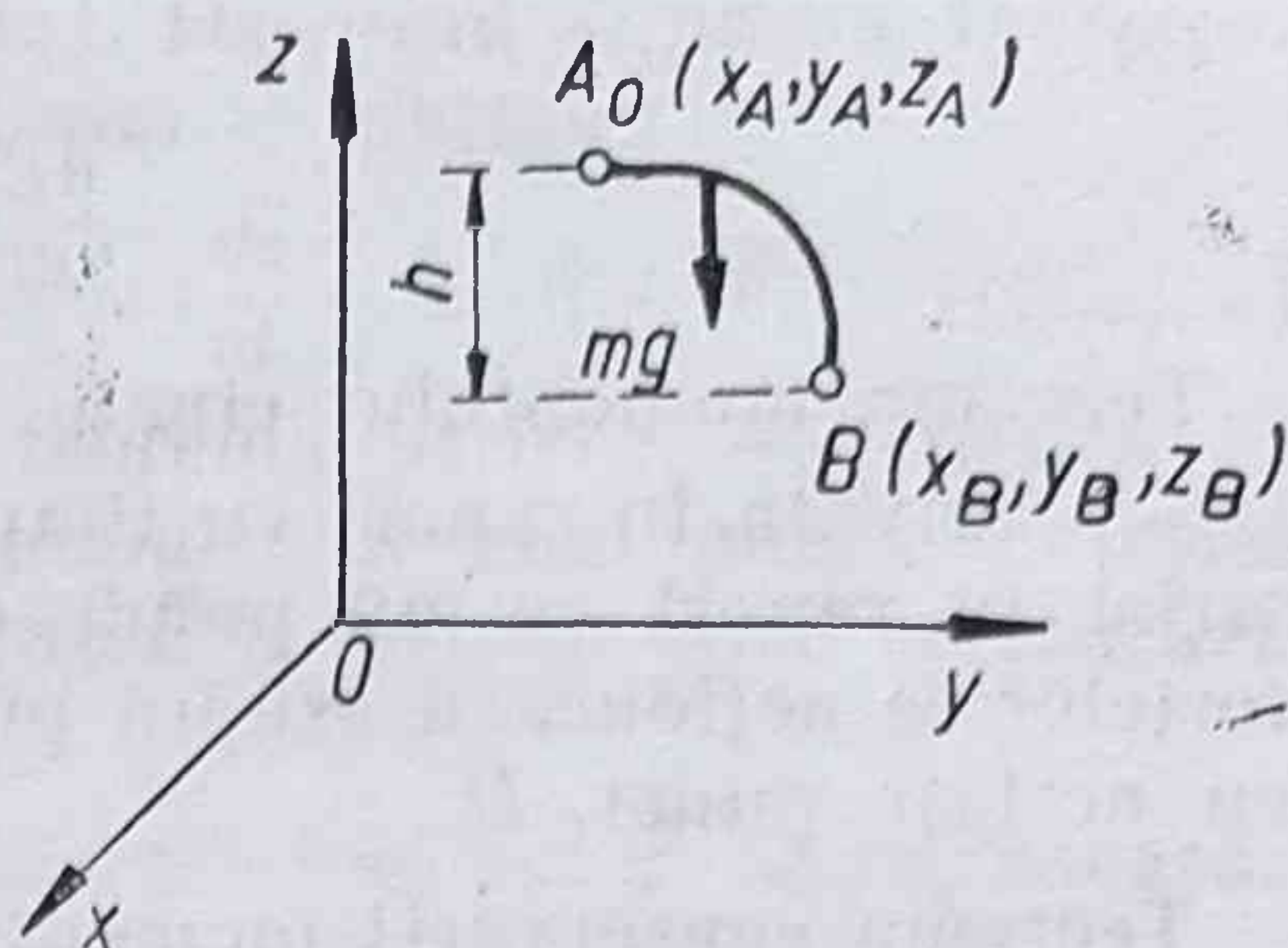


Fig. 10.7

Lucrul mecanic total sau finit se pune în evidență dacă se consideră (fig. 10.6) mișcarea forței variabile \vec{F} ce acționează un punct material ce se deplasează pe curba (C) din A în B. Se descompune mișcarea în mișcări elementare, reducându-se problema la cea precedentă; pentru fiecare element de arc se consideră forța constantă și arcul aproximativ egal cu coarda.

Însumînd lucrurile mecanice elementare, se obține lucru mecanic total sau finit, efectuat de \vec{F} de la A la B:

$$L_{AB} = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz), \quad (10.34)$$

expresie ce reprezintă o integrală curbilinie care face deci ca lucrul mecanic total să depindă, în general, atît de forță cît și de arcul de curbă AB parcurs.

Pentru ca lucrul mecanic să nu depindă de drum, trebuie ca sub integrală să fie o diferențială totală, adică să se poată scrie:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = dU, \quad (10.35, a)$$

sau:

$$X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz, \quad (10.35, b)$$

de unde rezultă:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (10.35, c)$$

Aceste condiții pot fi îndeplinite dacă:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}. \quad (10.36)$$

Funcția $U(x, y, z)$ care îndeplinește aceste condiții poartă numele de funcție de forță, iar forța F se numește forță conservativă.

Exemple de forțe ce derivă din funcții de forță se pot da:

$$- \text{greutatea } G = m \cdot g, \text{ avînd } U = m \cdot g \cdot z + C; \quad (10.37)$$

$$- \text{forța elastică } F_e = -k \cdot r, \text{ avînd } U = \frac{-k \cdot r^2}{2} + C. \quad (10.38)$$

În cazul că sînt îndeplinite condițiile funcției de forță, expresia lucrului mecanic, deci a integralei curbilinii de mai sus, nu depinde de drumul parcurs de punctul de aplicație al forței, ci de pozițiile inițială și finală, fiind diferența funcțiilor de forță. Astfel:

$$L_{AB} = \int_{AB} dU = \int_A^B dU = U_B - U_A, \text{ deci } L_{AB} = U_B(x_B, y_B, z_B) - U_A(x_A, y_A, z_A), \quad (10.39)$$

Astfel, dacă forța este o greutate $m \cdot g$ (fig. 10.7), rezultă:

$$L_{AB} = U_B - U_A = (-m \cdot g \cdot z_B + C) - (-m \cdot g \cdot z_A + C) = m \cdot g(z_A - z_B) = m \cdot g \cdot h \quad (10.40)$$

Teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic. Pornind de la ecuația fundamentală și înmulțind scalar cu $d\vec{r}$ se obține :

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot \vec{a} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v} = m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v} ;$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = d\left(\frac{1}{2} m \cdot v^2\right) = dE = E_2 - E_1. \quad (10.41)$$

În această relație, $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ este lucrul mecanic elementar efectuat, iar $\frac{1}{2} m \cdot v^2 = E$ este *energia cinetică a punctului material*.

Teorema energiei cinetice se poate enunța astfel : variația energiei cinetice între două poziții ale unui punct material este egală cu lucrul mecanic efectuat de rezultanta forțelor ce acționează asupra punctului material între cele două poziții (inițială și finală) :

$$L_{AB} = E_B - E_A. \quad (10.42)$$

Teorema de conservare a energiei mecanice. Dacă avem : $\vec{F} \cdot d\vec{r} = dU$ și $X = \frac{\partial U}{\partial x}$; $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$ și $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$, atunci, se poate scrie : $dE = dU$ sau $d(E - U) = 0$ și rezultă : $E - U = C = \text{constantă}$. Dacă în locul funcției U se folosește o funcție V dată de relația : $V = -U$, rezultă : $E + V = C$. (10.43)

Funcția V exprimă mărimea fizică denumită *energie potențială*. Suma $E + V$ dintre energia cinetică și energia potențială poartă numele de : *energie mecanică*.

Față de cele arătate se poate enunța teorema de conservare, astfel : dacă rezultanta forțelor ce acționează asupra punctului material derivă dintr-o funcție de forță, energia mecanică se conservă.

10.2. MIȘCAREA UNUI PUNCT MATERIAL SUB ACȚIUNEA UNEI FORȚE CENTRALE

10.2.1. GENERALITĂȚI

Se consideră cazul unui punct material asupra căruia acționează o forță al cărui suport trece permanent printr-un punct fix O . În acest caz se spune că forța este centrală (fig. 10.8).

Ecuația fundamentală a dinamicii se poate scrie :

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} = F \cdot \vec{\rho}. \quad (10.44)$$

Se observă că vectorul de poziție \vec{r} și vectorul forță \vec{F} sînt coliniari. Dacă se înmulțește vectorial ecuația de mai sus cu \vec{r} , vectorul de poziție, se obține :

$$\vec{r} \times m \cdot \vec{a} = \vec{r} \times F \cdot \vec{\rho} = 0,$$

și rezultă $\vec{r} \times \vec{a} = 0$ sau :

$$\vec{r} \times \vec{a} = \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) -$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) = 0,$$

$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{C}$, fiind vector constant,

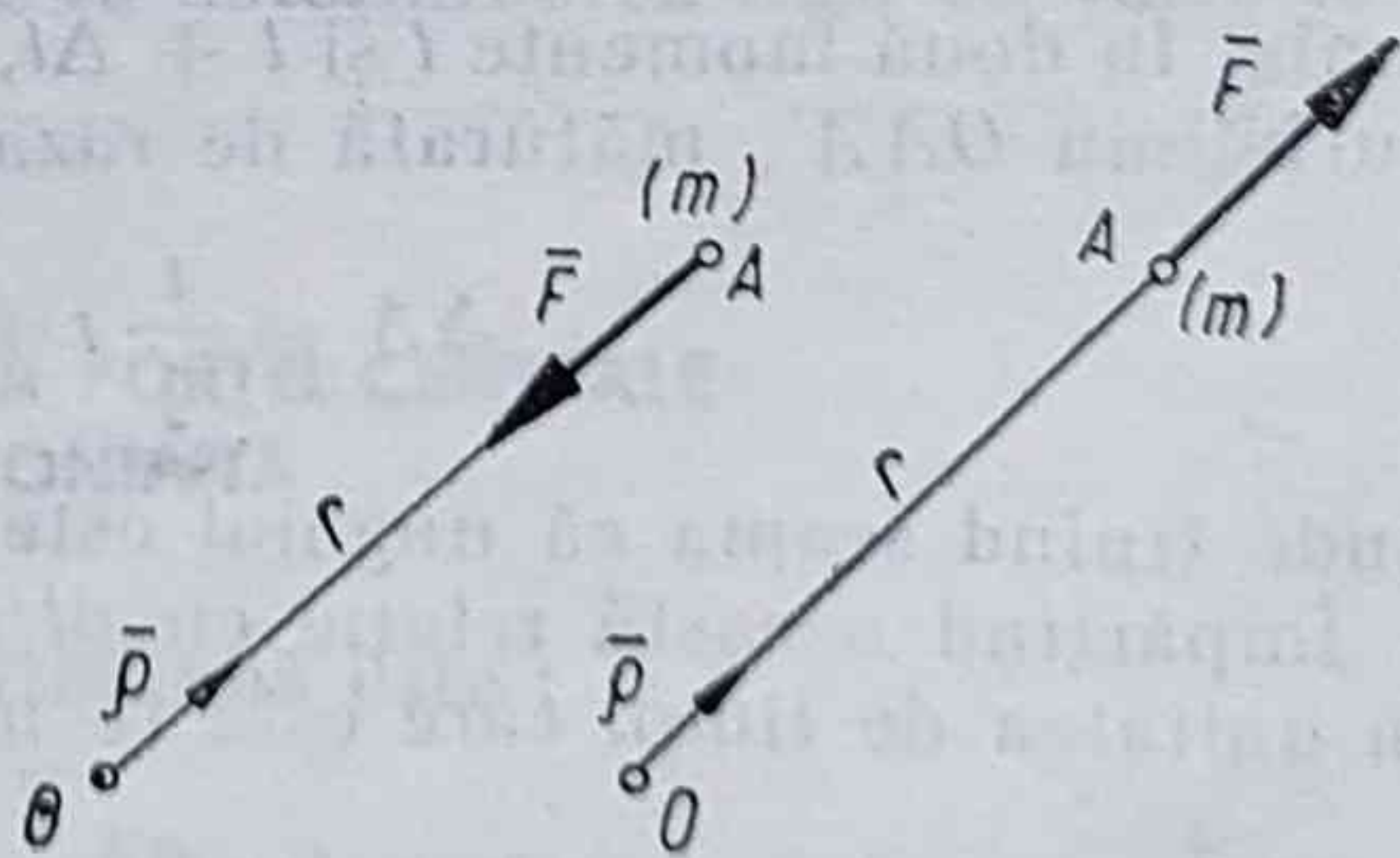


Fig. 10.8

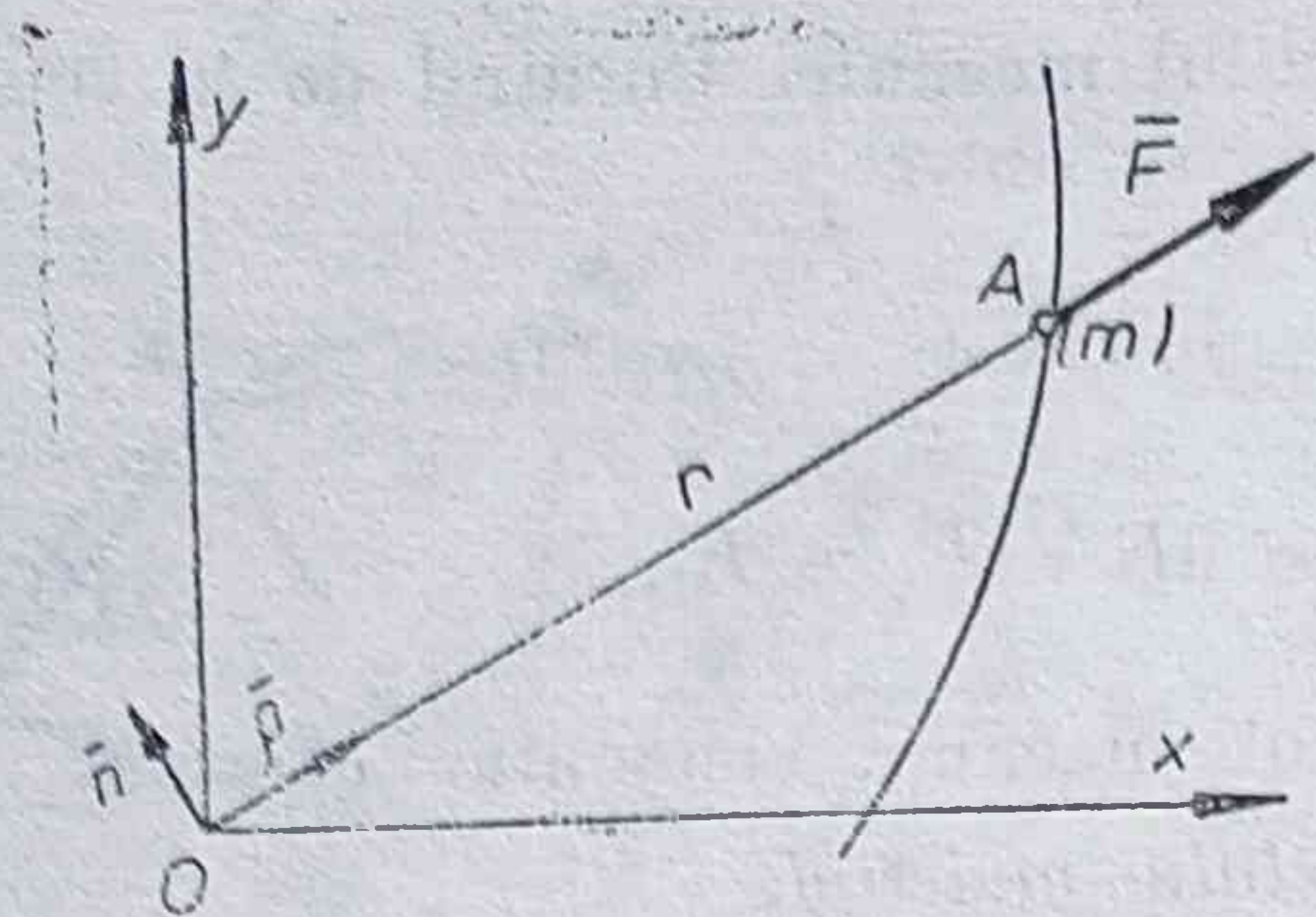


Fig. 10.9

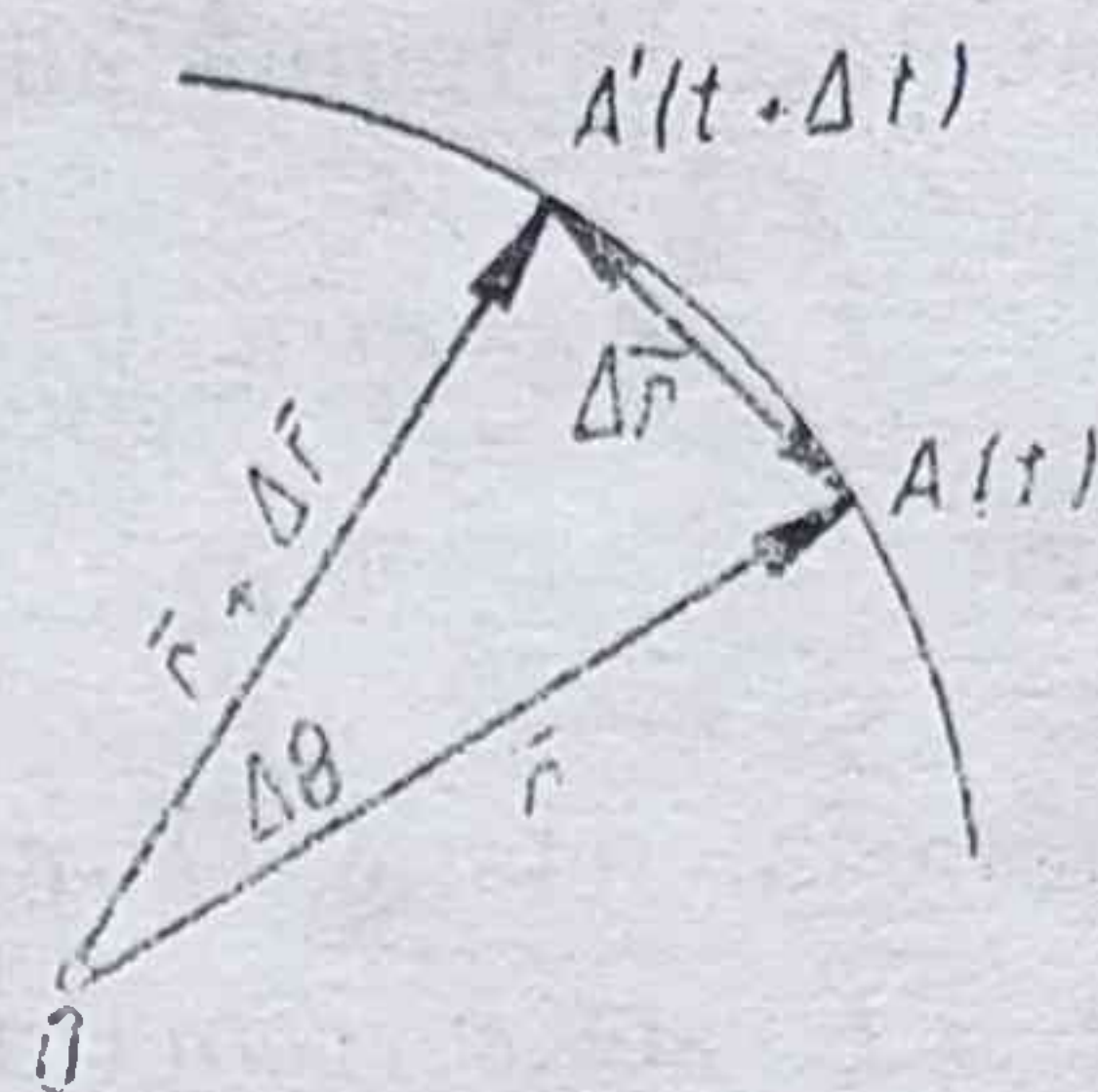


Fig. 10.10

Înmulțind scalar această relație cu vectorul de poziție \vec{r} , se obține :

$$\vec{C} \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{r} = 0, \quad (10.45)$$

deoarece în acest produs mixt doi factori sînt identici. Dacă vectorii \vec{C} și \vec{r} în raport cu un sistem cartezian au expresiile : $\vec{C} = C_1 \cdot \vec{i} + C_2 \cdot \vec{j} + C_3 \cdot \vec{k}$; $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$, atunci produsul scalar are ca urmare expresia :

$$C_1 \cdot x + C_2 \cdot y + C_3 \cdot z = 0, \quad (10.46)$$

și reprezintă ecuația unui plan ce trece prin origine, normal pe vectorul \vec{C} . Se poate enunța deci că *traectoria unui punct material acționat de o forță centrală este plană*.

Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii pe direcțiile radială și transversală și ținînd seama de expresiile componentelor accelerațiilor după cele două direcții ($\vec{\rho}$, \vec{n}), se obține (fig. 10.9) :

$$m(\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2) = F; \quad m(r \cdot \ddot{\theta} + 2\dot{r} \cdot \dot{\theta}) = 0. \quad (10.47)$$

Din a doua ecuație a sistemului se poate determina încă o proprietate generală a mișcării punctului sub acțiunea unei forțe centrale. Se poate observa ușor că :

$$0 = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt} (r^2 \cdot \dot{\theta}) = \frac{1}{r} (r^2 \cdot \ddot{\theta} + 2r \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta})$$

și rezultă :

$$\frac{d}{dt} (r^2 \cdot \dot{\theta}) = 0 \text{ și deci : } r^2 \cdot \dot{\theta} = C. \quad (10.48)$$

Dacă se consideră traiectoria și două poziții A și A' ocupate de punctul mobil în două momente t și t + Δt, se observă (fig. 10.10) că aria triunghiului curbiliniu OAA', măturată de raza vectoare în intervalul de timp Δt, este :

$$\Delta A = \frac{1}{2} r \cdot r \sin \Delta \theta \approx \frac{1}{2} r^2 \cdot d\theta,$$

unde ținînd seama că unghiul este mic s-a luat $\sin \Delta \theta \approx d\theta$.

Împărțind această relație cu dt se obține aria măturată de raza vectoare în unitatea de timp, care este tocmai viteza areolară :

$$\Omega = \frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{r^2}{2} \dot{\theta}. \quad (10.49, a)$$

Ținând seama că :

$$r^2 \cdot \dot{\theta} = C, \text{ se poate scrie : } \Omega = \frac{C}{2} = \text{constant.} \quad (10.49, b)$$

Sub acțiunea unei forțe centrale, un punct material liber se mișcă cu o viteză areolară constantă.

10.2.2. ECUAȚIA LUI BINET

Sistemul de ecuații diferențiale stabilit pentru a exprima proiecțiile ecuației fundamentale pe cele două direcții radială și transversală $(\bar{\rho}, \bar{n})$ se poate scrie sub forma :

$$r^2 \cdot \dot{\theta} = C; \quad m(\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2) = F. \quad (10.50)$$

Se mai poate scrie : $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ și, înlocuind în a doua ecuație, se obține :

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = \frac{F}{m}. \quad (10.51)$$

Pentru a ajunge la o expresie mai convenabilă este util a transforma această expresie astfel încât să apară variabilele r și θ . Se observă că :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\theta}; \quad (10.52)$$

deoarece :

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}; \text{ rezultă } \dot{r} = -C \frac{d \left(\frac{1}{r} \right)}{d\theta} \text{ și } -\frac{C^2}{r^3} \frac{d^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{d\theta^2} = \ddot{r}.$$

Folosind această expresie în a doua ecuație diferențială a sistemului de bază, se obține :

$$\frac{d^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{F \cdot r^2}{m \cdot C^2}. \quad (10.53)$$

Această ecuație poartă numele de *formula lui Binet*. Formula lui Binet poate fi folosită pentru determinarea traiectoriei când se cunoaște legea de variație a forței \vec{F} și, reciproc, poate fi utilizată la determinarea legii de variație a forței \vec{F} când se cunoaște traiectoria.

10.2.3. MIȘCAREA SUB ACȚIUNEA FORȚEI CENTRALE DE ATRACȚIE NEWTONIANĂ

Expresia scalarului forței de atracție newtoniană este :

$$F = -f \frac{m_0 \cdot m}{r^2} = -\frac{k \cdot m}{r^2}, \text{ unde } k = f \cdot m_0. \quad (10.54)$$

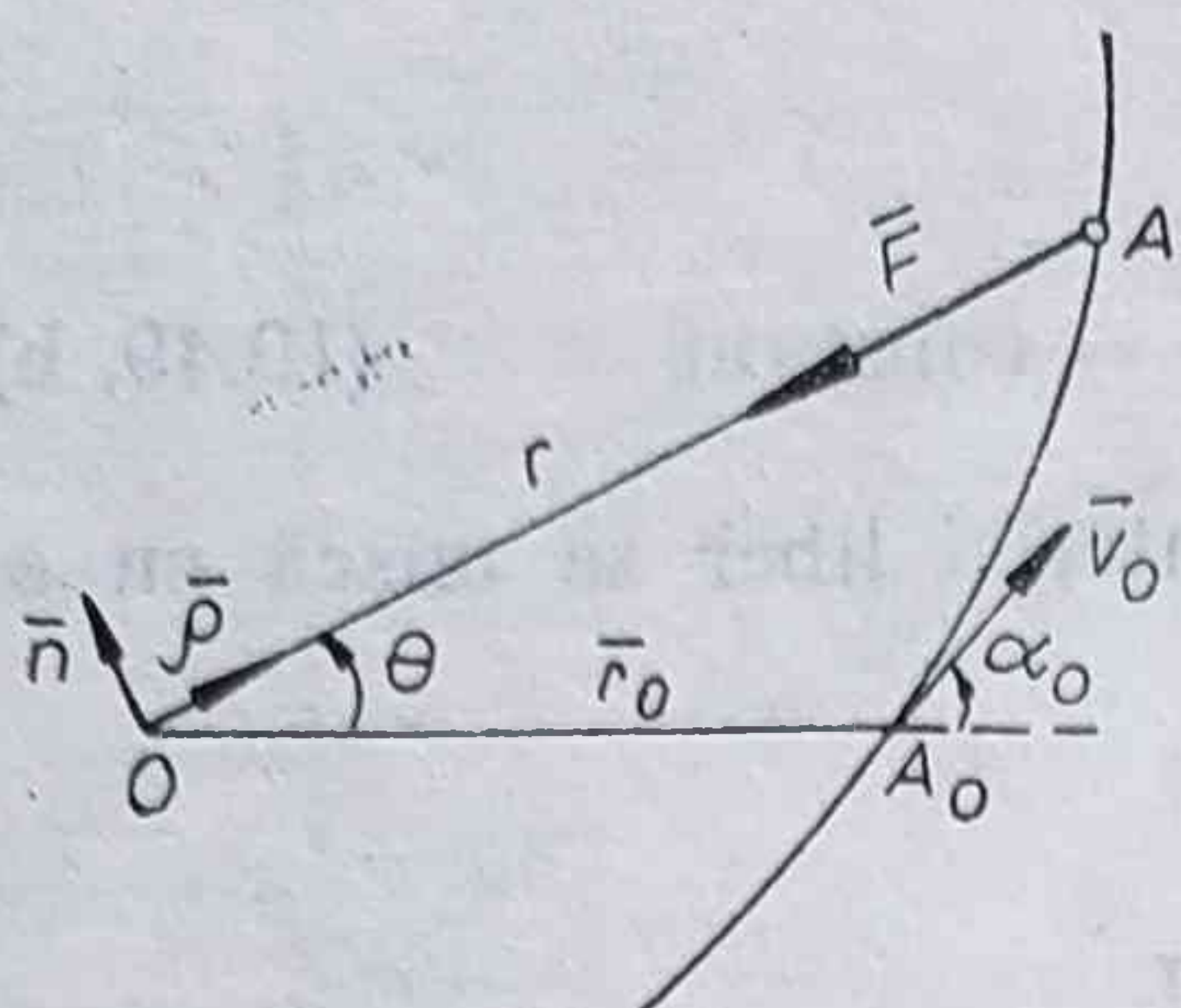


Fig. 10.11

Formula lui Binet devine :

$$\frac{d^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{k}{C^2} = \frac{1}{p};$$

$$\text{unde } p = \frac{C^2}{k}.$$

Prin integrarea acestei ecuații diferențiale de gradul doi, se obține :

$$\frac{1}{r} = \frac{e}{p} \cos (\theta - \theta_0) + \frac{1}{p}, \quad (10.55)$$

unde : e și θ_0 sînt constante de integrare. Din această relație se poate obține :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos (\theta - \theta_0)}, \quad (10.56)$$

adică, ecuația unei conice care are focarul în centrul de atracție O . În această relație p este parametrul conicii, iar e este excentricitatea.

Natura conicii descrise de punctul material sub acțiunea unei forțe centrale de atracție universală se stabilește în funcție de excentricitatea e și anume : elipsă dacă $e < 1$; parabolă dacă $e = 1$; hiperbolă dacă $e > 1$. Se observă că viteza radială are expresia :

$$v_r = \dot{r} = \frac{p \cdot e \sin (\theta - \theta_0)}{[1 + e \cos (\theta - \theta_0)]^2} \dot{\theta} = \frac{C \cdot e \cdot p \sin (\theta - \theta_0)}{r^2 [1 + e \cos (\theta - \theta_0)]^2},$$

sau :

$$v_r = \frac{C \cdot e \sin (\theta - \theta_0)}{p}. \quad (10.57)$$

Deoarece în momentul inițial : $\theta = 0$, $r = r_0$, $v_r = v_0 \cos \alpha_0$, (fig. 10.11) rezultă :

$$r_0 = \frac{p}{1 + e \cos \theta_0}; \quad v_0 \cos \alpha_0 = -\frac{C \cdot e \sin \theta_0}{p},$$

și deci :

$$e \cos \theta_0 = \frac{p - r_0}{r_0}; \quad e \sin \theta_0 = -\frac{p \cdot v_0 \cos \alpha_0}{C} = -\frac{p \operatorname{ctg} \alpha_0}{r_0},$$

și se obține :

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{p \operatorname{ctg} \alpha_0}{r_0 - p} = \frac{C^2 \operatorname{ctg} \alpha_0}{k \cdot r_0 - C^2} = \frac{r_0 \cdot v_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{k - r_0 \cdot v_0^2 \sin^2 \alpha_0};$$

$$e^2 = \left(\frac{p - r_0}{r_0} \right)^2 + \frac{p^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha_0}{r_0^2} = 1 + \frac{p^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_0) - 2p \cdot r_0}{r_0^2},$$

dar :

$$p = \frac{C^2}{k} = \frac{r_0^2 \cdot v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{k} \quad (10.58)$$

și se obține expresia excentricității e :

$$e = \sqrt{1 + \frac{r_0^2 \cdot v_0^4 \sin^2 \alpha_0}{k^2} \left(v_0^2 - 2 \frac{k}{r_0} \right)}; \quad (10.59)$$

parametrii care pot influența excentricitatea sînt :

v_0 și α_0 adică viteza inițială și direcția. Se observă că pentru :

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{r_0}} \text{ și } \alpha_0 = \pm \frac{\pi}{2}; e = 0, \text{ traiectoria este un cerc ;}$$

$$v_0 < \sqrt{\frac{2k}{r_0}} \text{ și } e < 1, \text{ traiectoria este o elipsă ;}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2k}{r_0}}; e = 1, \text{ traiectoria este o parabolă ;}$$

$$v_0 > \sqrt{\frac{2k}{r_0}}; e > 1, \text{ traiectoria este o hiperbolă.}$$

Din aceste rezultate reiese clar că natura conicii depinde de valoarea vitezei (inițiale) și nu depinde de direcția ei.

În cazul unei rachete lansate de la suprafața pămîntului și ținînd seama de atracția newtoniană, se poate determina viteza inițială necesară pentru a deveni satelit sau pentru a părăsi definitiv pămîntul, avînd raza pămîntului $r_0 = 6\,370\,000$ m.

$$m \cdot g = \frac{k \cdot m}{r_0^2}; \quad \frac{k}{r_0^2} = 9,81 \frac{m}{s^2}$$

Pentru ca traiectoria satelitului să fie un cerc, este necesar ca :

$$\alpha_0 = \pm \frac{\pi}{2} \text{ și } v_0 = \sqrt{\frac{k}{r_0}} = \sqrt{g \cdot r_0} \approx 7\,900 \text{ m/s.}$$

Aceasta este prima viteză cosmică.

Pentru ca traiectoria proiectilului să fie parabolică, adică să poată ieși de sub sfera de influență a pămîntului, trebuie ca :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2k}{r_0}} = \sqrt{2g \cdot r_0} \approx 11\,000 \text{ m/s.}$$

Aceasta este a doua viteză cosmică.

10.3. MIȘCAREA RECTILINIE OSCILATORIE ARMONICĂ

10.3.1. MIȘCAREA RECTILINIE OSCILATORIE ARMONICĂ NEAMORTIZATĂ

Un punct material de masă m , așezat pe un plan perfect neted și legat de un arc cu constanta elastică k și masa neglijabilă, scos din poziția de echilibru prin întinderea sau comprimarea arcului constituie un model mecanic al unui corp ce efectuează o mișcare oscilatorie neamortizată. Forța ce acționează asupra punctului material este proporțională cu deplasarea față de poziția de echilibru. Un astfel de sistem elastic se numește oscilator armonic liniar (fig. 10.12). În baza ecuației fundamentale a dinamicii, se poate scrie :

$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x \quad \text{sau} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (10.60, a)$$

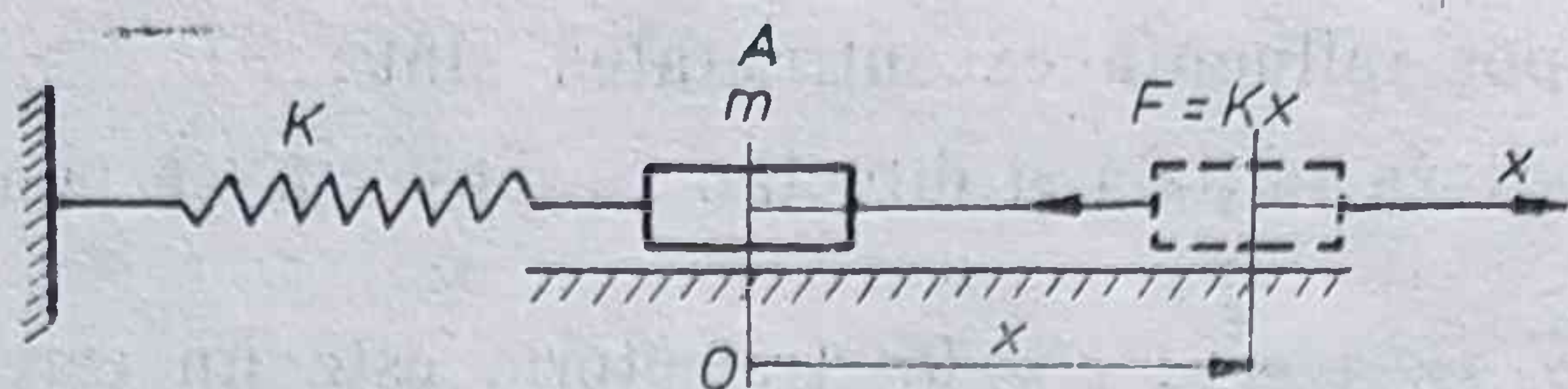


Fig. 10.12

Dacă se notează $\frac{k}{m} = \omega^2$, ecuația diferențială a mișcării devine :

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0. \quad (10.61, b)$$

Ecuația caracteristică este :

$$r^2 + \omega^2 = 0,$$

și are rădăcinile : $r_{1,2} = \pm i \cdot \omega$. Soluția generală este, în acest caz :

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \quad (10.62, a)$$

C_1 și C_2 fiind constante de integrare. Se mai poate scrie :

$$x = A \sin(\omega t + \varphi),$$

în care :

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \text{ și } \operatorname{tg} \varphi = \frac{C_2}{C_1}. \quad (10.62, b)$$

Determinarea constantelor de integrare se realizează folosind condițiile particulare, de exemplu, la momentul inițial :

$$t = 0 \begin{cases} x = x_0; \\ \dot{x} = v_0. \end{cases}$$

Folosind ecuațiile spațiului și vitezei :

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t; \quad \dot{x} = C_1 \cdot \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t,$$

se obțin valorile constantelor :

$$C_1 = \frac{v_0}{\omega}; \quad C_2 = x_0; \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}; \quad \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x_0 \omega}{v_0}.$$

Ecuația de mișcare este : $x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t$ sau :

$$x = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2} \sin \left(\omega t + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x_0 \omega}{v_0} \right). \quad (10.63)$$

Elementele ce caracterizează mișcarea sînt :

— pulsația :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

— perioada mișcării :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}; \quad (10.64)$$

— frecvența mișcării :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

Deoarece sistemul este format din punctul material de masă m și arcul ce formează elementul elastic ce are constanta elastică k și are o pulsație

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} , \text{ aceasta poartă numele de}$$

pulsație proprie a sistemului. Ecuațiile de mișcare pentru spațiu, viteză și accelerație pot fi reprezentate grafic într-o diagramă, așa cum se redă în figura 10.13.

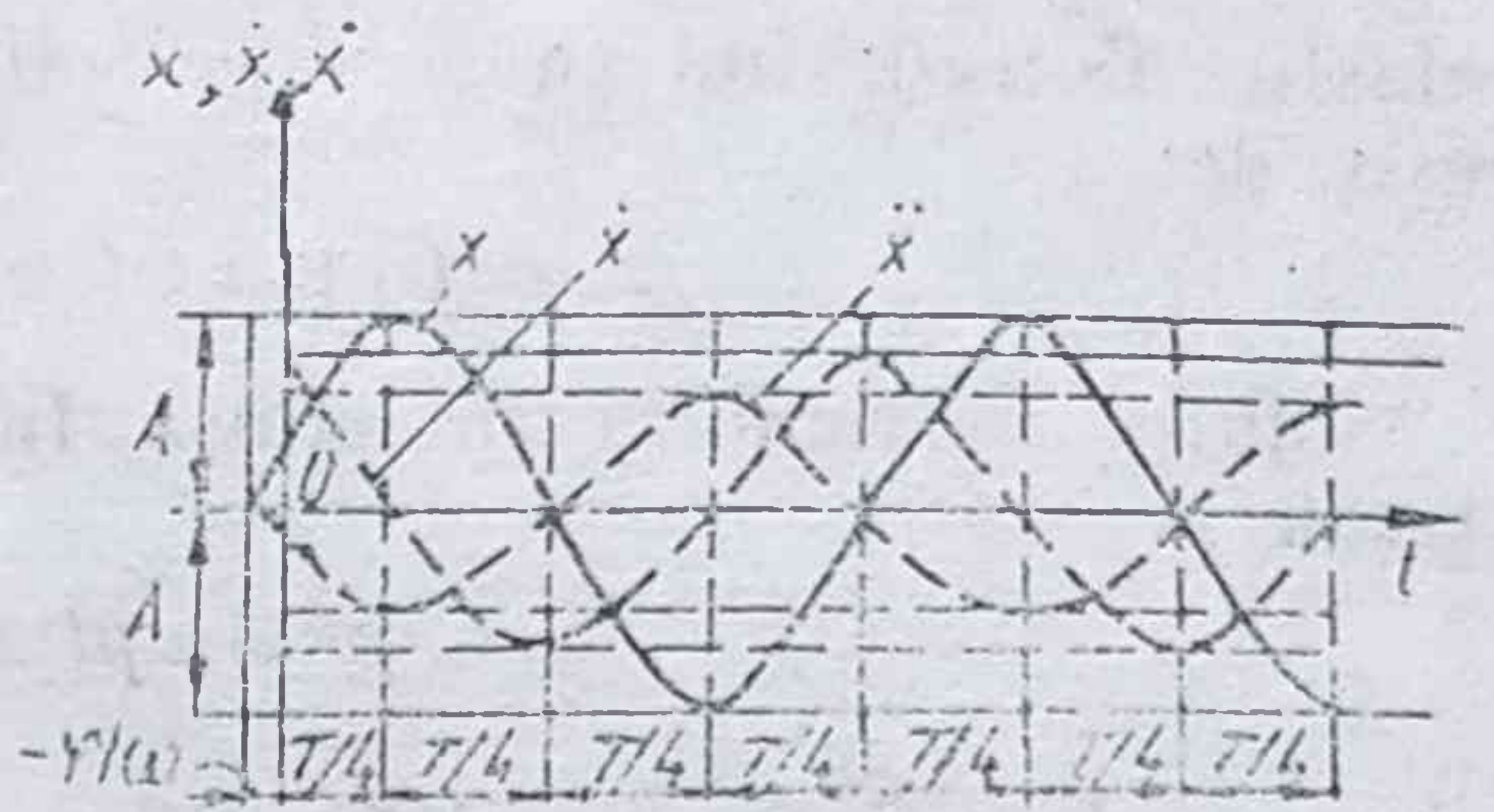


Fig. 10.13

10.3.2. MIȘCAREA RECTILINIE OSCILATORIE ARMONICĂ CU FORȚĂ PERTURBATOARE

În cazul în care un sistem elastic armonic (fig. 10.14) este acționat de o forță ce variază în timp, ecuația de mișcare are expresia :

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = F(t) ; \quad (10.65, a)$$

în cazul în care $F(t) = F_0 \sin pt$ se obține :

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = F_0 \sin pt, \quad (10.65, b)$$

sau :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{p} \sin pt.$$

Dacă se notează : $\frac{k}{m} = \omega^2$ și $\frac{F_0}{m} = q$, ecuația devine : $\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = q \sin p \cdot t$.

Soluția generală a ecuației diferențiale se compune dintr-o soluție generală a ecuației omogene ce corespunde cazului când $F(t) = 0$ și o soluție particulară ce corespunde cazului $F(t) = F_0 \sin p \cdot t$ și va fi de forma :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t). \quad (10.66, a)$$

Se observă că :

$$x_1(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t ; \quad (10.66, b)$$

$$x_2(t) = C \sin pt,$$

și soluția particulară $x_2(t)$ trebuie să satisfacă ecuația diferențială. Se poate reține că soluția generală reprezintă mișcarea oscilatorie proprie a sistemului

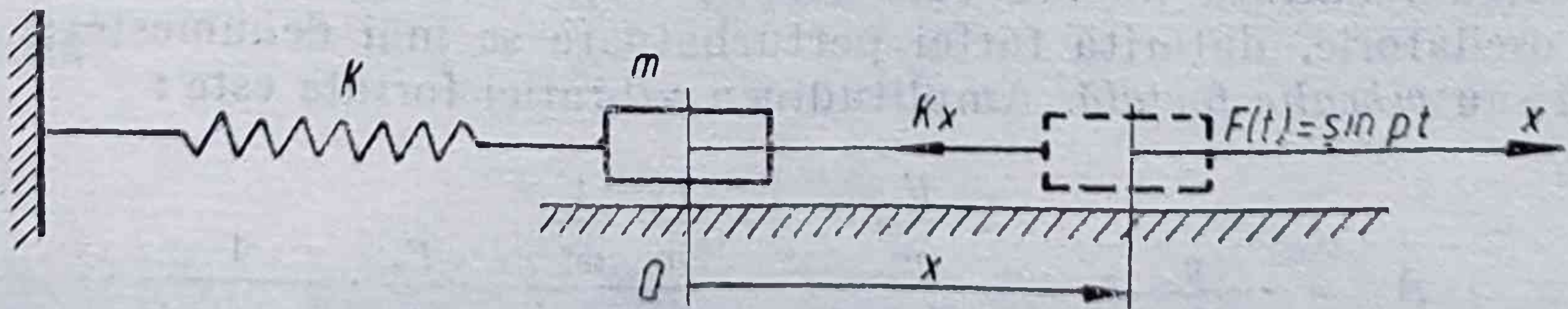


Fig. 10.14

elastic. Considerînd că $\omega \neq p$, soluția ecuației diferențiale în cazul studiat este deci :

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + C \sin pt. \quad (10.66, c)$$

Soluția particulară introdusă în ecuația diferențială ne conduce la relațiile :

$$-C \cdot p^2 \sin pt + \omega^2 \cdot C \sin pt = q \sin pt,$$

și prin identificare rezultă : $C = \frac{q}{\omega^2 - p^2}$.

Ecuația legii de mișcare devine în acest caz :

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{q}{\omega^2 - p^2} \sin pt$$

$$\text{sau : } x = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{q}{\omega^2 - p^2} \sin pt. \quad (10.66, d)$$

Constantele de integrare C_1 și C_2 (respectiv A și φ) se determină cunoscînd anumite condiții particulare, de exemplu, cazul în care în momentul inițial sistemul pornește din repaus, adică : la $t = 0$, $x = 0$; $\dot{x} = 0$.

Ecuațiile de mișcare (spațiu și viteză) sînt :

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{q}{\omega^2 - p^2} \sin pt ;$$

$$\dot{x} = C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \cdot \omega \sin \omega t + \frac{q \cdot p}{\omega^2 - p^2} \cos pt.$$

Folosind condițiile inițiale arătate, se obține :

$$0 = C_2 \text{ și } 0 = C_1 \cdot \omega + \frac{q \cdot p}{\omega^2 - p^2}, \text{ sau } C_1 = \frac{-p}{\omega} \frac{q}{\omega^2 - p^2}.$$

Rezultă ecuația de mișcare :

$$x = \frac{q}{\omega^2 - p^2} (\sin p \cdot t - \frac{p}{\omega} \sin \omega t). \quad (10.66, e)$$

Această ecuație de mișcare este în fond rezultatul suprapunerii a două mișcări oscilatorii, și anume : prima o mișcare oscilatorie datorită forței perturbatoare și a doua o mișcare oscilatorie armonică proprie sistemului elastic :

$$x_1 = \frac{q}{\omega^2 - p^2} \sin pt = A_1 \sin pt ; \quad (10.67)$$

$$x_2 = -\frac{p}{\omega} \frac{q}{\omega^2 - p^2} \sin \omega t = A_2 \sin \omega t.$$

Mișcarea rezultată nu are caracter de mișcare oscilatorie armonică. Mișcarea oscilatorie, datorită forței perturbatoare se mai denumește și *mișcare forțată* sau *vibrație forțată*. Amplitudinea vibrației forțate este :

$$A_1 = \frac{q}{\omega^2 - p^2} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega^2 - p^2} = \frac{\frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega^2}}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}} = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2}.$$

Se observă că: $\frac{F_0}{k} = x_{st}$ este deformația sistemului elastic sub acțiunea valorii maxime a forței perturbatoare. Rezultă că amplitudinea A_1 se mai poate scrie:

$$A_1 = x_{st} \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} = x_{st} \cdot A_0, \quad (10.68)$$

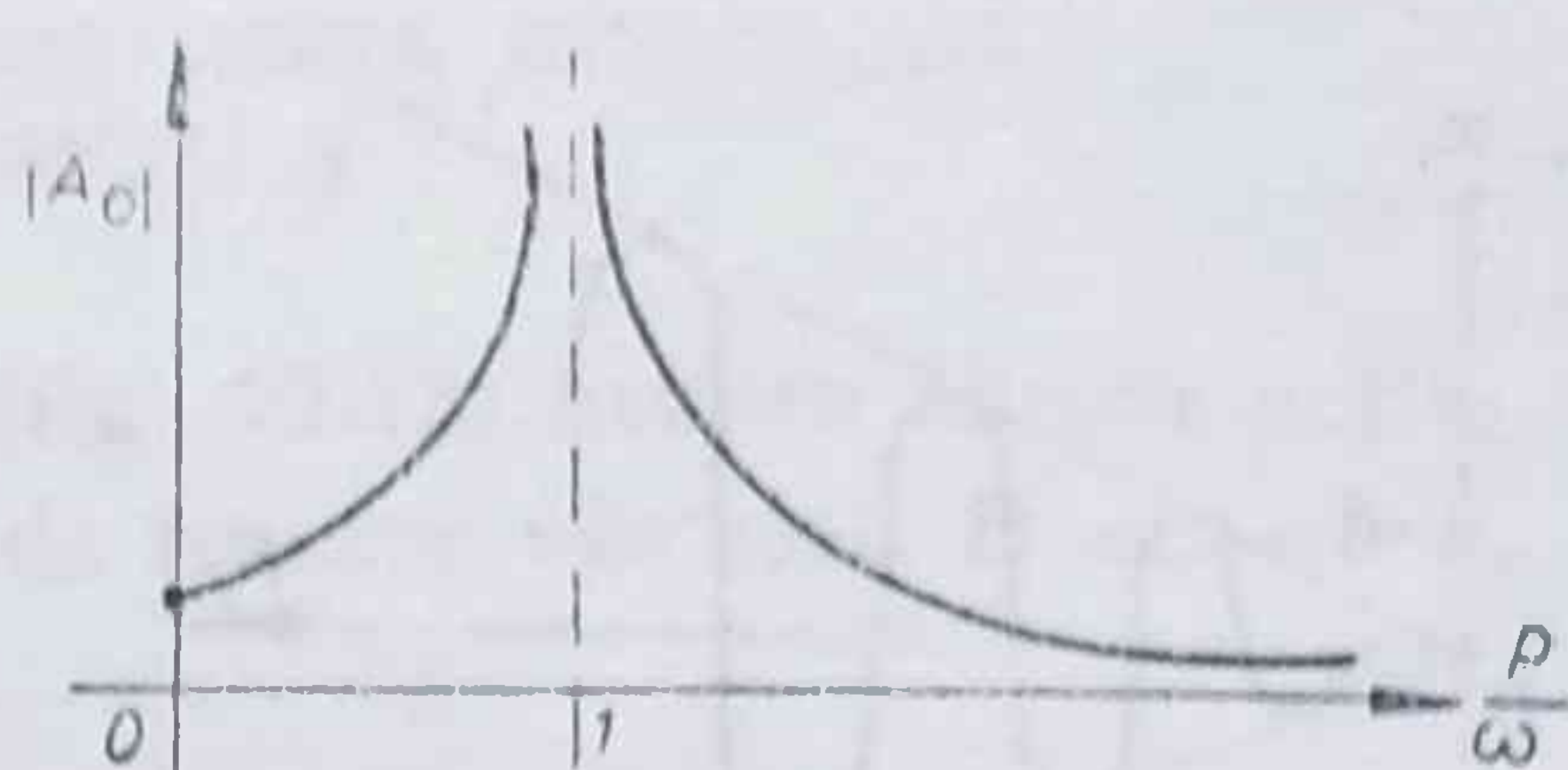


Fig. 10.15

unde s-a notat: $A_0 = \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2}$; factorul A_0 , poartă numele de factor de amplificare, mărimea lui fiind o funcție de raportul $\frac{p}{\omega}$.

În figura 10.15 se redă variația factorului A_0 în funcție de raportul $\frac{p}{\omega}$.

Se observă că pentru $\frac{p}{\omega} = 0$, adică $p = 0$; $A_0 = 1$, și rezultă că sistemul oscilează în aceeași fază, cu vibrație oscilatorie proprie; aceasta înseamnă că sistemul se mișcă în aceeași fază cu forța perturbatoare.

Dacă raportul $\frac{p}{\omega}$ este foarte mare, influența forței perturbatoare este mică sau chiar practic nulă. Dacă raportul $\frac{p}{\omega} = 1$, amplitudinea mișcării rezultante crește nelimitat. În acest caz apare fenomenul de rezonanță.

Fenomenul de rezonanță. Luând în considerare ecuația de mișcare rezultată (10.66, e) în cazul $\omega = p$ se observă că se ajunge la o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$. Pentru a înlătura nedeterminarea, expresia se mai poate scrie:

$$x = q \frac{\sin pt - \frac{p}{\omega} \sin \omega t}{\omega^2 - p^2}. \quad (10.69)$$

Considerînd mărimea p variabilă apropiată de mărimea ω , rezultă că $\frac{p}{\omega} \approx 1$.

$$\begin{aligned} x &= q \lim_{p \rightarrow \omega} \frac{+ 2 \sin \left(\frac{p - \omega}{2} \right) t \cdot \cos \left(\frac{\omega + p}{2} \right) t}{(\omega - p)(\omega + p)} = q \lim_{p \rightarrow \omega} \frac{- t \sin \left(\frac{\omega - p}{2} \right) t \cdot \cos \left(\frac{\omega + p}{2} \right) t}{\frac{(\omega - p)t}{2} (\omega + p)} = \\ &= \left(- \frac{q \cdot t}{2 \cdot \omega} \right) \cos \omega t. \end{aligned}$$

Rezultă:

$$x = - \frac{q \cdot t}{2 \omega} \cos \omega t. \quad (10.70)$$

Această relație arată că mișcarea oscilatorie rezultantă are amplitudinea variabilă în timp. Aceasta înseamnă că se poate spune că mișcarea este mo-

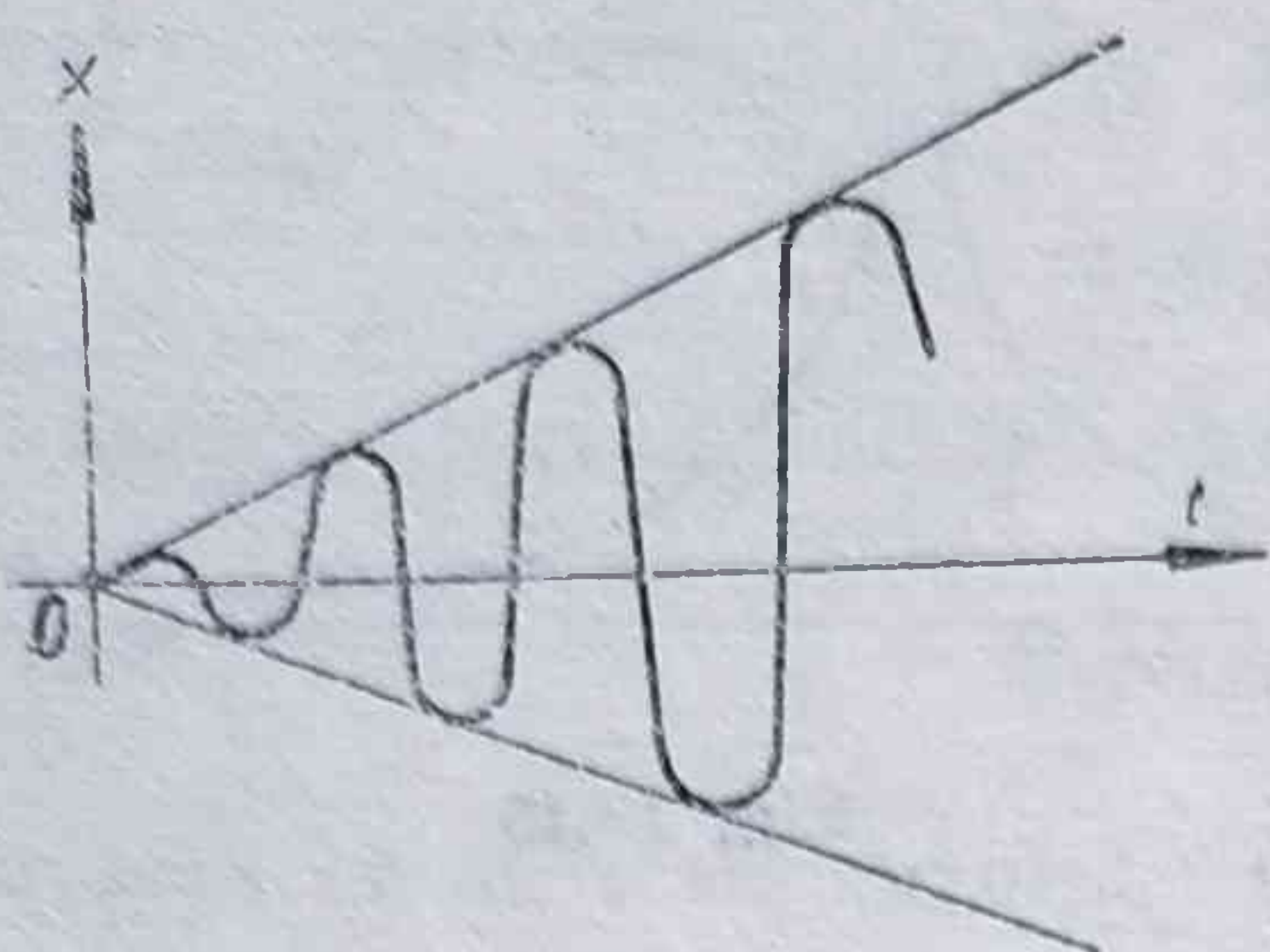


Fig. 10.16

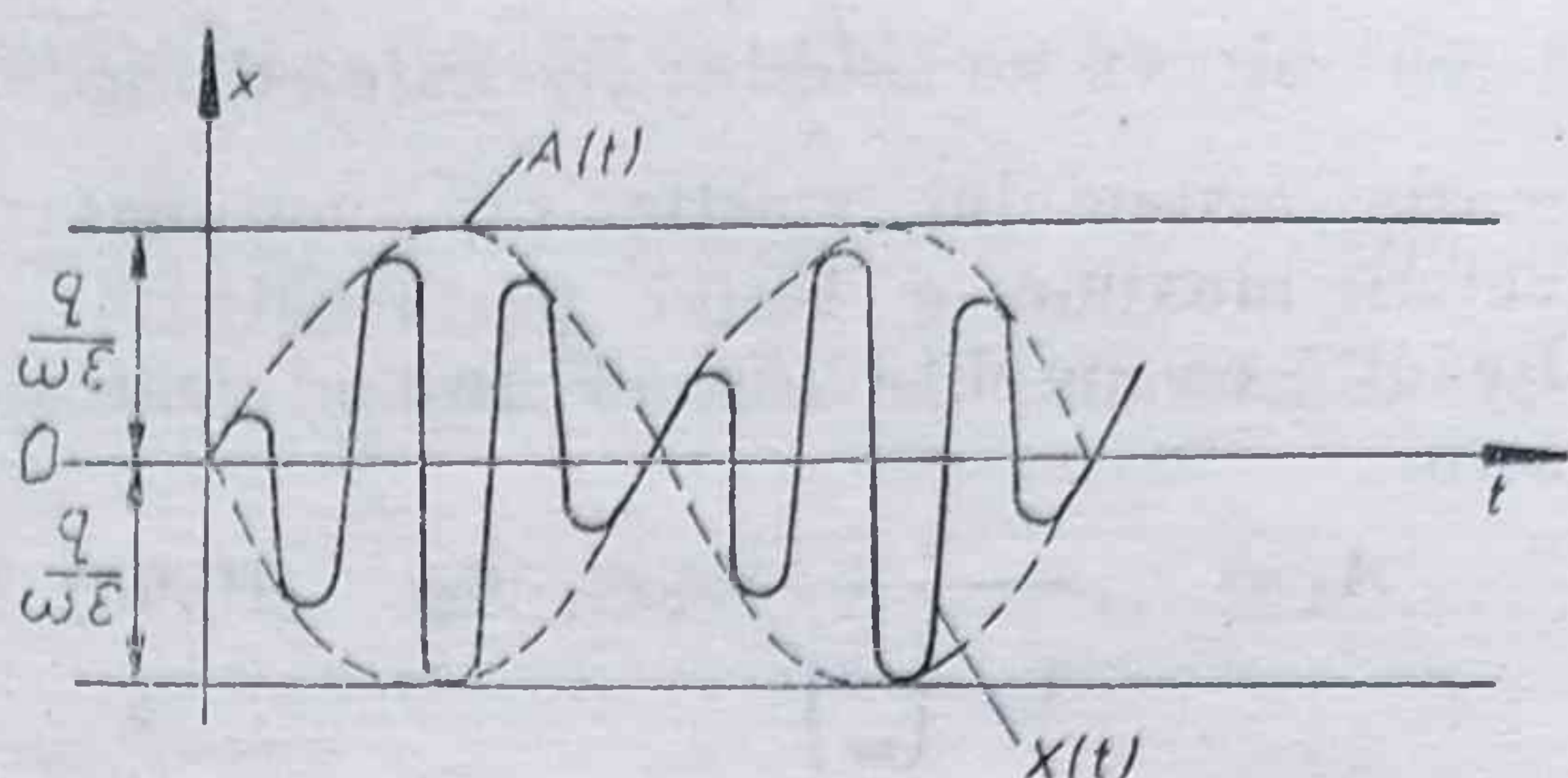


Fig. 10.17

dulată în amplitudine. Reprezentînd (fig. 10.16) grafic ecuația mișcării, se observă că graficul mișcării are drept înfășurătoare două drepte ce trec prin origine.

Se poate reține, ca foarte importantă, ideea că mărimea amplitudinei nu crește brusc în cazul rezonanței și că este necesar un anumit timp pentru a ajunge la o anumită mărime a amplitudinei.

Se înțelege că dacă amplitudinea oscilației unui sistem elastic devine prea mare, depășind o anumită limită se produce distrugerea sistemului elastic. Din acest motiv, pentru sistemele elastice de natură mecanică fenomenul de rezonanță este nedorit și este necesar să fie evitat. Pentru a evita rezonanța este necesar să se procedeze astfel ca sistemul să funcționeze cît mai puțin.

Fenomenul de bătaie. Fenomenul de rezonanță se produce dacă avem egalitatea $\omega = p$. În cazul în care între pulsația proprie și pulsația perturbatoare diferența este mică și avem o relație de forma: $\omega - p = \varepsilon$, unde ε este suficient de mic, ecuația mișcării rezultante $x = \frac{q}{\omega^2 - p^2} \left[\sin pt - \frac{p}{\omega} \sin \omega t \right]$

se poate scrie sub altă formă dacă se fac următoarele aproximații: $\frac{p}{\omega} \approx 1$ și $p + \omega = 2\omega$.

Rezultă :

$$x = \frac{q}{\omega^2 - p^2} (\sin pt - \sin \omega t) = \frac{q}{(\omega - p)(\omega + p)} 2 \sin \frac{(p - \omega)t}{2} \cos \frac{(p + \omega)t}{2} =$$

$$= \frac{2q}{2\omega \cdot \varepsilon} \sin \left(\frac{-\varepsilon \cdot t}{2} \right) \cos \frac{2\omega \cdot t}{2} = \frac{-q}{\omega \cdot \varepsilon} \sin \left(\frac{\varepsilon}{2} t \right) \cos \omega t ;$$

$$x = \frac{-q}{\omega \cdot \varepsilon} \sin \frac{\varepsilon}{2} t \cdot \cos \omega t. \quad (10.71, a)$$

Se observă că amplitudinea mișcării rezultante este :

$$A(t) = \frac{-q}{\omega \cdot \varepsilon} \sin \left(\frac{\varepsilon t}{2} \right); \quad (10.71, b)$$

această funcție reprezintă înfășurătoarea curbei ce exprimă legea de mișcare așa cum se arată în figura 10.17.

10.3.3. MIȘCAREA RECTILINIE OSCILATORIE LIBERĂ AMORTIZATĂ (FĂRĂ FORȚĂ PERTURBATOARE)

În cazul unui punct material de masă m (fig. 10.18) asupra căruia acționează o forță elastică $F = -k \cdot x$ și o forță de frecare vîscoasă $R = -b \cdot \dot{x}$, ecuația de mișcare este de forma :

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0. \quad (10.72)$$

Soluția generală este :

$$x = C_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + C_2 \cdot e^{\alpha_2 t}, \quad (10.73)$$

α_1 și α_2 fiind rădăcinile ecuației caracteristice : $m \cdot r^2 + b \cdot r + k = 0$, iar C_1 și C_2 fiind constante de integrare. Rădăcinile α_1 și α_2 sînt :

$$\alpha_1 = \frac{-b}{2m} + \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}; \quad \alpha_2 = \frac{-b}{2m} - \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}.$$

În cazul forțelor de frecare mici există relația : $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$ și rezultă că α_1 și α_2 sînt numere complexe ce se pot scrie sub forma : $\alpha_1 = -\frac{b}{2m} + i \cdot \omega_1$ și $\alpha_2 = -\frac{b}{2m} - i \cdot \omega_1$, unde :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}.$$

Soluția generală se poate exprima prin relația :

$$x = e^{-\frac{b \cdot t}{2m}} [C_1 \cdot e^{i \cdot \omega_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-i \cdot \omega_1 \cdot t}] \quad (10.74, a)$$

Deoarece :

$$e^{\pm i \cdot \omega_1 \cdot t} = \cos \omega_1 t \pm i \sin \omega_1 t,$$

expresia soluției generale se poate aduce sub forma :

$$x = e^{-\frac{b \cdot t}{2m}} [(C_1 + C_2) \cos \omega_1 t + i(C_1 - C_2) \sin \omega_1 t], \quad (10.74, b)$$

și folosind notația : $C_1 + C_2 = a_1$ și $i(C_1 - C_2) = a_2$ se poate pune sub forma :

$$x = e^{-\frac{b \cdot t}{2m}} [a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \sin \omega_1 t], \quad (10.74, c)$$

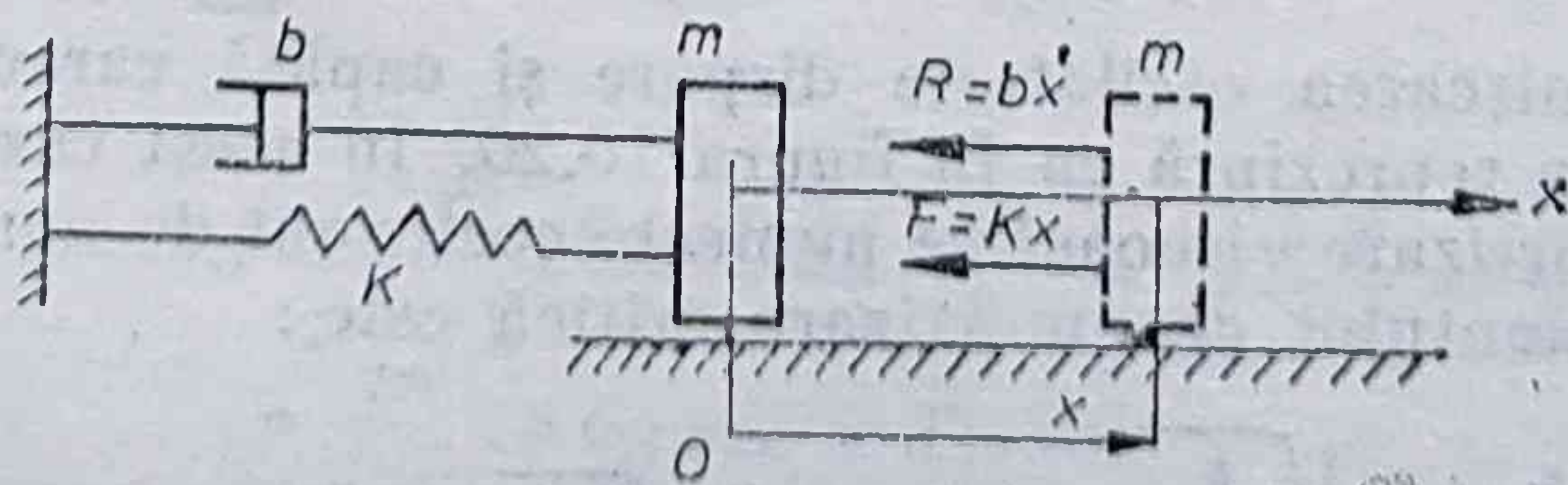


Fig. 10.18

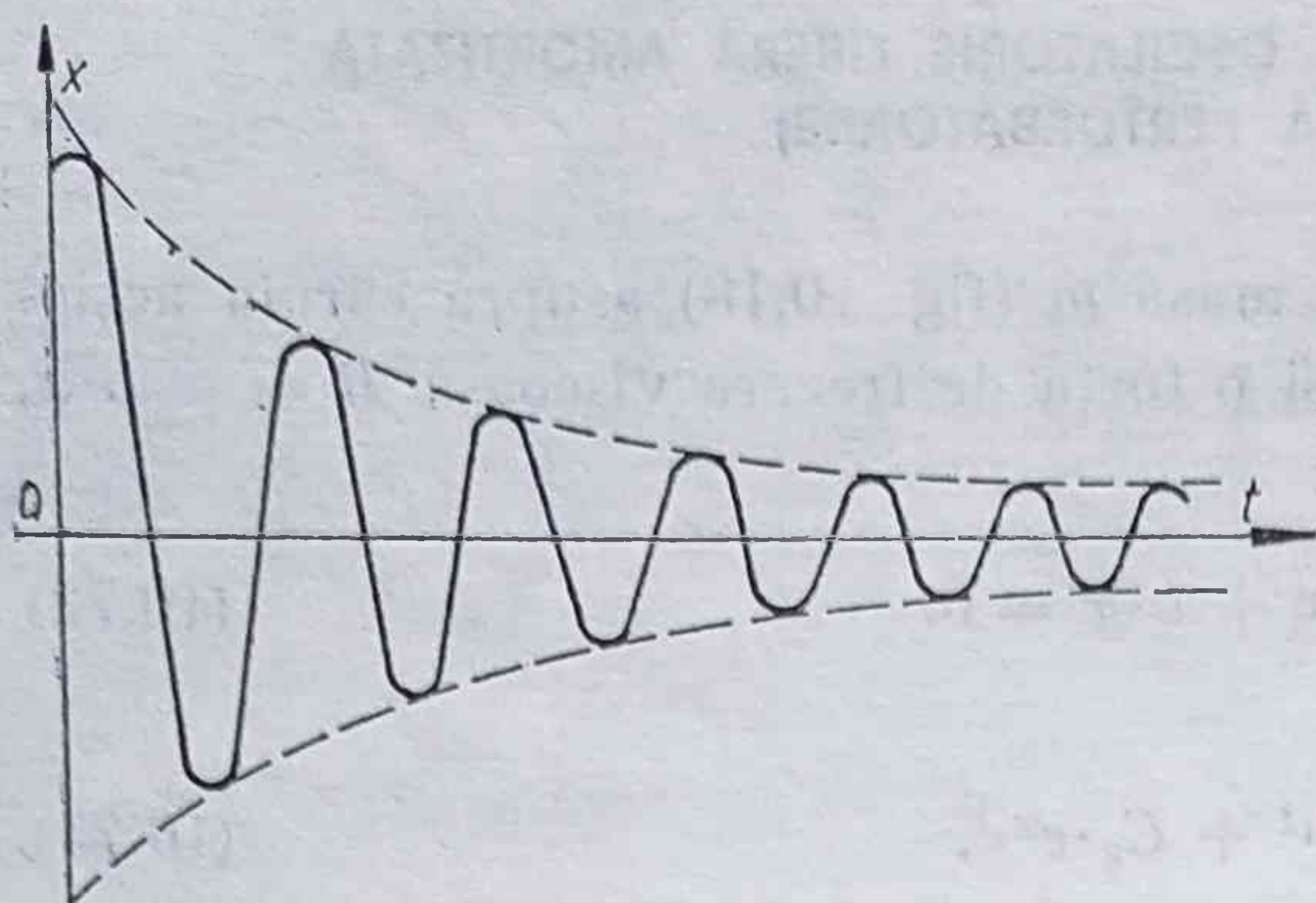


Fig. 10.19

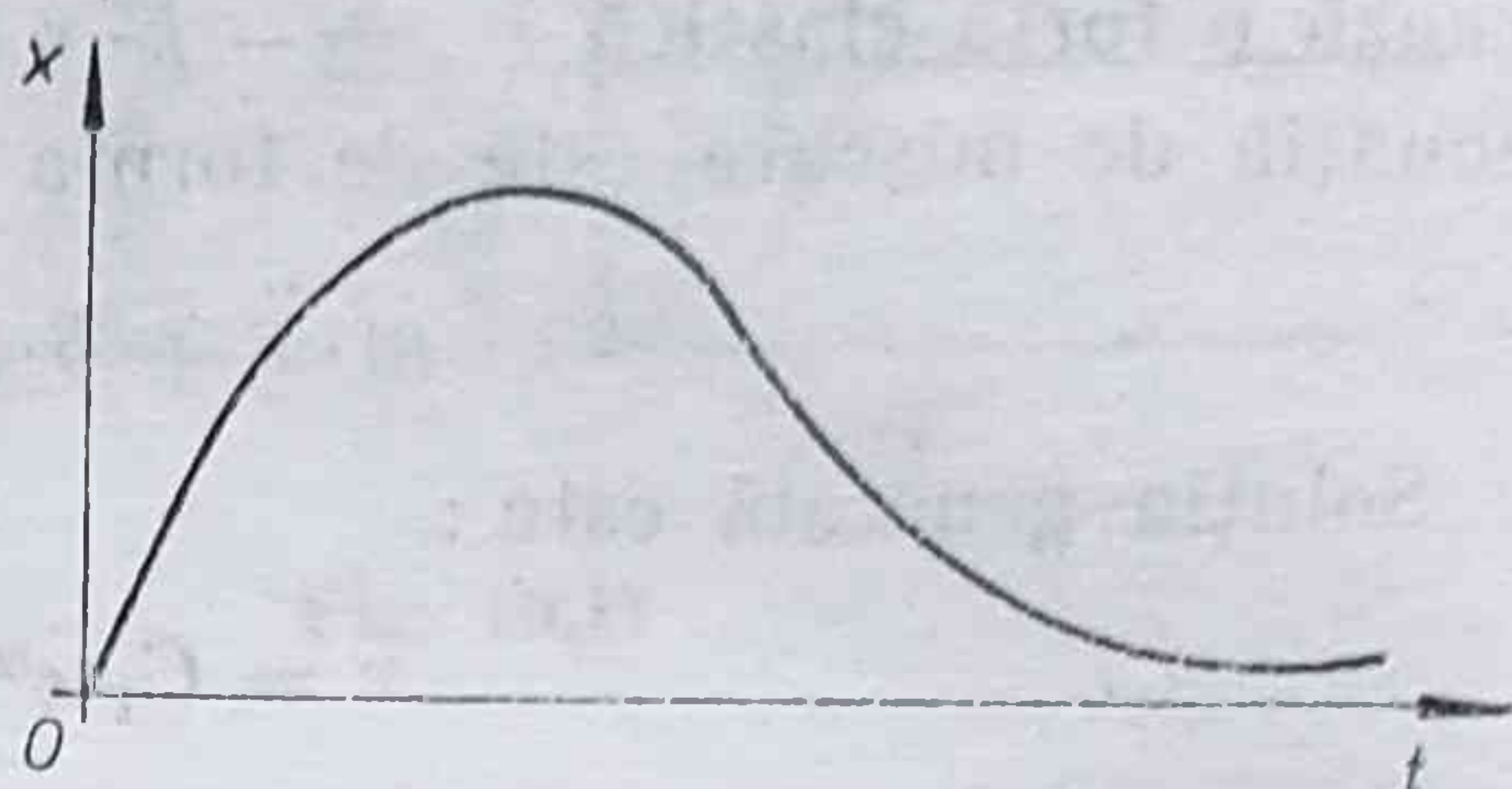


Fig. 10.20

a_1 și a_2 fiind două constante reale ce se pot determina din condiții particulare ; de exemplu, cunoscând că : la $t = 0$; $x = x_0$ și $v = v_0$, se obține : $a_1 = x_0$ și $a_2 = \frac{v_0}{\omega_1} + \frac{b \cdot x_0}{2m \cdot \omega_1}$ și rezultă ecuația mișcării :

$$x = e^{\frac{-b \cdot t}{2m}} \left[x_0 \cos \omega_1 t + \left(\frac{v_0}{\omega_1} + \frac{b \cdot x_0}{2m \cdot \omega_1} \right) \sin \omega_1 t \right]. \quad (10.74, d)$$

Această expresie se poate aduce sub forma : $x = e^{\frac{-b \cdot t}{2m}} A \cos(\omega_1 \cdot t - \alpha)$.

Forța de frecare influențează asupra mișcării oscilatorii și îi alterează frecvența naturală (proprie), în același timp amplitudinea oscilației scade continuu exponențial pînă în momentul încetării mișcării. Ținînd seama că dacă nu ar exista forța de frecare vîscoasă, punctul ar avea o mișcare oscilatorie cu pulsația : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; pulsația mișcării obținute se poate scrie sub forma :

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{b^2}{4k \cdot m}}. \quad (10.75)$$

În acest caz, ecuația de mișcare se reprezintă ca în figura 10.19.

În cazul în care forța de frecare este suficient de mare, astfel că există relația : $\left(\frac{b}{2m} \right)^2 = \frac{k}{m}$, rădăcinile α_1 și α_2 sînt egale : $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{b}{2m}$.

În acest caz ecuația de mișcare este :

$$x = (C_1 + C_2 \cdot t) e^{\frac{-b \cdot t}{2m}}. \quad (10.76)$$

Constantele C_1 și C_2 determinate pentru aceleași condiții inițiale : $t = 0$; $x = x_0$; $v = v_0$, au valorile : $C_1 = x_0$ și $C_2 = v_0 + \frac{b \cdot x_0}{2m}$.

În acest caz mișcarea oscilatorie dispăre și capătă caracter de mișcare aperiodică, care se reprezintă ca în figura 10.20. În acest caz valoarea coeficientului b de amortizare vîscoasă se numește coeficient de amortizare critică.

Valoarea coeficientului de amortizare critică este :

$$\frac{b_{cr}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ sau } b_{cr} = 2 \sqrt{k \cdot m} = 2 \cdot m \cdot \omega_0.$$

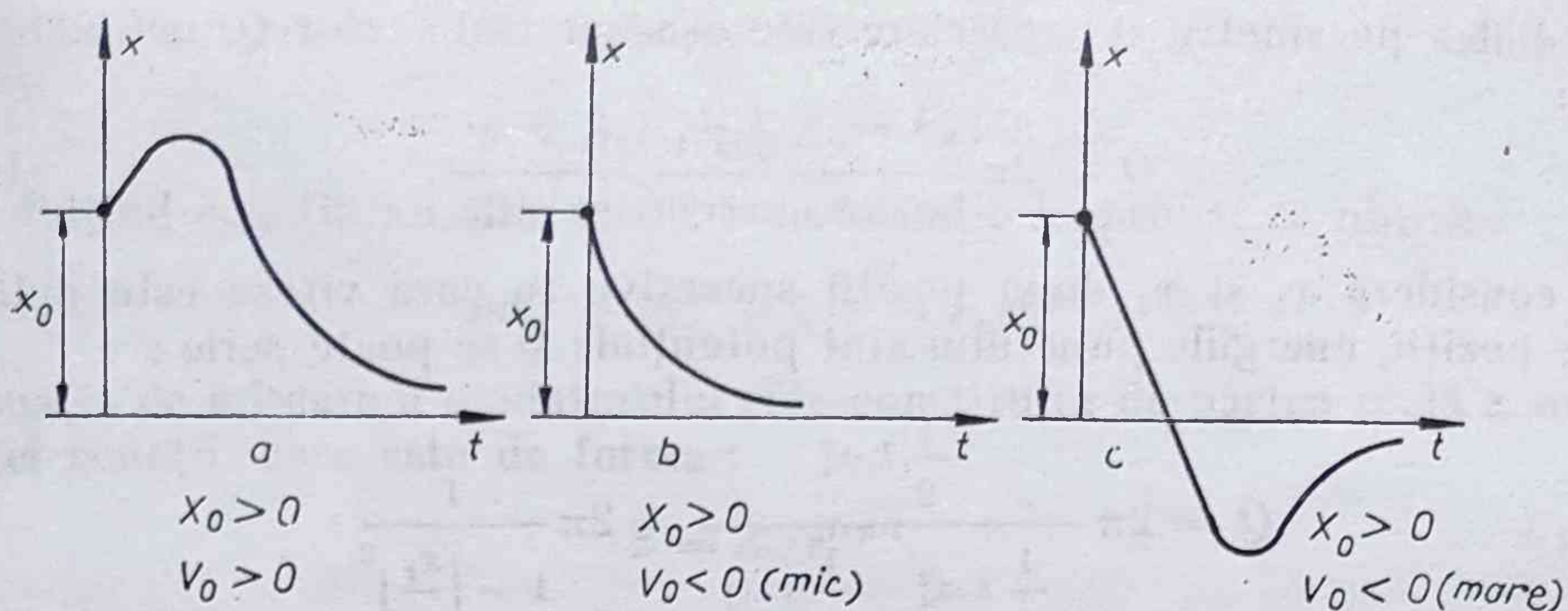


Fig. 10.21

În cazul forțelor de frecare vîscoasă foarte mari pentru care corespunde relația: $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$ sau $b_{cr} > 2m \cdot \omega_0$, rădăcinile α_1 și α_2 sînt reale și negative:

$$\alpha_1 = -\lambda_1; \quad \alpha_2 = -\lambda_2.$$

Ecuția de mișcare este în acest caz:

$$x = C_1 \cdot e^{-\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{-\lambda_2 t}. \quad (10.77)$$

Mișcarea este, în acest caz, aperiodică, adică nu apar fenomene oscilatorii și tinde asimptotic către poziția de repaus. Constantele C_1 și C_2 se determină în funcție de condițiile inițiale care imprimă caracteristica mișcării. În figura 10.21 sînt prezentate diagramele specifice acestei mișcări în funcție de condițiile inițiale.

O expresie a cotei de schimb a energiei oscilatorului se poate obține înmulțind ecuația mișcării cu \dot{x} :

$$m \cdot \ddot{x} \cdot \dot{x} + k \cdot x \cdot \dot{x} = -b \cdot \dot{x}^2, \quad (10.78, a)$$

care se mai scrie și sub forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 \right) = -b \cdot \dot{x}^2. \quad (10.78, b)$$

Acastă relație arată că energia punctului material este suma dintre energia cinetică și energia potențială, iar derivata ei în raport cu timpul indică cota de energie care este disipată în căldură datorită frecării.

În cazul mișcării oscilatorii amortizate (cazul frecărilor mici) se folosesc doi parametri care permit aprecierea gradului de amortizare a sistemului. Un prim parametru denumit *decrementul logaritm al mișcării*, este definit de expresia:

$$\delta = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)};$$

sau:

$$\delta = \ln \frac{e^{\frac{-bt}{2m}} \cdot A \cos(\omega_1 \cdot t - \alpha)}{e^{\frac{-b(t+T)}{2m}} \cdot A \cos[\omega_1(t+T) - \alpha]} = \frac{b \cdot T}{2m} = \frac{\pi \cdot b}{m \cdot \omega_1};$$

$$\delta = \frac{\pi b}{m \cdot \omega_1}. \quad (10.79)$$

Al doilea parametru de apreciere este așa-numitul factor Q , definit de relația :

$$Q = 2\pi \frac{\text{energia totală}}{\text{scăderea energiei pe ciclu}}. \quad (10.80)$$

Se consideră x_1 și x_2 două poziții succesive în care viteza este nulă. În aceste poziții, energiile punctului sînt potențiale și se poate scrie :

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} k \cdot x_1^2}{\frac{1}{2} k \cdot x_1^2 - \frac{1}{2} k \cdot x_2^2} = 2\pi \frac{1}{1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2}.$$

Observînd că : $\frac{x_2}{x_1} = e^{-\delta}$, factorul Q se poate exprima în funcție de decrementul logaritmic :

$$Q = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\delta}}. \quad (10.81, a)$$

Dacă amortizarea este mică, valoarea lui δ este mică și expresia lui Q se poate scrie :

$$Q = 2\pi \frac{1}{1 - (1 - 2\delta)} = \frac{\pi}{\delta}, \quad (10.81, b)$$

astfel că factorul Q este mare atunci cînd decrementul logaritmic este mic.

10.3.4. MIȘCAREA RECTILINIE OSCILATORIE AMORTIZATĂ SUB ACȚIUNEA UNEI FORȚE PERTURBATOARE SINUSOIDALE (fig. 10.22)

Pentru acest studiu se va folosi calculul cu numere complexe, fiind mai operativ. Expresia unui număr complex este de forma : $z = x + i \cdot y$, iar în coordonate polare poate fi pus sub forma : $z = r \cos \theta + i \cdot r \sin \theta = r \cdot e^{i\theta}$, unde : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ și $\theta = \arctg \frac{y}{x}$; conjugatul numărului complex z este z^* și este $z^* = x - i \cdot y = r \cdot e^{-i\theta}$, astfel că mărimea : $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = \sqrt{z \cdot z^*}$.

Ecuția de mișcare a punctului material considerat este :

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = F_0 \cos pt. \quad (10.82)$$

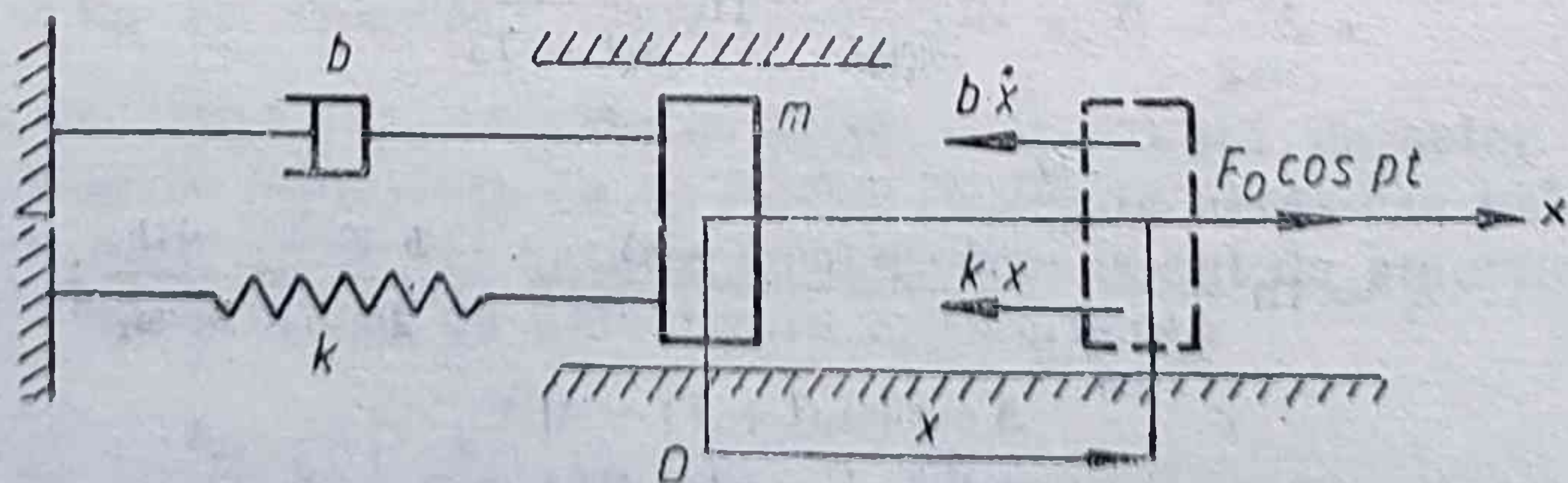


Fig. 10.22

Pentru soluționare se folosește ecuația auxiliară :

$$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k \cdot y = F_0 \sin pt.$$

Înmulțind ecuația auxiliară cu i și adunând-o la prima, se obține :

$$m \cdot \ddot{z} + b \cdot \dot{z} + k \cdot z = F_0 e^{i \cdot p \cdot t}.$$

Ecuația de mișcare a oscilatorului este constituită de partea reală a soluției acestei ecuații, care este de forma :

$$z = Z_0 \cdot e^{i \cdot p \cdot t}. \quad (10.83)$$

Introducând această expresie în ecuația generală de mai sus se obține :

$$Z_0 = \frac{F_0}{k - m \cdot p^2 + i \cdot p \cdot b} = \frac{F_0}{m(\omega^2 - p^2) + i \cdot p \cdot b}, \quad (10.84, a)$$

unde : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ este pulsația proprie a oscilatorului liber neamortizat. Se observă că se poate scrie :

$$Z_0 = B \cdot e^{-i\beta}, \quad (10.84, b)$$

unde :

$$B = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega^2 - p^2)^2 + p^2 \cdot b^2}} \text{ și } \operatorname{tg} \beta = \frac{p \cdot b}{m(\omega^2 - p^2)}. \quad (10.84, c)$$

Soluția generală a ecuației de mișcare scrisă sub forma complexă este :

$$z = B \cdot e^{i(p \cdot t - \beta)} + z_1, \quad (10.85, a)$$

unde z_1 este soluția generală a ecuației omogene.

Partea reală a acestei expresii reprezintă ecuația de mișcare în cazul considerat, și are forma : $x = B \cos(p \cdot t - \beta) + x_1$.

Dacă amortizarea este suficient de mică pentru ca mișcarea să aibă caracter oscilatoriu, expresia lui x_1 este identică cu cea găsită în cazul mișcării amortizate libere :

$$x_1 = e^{\frac{-b}{2m} t} (a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \sin \omega_1 t).$$

Această mișcare după un timp suficient de mare încetează. Din acest motiv, ea poartă numele de *tranzitorie*. Ecuația de mișcare a sistemului este deci :

$$x = B \cos(p \cdot t - \beta) + e^{\frac{-b}{2m} t} (a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \sin \omega_1 t). \quad (10.85, b)$$

Se observă că mișcarea rezultă din suprapunerea a două mișcări și poate fi împărțită în două etape, și anume : liberă (fără forțe perturbatoare) și mișcarea punctului sub acțiunea forței perturbatoare.

Cele două mișcări sînt : mișcarea de oscilație amortizată și o etapă tranzitorie în care se produc atât mișcarea de vibrație proprie, cît și cea întreținută. Această etapă se numește regim tranzitoriu.

A doua etapă, în care vibrația proprie poate fi considerată neglijabilă, se ia în considerație numai oscilația întreținută. Această etapă este denumită regim permanent sau staționar.

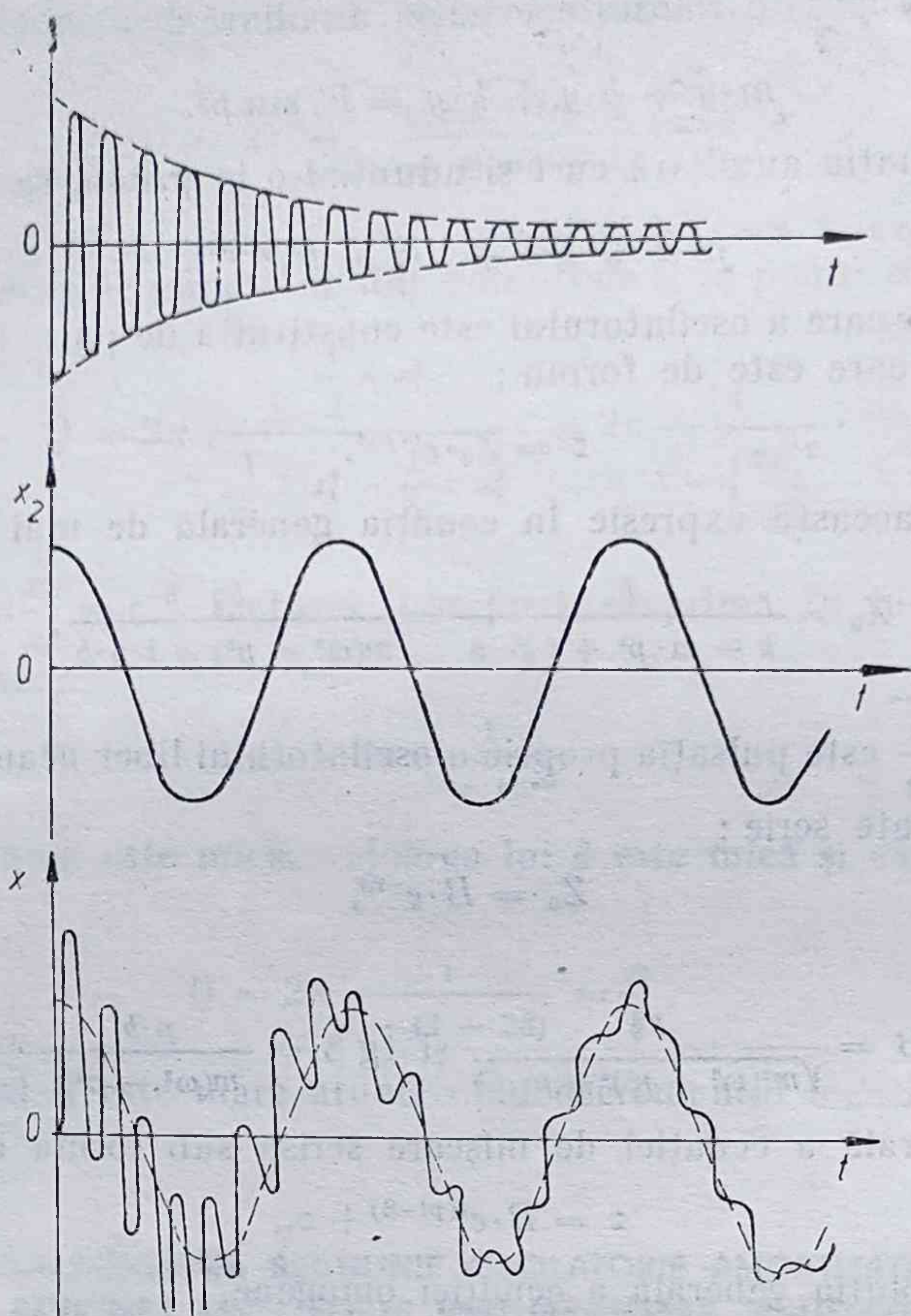


Fig. 10.23

Pentru determinarea constantelor de integrare a_1 și a_2 se folosesc condițiile inițiale. Dacă la $t = 0$; $x = x_0$ și $v = v_0$, se obține :

$$a_1 = x_0 - B \cos \beta \quad \text{și} \quad a_2 = \left(\frac{v_0}{\omega_1} - \frac{Bp}{\omega_1} \right) \sin \beta + \frac{b}{2m\omega_1} (x_0 - B \cos \beta) \quad (10.86)$$

În figura 10.23 sînt reprezentate grafic : *mișcarea amortizată liberă proprie sistemului*, *mișcarea întreținută*, *mișcarea rezultantă*.

Dacă se consideră cazul particular în care $\beta = 90^\circ$; $x_0 = 0$ și $v_0 = 0$, observînd că : $a_1 = 0$ și $a_2 = -B$, ecuația de mișcare devine :

$$x = B \left(1 - e^{-\frac{bt}{2m}} \right) \sin pt. \quad (10.87)$$

În cazul frecării mici $\frac{b \cdot t}{2m}$ este mic și expresia devine :

$$x = B \left[1 - \left(1 - \frac{bt}{2m} \right) \right] \sin pt = \frac{F_0}{2pm} t \sin pt. \quad (10.88)$$

Această expresie este asemănătoare cu cea determinată la rezonanța oscilatorului fără frecare. Dacă valoarea lui t crește, $e^{-\frac{bt}{2m}}$ tinde către zero, astfel că mișcarea intră în regimul permanent.

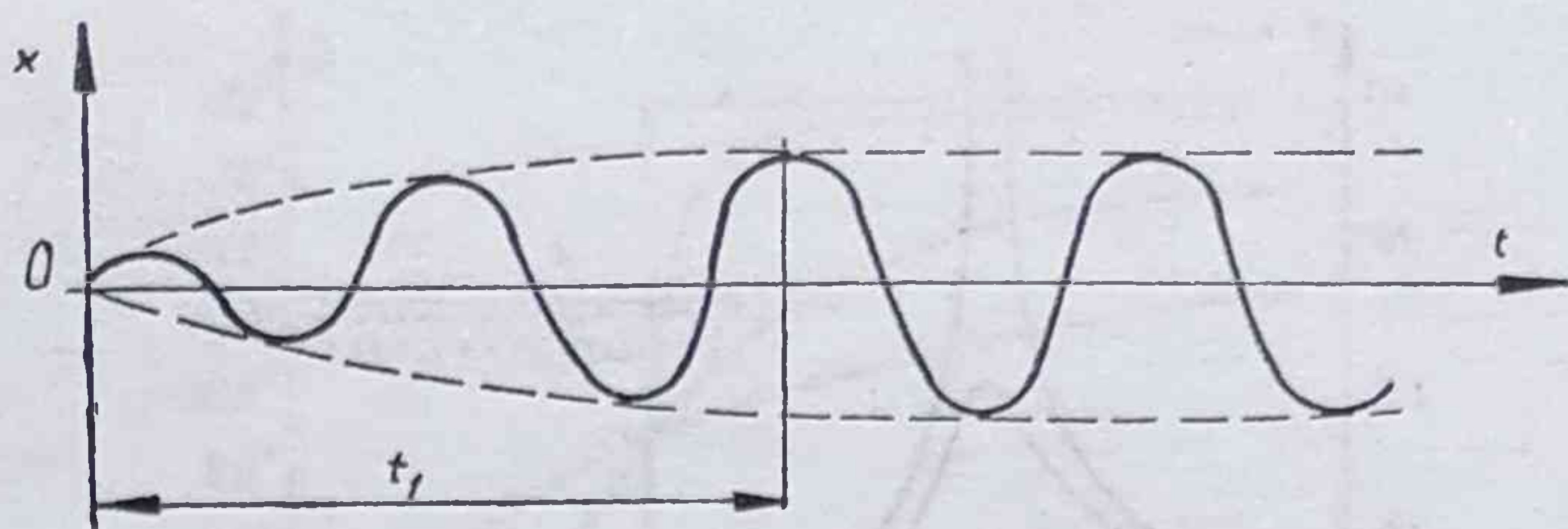


Fig. 10.24

Pentru cazul în care frecarea este mică, alura mișcării rezultă din figura 10.24. Se observă că începînd de la un moment t_1 mișcarea capătă forma caracteristică regimului permanent.

Amplitudinea mișcării întreținute are expresia :

$$B = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega^2 - p^2)^2 + p^2 \cdot b^2}} = \frac{q}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + b^2 \cdot p^2 \frac{1}{m^2}}}, \quad (10.89)$$

unde s-a notat : $\frac{F_0}{m} = q$.

Dacă se aplică static o forță F_0 , arcul se alungește cu mărimea :

$$x_{st} = \frac{F_0}{k} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m}} = \frac{q}{\omega^2}.$$

Expresia amplitudinei B poate fi scrisă sub forma :

$$B = \frac{\frac{q}{\omega^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right]^2 + \frac{b^2}{\omega^2} \frac{p^2}{\omega^2 \cdot m^2}}} = x_{st} \cdot B_1, \quad (10.90)$$

unde B_1 se numește factor de amplificare și este adimensional. Observînd că valoarea coeficientului de amortizare critică este :

$$b_{cr} = 2m \cdot \omega = 2m \sqrt{\frac{k}{m}};$$

expresia factorului de amplificare devine :

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right]^2 + \frac{b^2}{\omega^2} \cdot \frac{p^2}{\omega^2 \cdot m^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right]^2 + 4 \left(\frac{b}{b_{cr}}\right)^2 \left(\frac{p}{\omega}\right)^2}}. \quad (10.91, a)$$

Dacă nu există frecare, factorul de amplificare devine :

$$B_1 = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}} = B_0 \quad (10.91, b)$$

și expresia este, în acest caz, tocmai cea găsită la mișcarea oscilatorie fără frecare sub acțiunea unei forțe perturbatorii sinusoidale.

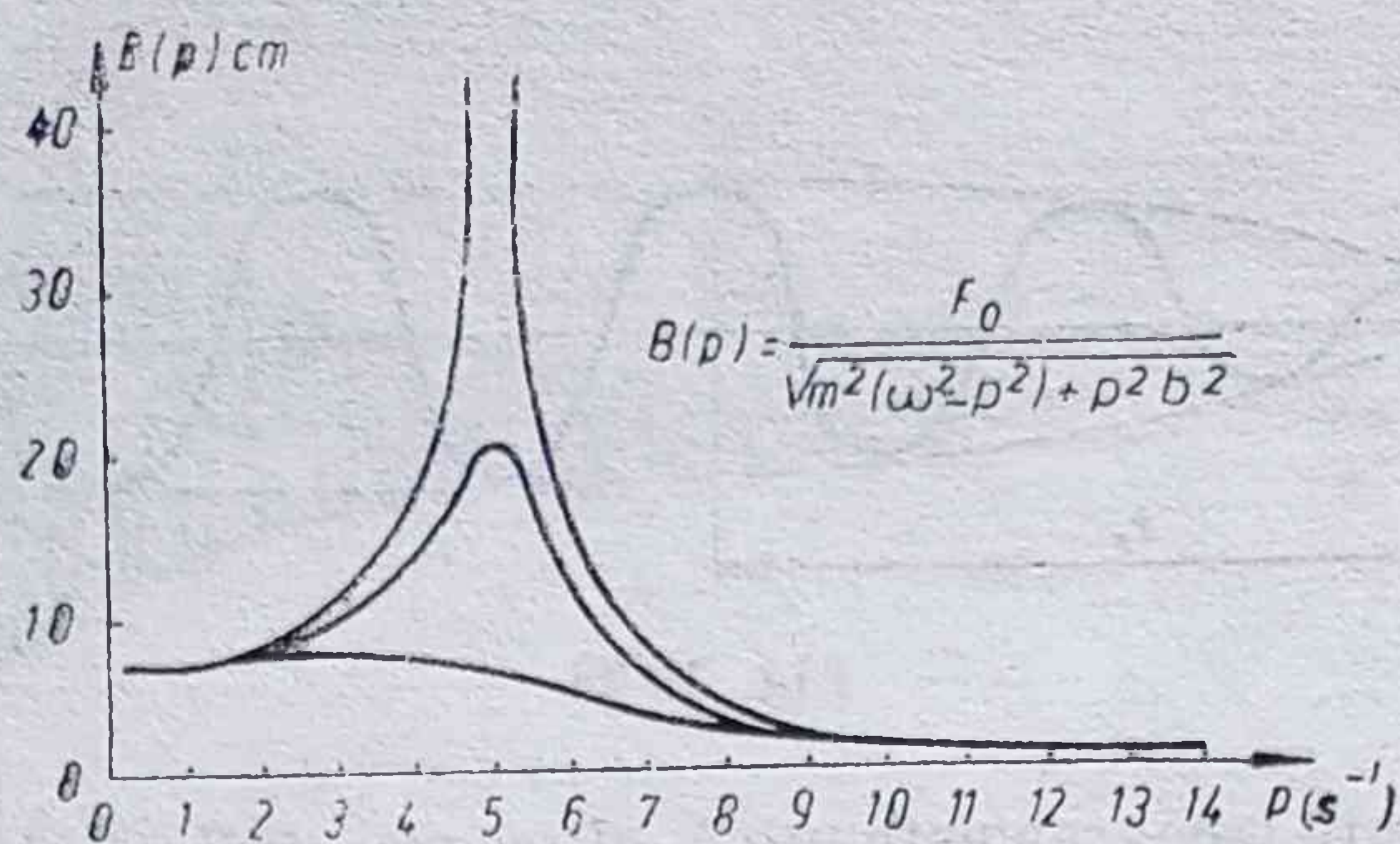


Fig. 10.25

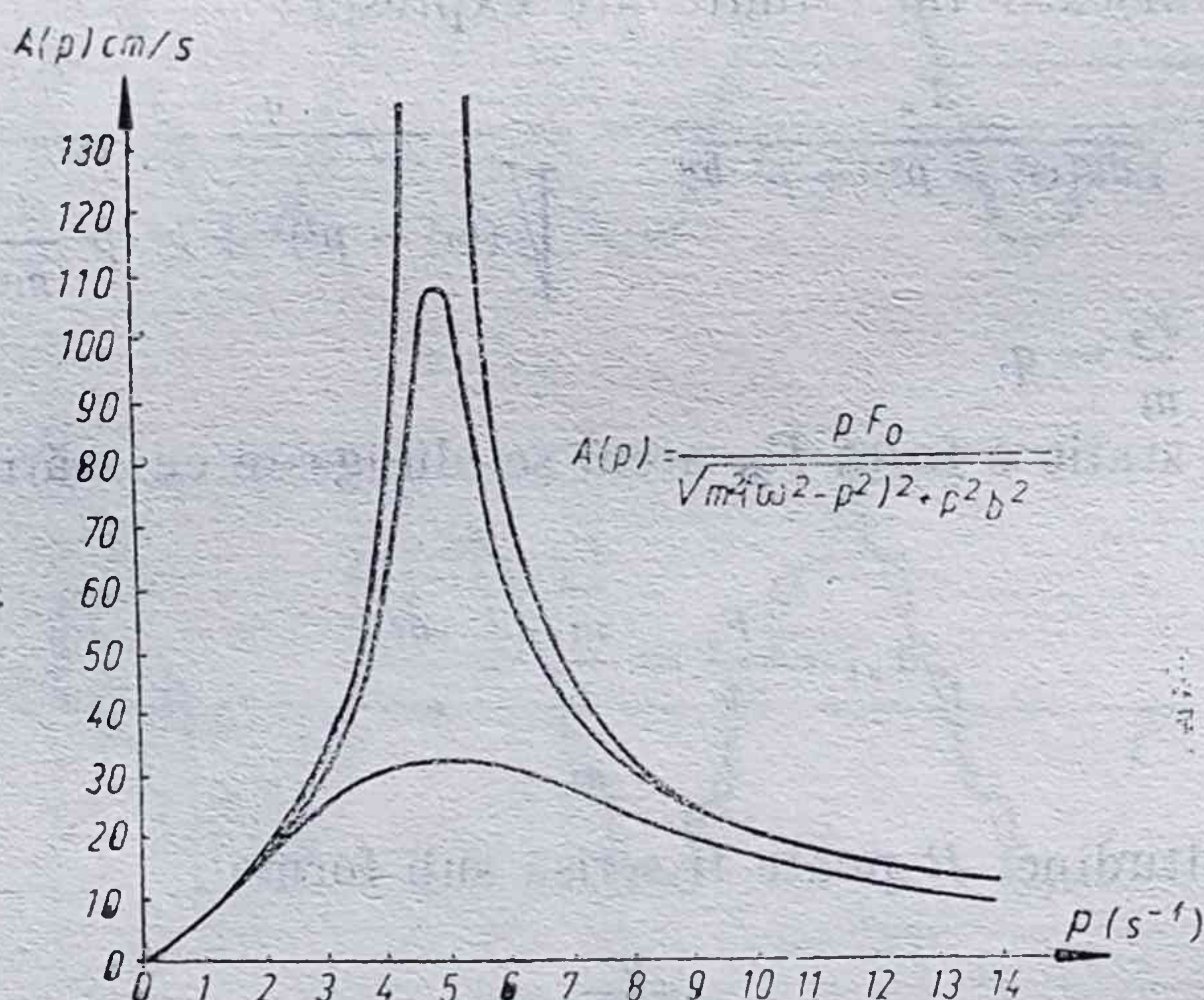


Fig. 10.26

Variația factorului $B(\omega)$ în funcție de variația pulsației perturbatorii este redată în figura 10.25 pentru diferite valori ale coeficientului b .

Viteza în regim permanent este dată de :

$$x = -B \cdot p \sin(p \cdot t - \beta) = A \cos\left(p \cdot t - \beta + \frac{\pi}{2}\right). \quad (10.92)$$

Amplitudinea vitezei este $A(p) = p \cdot B(p)$ ce admite o valoare maximă care rezultă din : $\frac{dA(p)}{dt} = 0$, și se obține : $\omega_{cr} = \omega$.

Reprezentând grafic amplitudinea vitezei se obțin caracteristicile vitezelor (fig. 10.26).

Din diagrame rezultă că diferența de fază între deplasare și viteză este de 90° și între viteză și forță este $\gamma = \beta - \frac{\pi}{2}$.

Variația diferenței de fază dintre forță și deplasare este reprezentată în figura 10.27, în funcție de pulsație perturbatoare ω .

Pentru a evalua disiparea energiei se înmulțește cu \dot{x} ecuația de mișcare și se obține :

$$m \cdot \ddot{x} \cdot \dot{x} + b \cdot \dot{x}^2 + k \cdot x \cdot \dot{x} = \dot{x} \cdot F_0 \cos pt$$

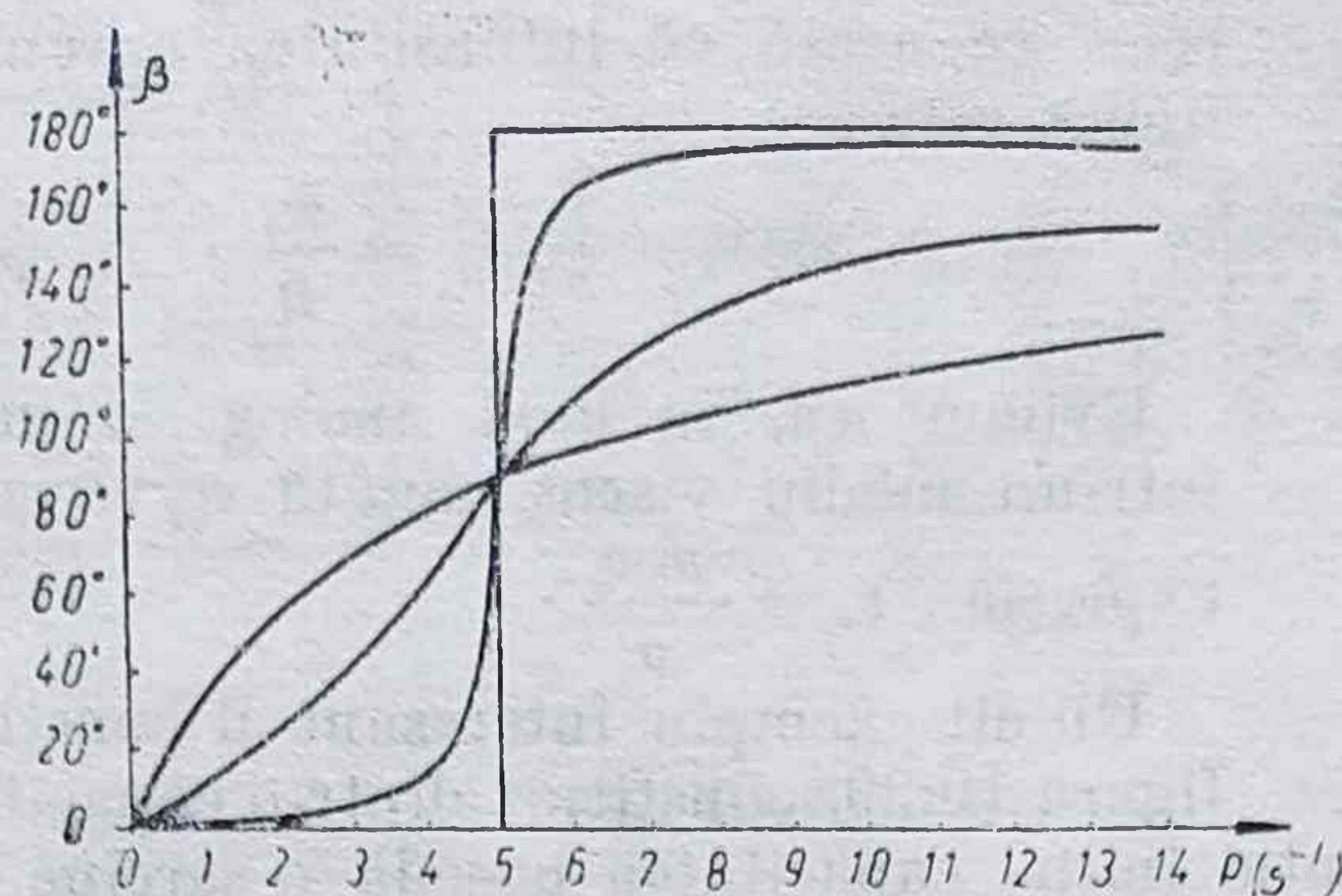


Fig. 10.27

sau observînd că :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

este energia totală a punctului, avem :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + b \cdot \dot{x}^2 = \dot{x} \cdot F_0 \cos pt. \quad (10.93)$$

Această relație arată că energia dată de forța perturbatoare este egală cu variația de energie a sistemului, la care se adaugă cota de energie disipată drept căldură.

10.3.5. SISTEME ANALOGICE

Este demn de remarcat faptul că pentru fiecare sistem mecanic există un circuit simplu electric conform unei ecuații diferențiale identice. Astfel, în figura 10.28 este arătat un circuit ce conține o baterie cu o forță electromotoare Φ_0 , o rezistență R , o inductanță L și un întrerupător S . La închiderea întrerupătorului S funcționarea circuitului este exprimată de ecuația diferențială :

$$L \frac{dI}{dt} + R \cdot I = \Phi_0, \quad (10.94)$$

unde I este intensitatea curentului la un moment dat, adică sarcina electrică ce este dată circuitului pe secundă, astfel că se poate scrie : $I = \dot{q}$, iar ecuația diferențială se poate scrie :

$$L \cdot \ddot{q} + R \cdot \dot{q} = \Phi_0. \quad (10.95)$$

Această ecuație este identică cu cea care exprimă mișcarea unei mase m ce se deplasează într-un mediu vâcos sub acțiunea greutatei proprii. Dacă în momentul inițial $t = 0$, curentul inițial este nul $I = 0$, ecuația diferențială integrată ne dă expresia :

$$I = \frac{\Phi_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad (10.96)$$

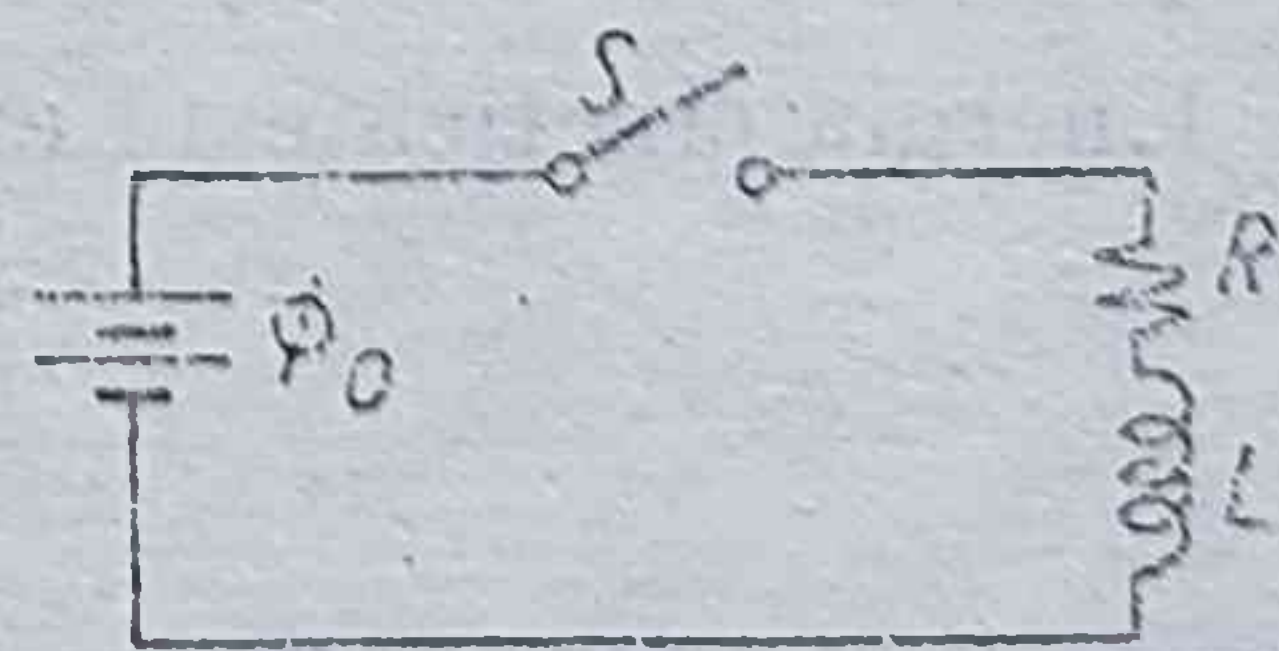


Fig. 10.28

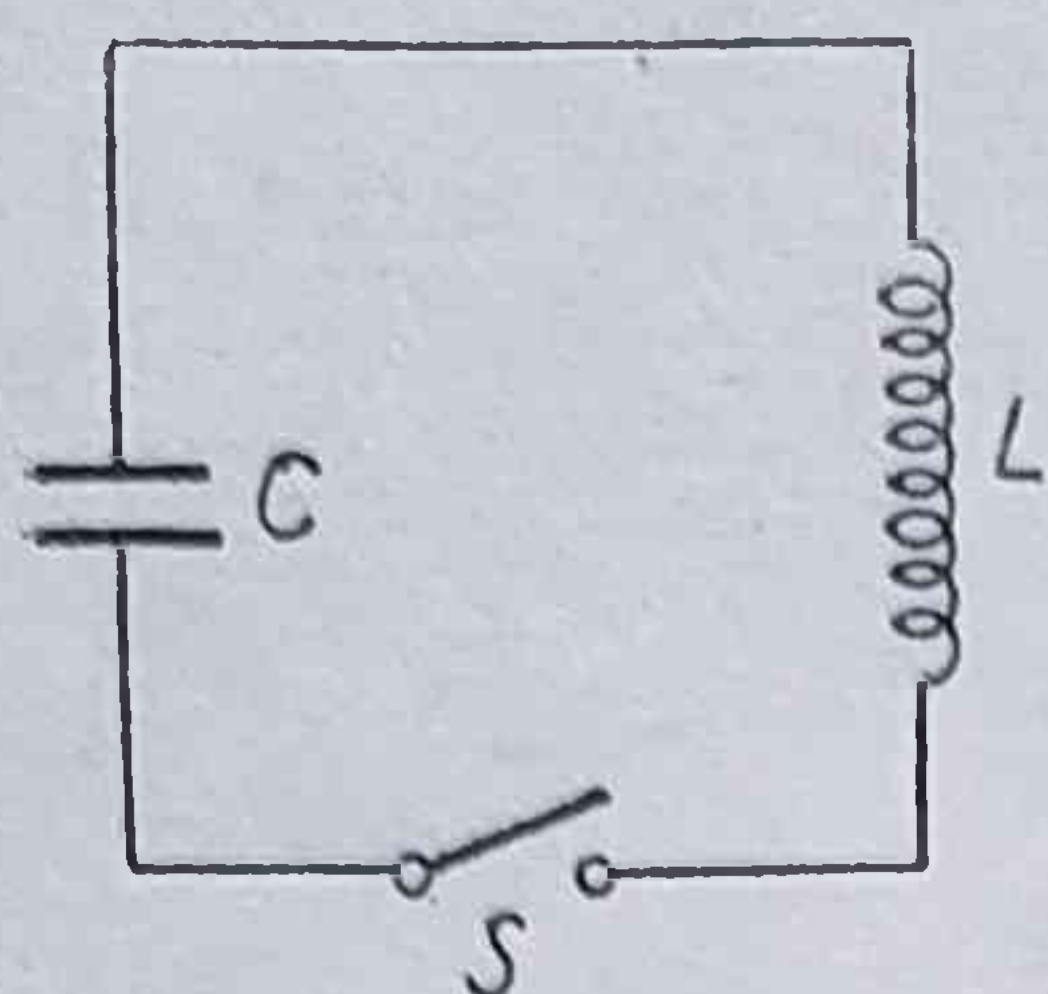


Fig. 10.29

ceea ce arată că intensitatea curentului la valoarea finală este :

$$I_f = \frac{\Phi_0}{R} .$$

Evident că, în mod analog, o masă ce se mișcă într-un mediu vâcos capătă o viteză finală dată de expresia : $v_f = \frac{m \cdot a}{b}$.

Un alt exemplu interesant îl constituie circuitul din figura 10.29, constituit dintr-o capacitate C și o induc-tanță L . La momentul inițial capacitatea posedă o sarcină q_0 . La închiderea circuitului funcționarea curentului este exprimată de relația :

$$L \frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{q}{C} = 0, \quad (10.97)$$

sau

$$L \cdot \ddot{q} + \frac{q}{C} = 0.$$

Soluția generală a acestei ecuații diferențiale este de forma : $q = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$,

unde $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$. (10.98)

Pentru determinarea constantelor de integrare se presupune că la momentul inițial $t = 0$ se cunosc sarcina inițială q_0 și curentul inițial $I = 0 = \dot{q}$.

Rezultă : $q = q_0 \cos \omega_0 t$ sau : $q = q_0 \cos \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} t$.

Se poate observa că sarcina electrică oscilează cu o frecvență caracte-ristică asemănătoare cu oscilația unei mase agățate la capătul unui arc. Din analiza celor două exemple de mai sus se pot stabili analogiile electrice ale diferitelor mărimi mecanice. Acestea pot fi concentrate și comparate sumar în tabela de mai jos :

Mărimi electrice		Mărimi mecanice	
Denumirea	Simbol		
Inductanță	L	Masa	m
Rezistență	R	Constanta de amortizare	b
Reciproca capacității	$1/C$	Constanta elastică	k
Sarcina	q	Coordonata spațiului	x
Intensitatea curentului	I	Viteza	$\dot{x} = v$
Tensiunea (voltajul)	V	Forța	F

Energia cinetică este exprimată de relația :

$$E_c = \frac{1}{2} L \cdot I^2, \quad (10.99, a)$$

în comparație cu cea cunoscută în mecanică : $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$.

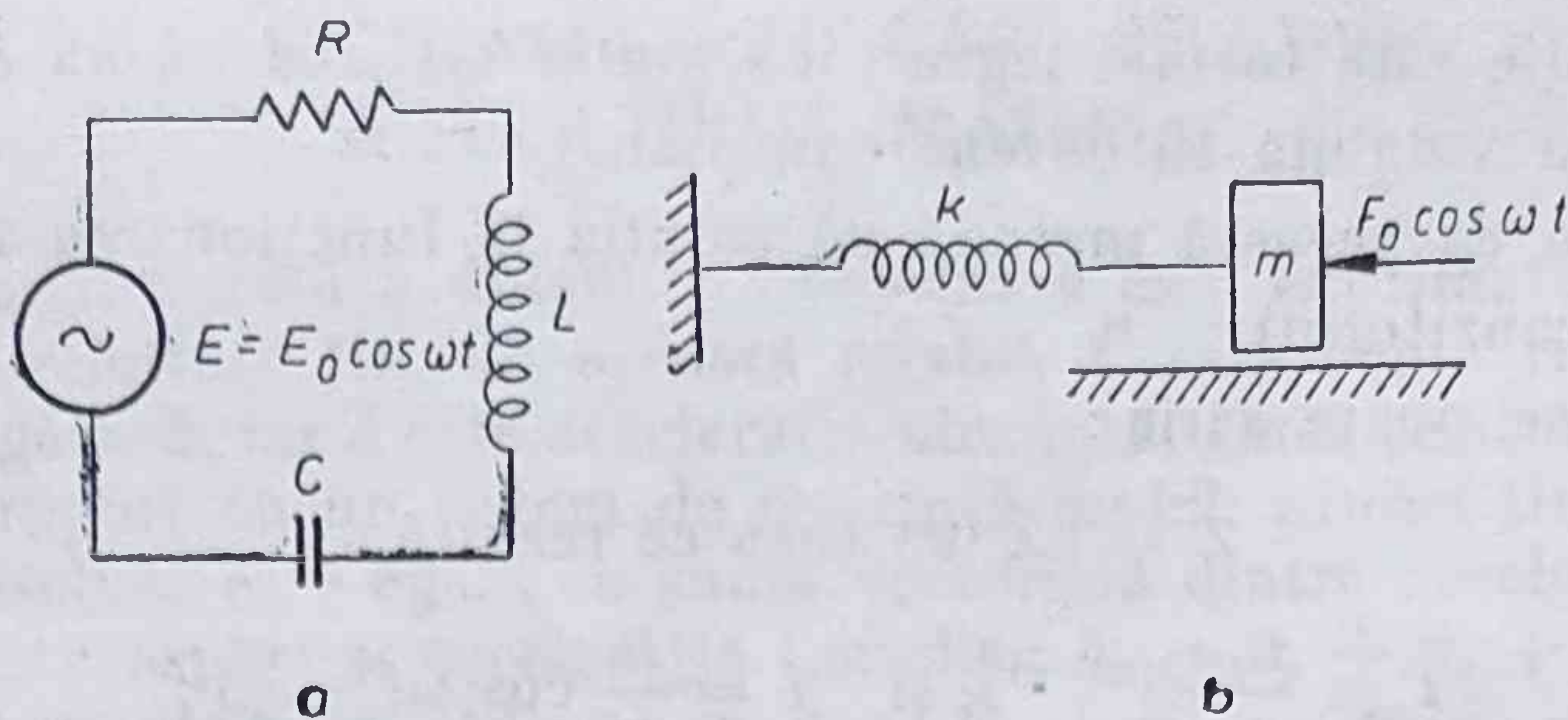


Fig. 10.30

Energia potențială este dată de relațiile :

$$E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} \right) q^2, \quad (10.99 \text{ b})$$

comparată cu $E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$ în mecanică.

Pentru fiecare sistem mecanic se pot găsi exemple care să constituie circuite electrice analoage cu cele mecanice.

Astfel, pentru mișcări oscilatorii armonice sub acțiunea unei forțe perturbatoare sinusoidale se poate considera circuitul analog din figura 10.30, a, b. Funcționarea circuitului electric (fig. 10.30, a) este exprimată prin ecuația diferențială :

$$L \cdot \ddot{q} + R \cdot \dot{q} + \frac{q}{C} = E_0 \cos \omega t. \quad (10.100, \text{ a})$$

Această ecuație diferențială este identică cu cea stabilită la mișcarea oscilatorie amortizată sub acțiunea unei forțe perturbatorii sinusoidale. Folosind și de această dată calculul cu numere complexe, ecuația se mai poate scrie sub forma :

$$L \cdot \ddot{Q} + R \cdot \dot{Q} + \frac{1}{C} Q = V, \quad (10.100, \text{ b})$$

unde Q este sarcina exprimată ca număr complex, iar $V = E_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$ este tensiunea perturbatoare exprimată în complex.

Sarcina în regim permanent este dată de partea reală a soluției ecuației diferențiale. Sarcina și curentul sînt exprimate de :

$$Q = Q_0 \cdot e^{i \omega t} \text{ și } I = I_0 \cdot e^{i \omega t},$$

unde : Q_0 și I_0 sînt amplitudinile complexe.

Rezultă :

$$\dot{Q} = i \cdot \omega \cdot Q \text{ și } \ddot{Q} = I = i \cdot \omega \cdot I.$$

Ecuația diferențială devine astfel :

$$L \cdot i \cdot \omega I + R \cdot I + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C} I = V. \quad (10.101)$$

Notînd impedanța complexă a circuitului : $Z = L \cdot i \cdot \omega + R + \frac{1}{i \cdot \omega C}$, ecuația diferențială se reduce la forma :

$$I \cdot Z = V. \quad (10.102)$$

Această relație este tocmai legea lui Ohm și este, ca formă de exprimare, identică cu cea valabilă în curent continuu.

(Se remarcă că această metodă dă soluția la funcționarea în regim permanent, nu tranzitoriu).

Impedanța se poate scrie :

$$Z = |Z| e^{i\gamma} \text{ ceea ce rezultă : } \dots$$

$$I = \frac{E_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \gamma)} \quad \text{și} \quad I = \frac{E_0}{|Z|} \cos(\omega t - \gamma);$$

în aceste relații I reprezintă partea reală a expresiei complexe a curentului. Expresia modulului impedanței Z este :

$$|Z| = \frac{1}{\omega} \sqrt{R^2 \cdot \omega^2 + L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}, \quad (10.103)$$

unde : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ este pulsația proprie a circuitului în cazul în care : $R = 0$.

Unghiul de defazare γ este dat de expresia :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{L(\omega^2 - \omega_0^2)}{R \cdot \omega}. \quad (10.104)$$

Impedanțele complexe ale elementelor circuitului sînt :

$$Z_L = i \cdot \omega \cdot L; \quad Z_R = R \quad \text{și} \quad Z_C = \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C} = -\frac{i}{\omega \cdot C}, \quad (10.105, a)$$

iar căderile de tensiune complexe pentru fiecare element sînt :

$$V_L = I \cdot Z_L; \quad V_R = I \cdot Z_R \quad \text{și} \quad V_C = I \cdot Z_C. \quad (10.105, b)$$

Tensiunile instantanee reale sînt :

$$Z_L = \omega \cdot L \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} \quad \text{și} \quad Z_C = \frac{1}{\omega \cdot C} e^{\frac{-i\pi}{2}}. \quad (10.105, c)$$

Rezultă că tensiunea în inductor este în fază înaintea curentului cu 90° , tensiunea în rezistență este în fază cu curentul, iar tensiunea în capacitate este în urmă cu 90° . Diferența de fază dintre curent și tensiunea perturbatoare este γ determinat mai sus. Se pot face analogiile :

$$Z_m = i \cdot \omega \cdot m; \quad Z_b = b; \quad Z_k = -\frac{k}{m}. \quad (10.106, a)$$

Impedanța totală este, ca atare :

$$Z = Z_m + Z_b + Z_k. \quad (10.106, b)$$

Rezultă că ecuația diferențială a mișcării oscilatorii amortizate sub acțiunea unei forțe perturbatorii sinusoidale se poate scrie sub forma :

$$U \cdot Z = F, \quad (10.107)$$

unde $F = F_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$ este expresia în complex a forței, iar U este expresia complexă a vitezei.

10.4. DINAMICA MIȘCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI MATERIAL

Ecuția fundamentală a dinamicii : $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ este exprimată în raport cu un sistem de referință fix. În această relație, \vec{F} este suma tuturor forțelor active și de legătură, iar \vec{a} este accelerația absolută. Dacă se studiază mișcarea punctului în raport cu un sistem de referință mobil, atunci ținând seama că accelerația absolută este egală cu suma vectorială dintre accelerația relativă, accelerația de transport și accelerația Coriolis : $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_c$, din expresia legii fundamentale se obține : $m \cdot \vec{a}_r = \vec{F}_a + \vec{F}_{leg} - m \cdot \vec{a}_t - m \cdot \vec{a}_c$. Deoarece : $(-m \cdot \vec{a}_t) = \vec{F}_t$ și $(-m \cdot \vec{a}_c) = \vec{F}_c$ sînt forțele de inerție datorită mișcării de transport și forței Coriolis (complementară), relația mai poate fi pusă sub forma :

$$m \cdot \vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_t + \vec{F}_c = \vec{F}_a + \vec{F}_{leg} + \vec{F}_t + \vec{F}_c.$$

Proiectînd această ecuație vectorială pe cele trei axe de referință mobile, se obțin trei ecuații diferențiale scalare care integrate ne permit să stabilim mișcarea relativă a punctului în raport cu sistemul de referință mobil.

Dacă nu există forțe complementare, $\vec{F}_t + \vec{F}_c = 0$, ecuația devine : $m \cdot \vec{a}_r = \vec{F}$. Aceasta este posibil numai dacă sistemul mobil de referință este inerțial, adică are o mișcare de translație rectilinie și uniformă față de triedrul de referință fix ($\vec{\omega} = 0$ și $\vec{a}_0 = 0$).

În realitate nu există reper fix în natură. Ca urmare, calitatea unui sistem de referință de a fi inerțial nu poate fi stabilită decît pe cale experimentală. Dacă studiul unei mișcări mecanice în raport cu un anumit reper, cu ajutorul ecuației fundamentale, dă rezultate ce coincid cu experiența, atunci sistemul poate fi considerat inerțial.

Între rezultatele experienței și cele prevăzute de teorie nu poate exista decît o corespondență aproximativă. Se consideră că gradul de inerțialitate este cu atît mai corespunzător cu cît erorile ce rezultă pe cale experimentală sînt mai mici. Astfel, pentru aproximații de ordinul celei de-a treia cifre semnificative, Pămîntul poate fi considerat ca un reper inerțial.

APLICAȚIA 1

Un punct material de masă $m = 4$ kg este acționat, în timpul mișcării sale, de forțe avînd scalarul $X = -16x$ și $Y = -4y$. Știind că în momentul inițial se găsește în poziția (A) de coordonate $x = 2$; $y = 2$, cu viteza inițială de componente $v_x = 0$; $v_y = 2$, să se determine ecuațiile parametrice ale mișcării, traiectoria, viteza, accelerația și raza de curbură în poziția inițială A.

Rezolvare

Ecuția fundamentală a dinamicii punctului material, proiectată pe axele carteziene Ox și Oy , conduce la :

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= X; & m \cdot \ddot{y} &= Y; \\ 4m \cdot \ddot{x} &= -16x; & 4\ddot{y} &= -4y; \\ \ddot{x} + 4x &= 0; & \ddot{y} + y &= 0. \end{aligned}$$

Soluțiile acestor ecuații și vitezele respective sînt :

$$\begin{aligned} x &= C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t; & y &= C_3 \cos t + C_4 \sin t; \\ \dot{x} &= -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t; & \dot{y} &= -C_3 \sin t + C_4 \cos t. \end{aligned}$$

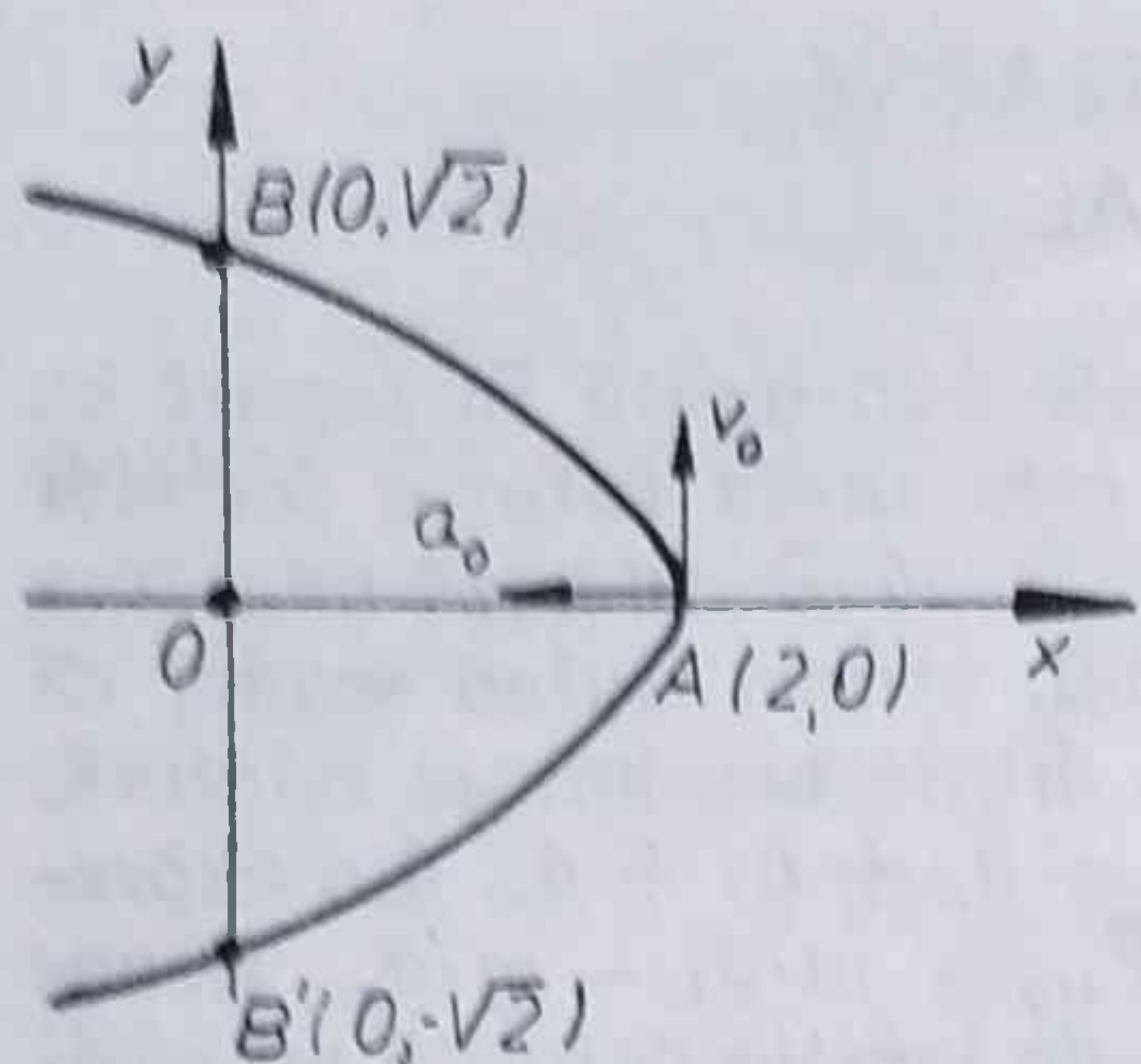


Fig. 10.31

Punînd condițiile inițiale la momentul $t = 0$, rezultă constantele de integrare :

$$C_1 = 2 ; C_2 = 0 ; C_3 = 0 ; C_4 = 2.$$

Ecuatiile parametrice sînt :

$$x = 2 \cos 2t ; y = 2 \sin t.$$

Traectoria se determină prin eliminarea parametrului t , rezultînd parabola (fig. 10.31) :

$$x = 2 - y^2.$$

Viteza are componentele :

$$v \begin{cases} v_x = \dot{x} = -4 \sin 2t ; \\ v_y = \dot{y} = 2 \cos t. \end{cases}$$

Accelerația are componentele :

$$a \begin{cases} a_x = \dot{v}_x = -8 \cos 2t ; \\ a_y = \dot{v}_y = -2 \sin t. \end{cases}$$

Se observă că pentru $t = 0$, rezultă :

$$a_x = -8 ; a_y = 0.$$

Această accelerație, calculată cartezian, coincide cu componenta accelerației normale după triedrul Frenet. Deci : în A,

$$|a_n| = \frac{v_A^2}{\rho_A}.$$

De aceea raza de curbură ρ_A , la momentul inițial, este :

$$\rho_A = \frac{v_A^2}{|a_n|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

APLICAȚIA 2

Un punct material greu, de masă m , se mișcă pe fața superioară a lăncișorului $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$, pornind din punctul A_0 de ordonată y_0 , cu viteză inițială v_0 . Unde se desprinde punctul de lăncișor ? (fig. 10.32).

Rezolvare

Fie A poziția de desprindere. Se scrie ecuația fundamentală a lui Newton proiectată pe direcția și în sensul normalei principale v din triedrul Frenet :

$$m \frac{v^2}{\rho} = m \cdot g \cos \theta - N.$$

Condiția de desprindere este ca $N=0$, deci :

$$v^2 = \rho \cdot g \cos \theta.$$

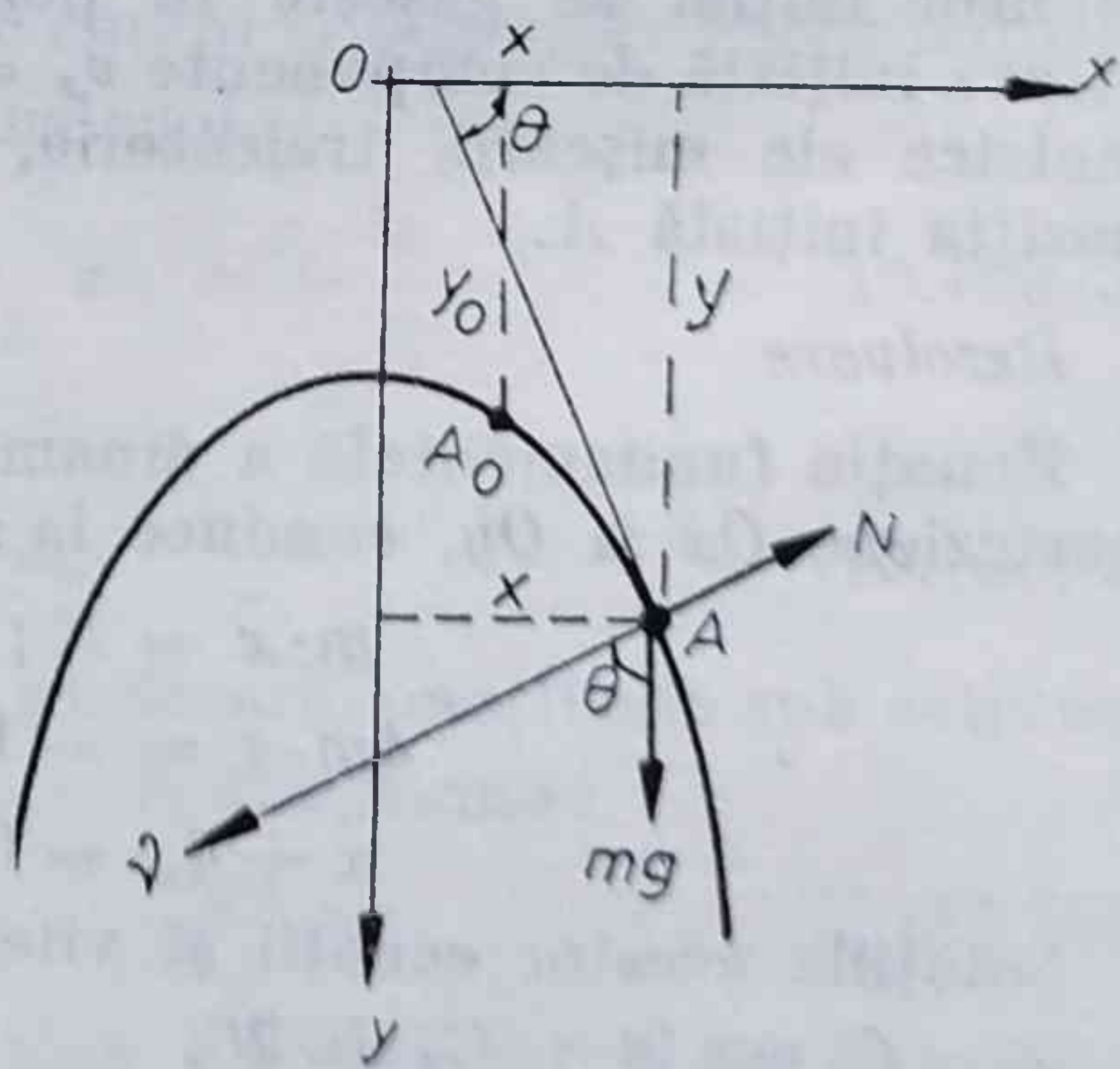


Fig. 10.32

Pentru calculul razei de curbură ρ se folosește expresia cunoscută :

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''},$$

iar pentru înclinarea θ , se calculează :

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}}.$$

Se vede că :

$$y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a} \text{ și } y'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

Deci :

$$v^2 = g \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \cdot \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}} = \frac{g}{y''} (1 + y'^2) = g \frac{\left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}\right)}{\frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}} = ag.$$

Se aplică teorema energiei cinetice între poziția A și A_0 .

$$\frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2} = m \cdot g(y - y_0).$$

De unde :

$$v^2 = v_0^2 + 2g(y - y_0).$$

Înlocuind cu $v^2 = a \cdot g$, rezultă :

$$y = 2y_0 - \frac{v_0^2}{g}.$$

Pentru determinarea abscisei x , se folosește relația :

$$\operatorname{ch} \frac{x}{a} + \operatorname{sh} \frac{x}{a} = e^{\frac{x}{a}};$$

$$\frac{y}{a} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}} = e^{\frac{x}{a}};$$

$$e^{\frac{x}{a}} = \frac{1}{a} (y + \sqrt{a^2 - y^2}).$$

De unde :

$$\begin{aligned} x &= a \ln \frac{y + \sqrt{a^2 - y^2}}{a} = \\ &= a \ln \frac{\left(2y_0 - \frac{v_0^2}{g}\right) + \sqrt{a^2 - \left(2y_0 - \frac{v_0^2}{g}\right)^2}}{a}. \end{aligned}$$

APLICAȚIA 3

Un punct material M de masă m se mișcă fără frecare în planul $yo z$ ce se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_0 în jurul axei verticale oz . (fig. 10.33).

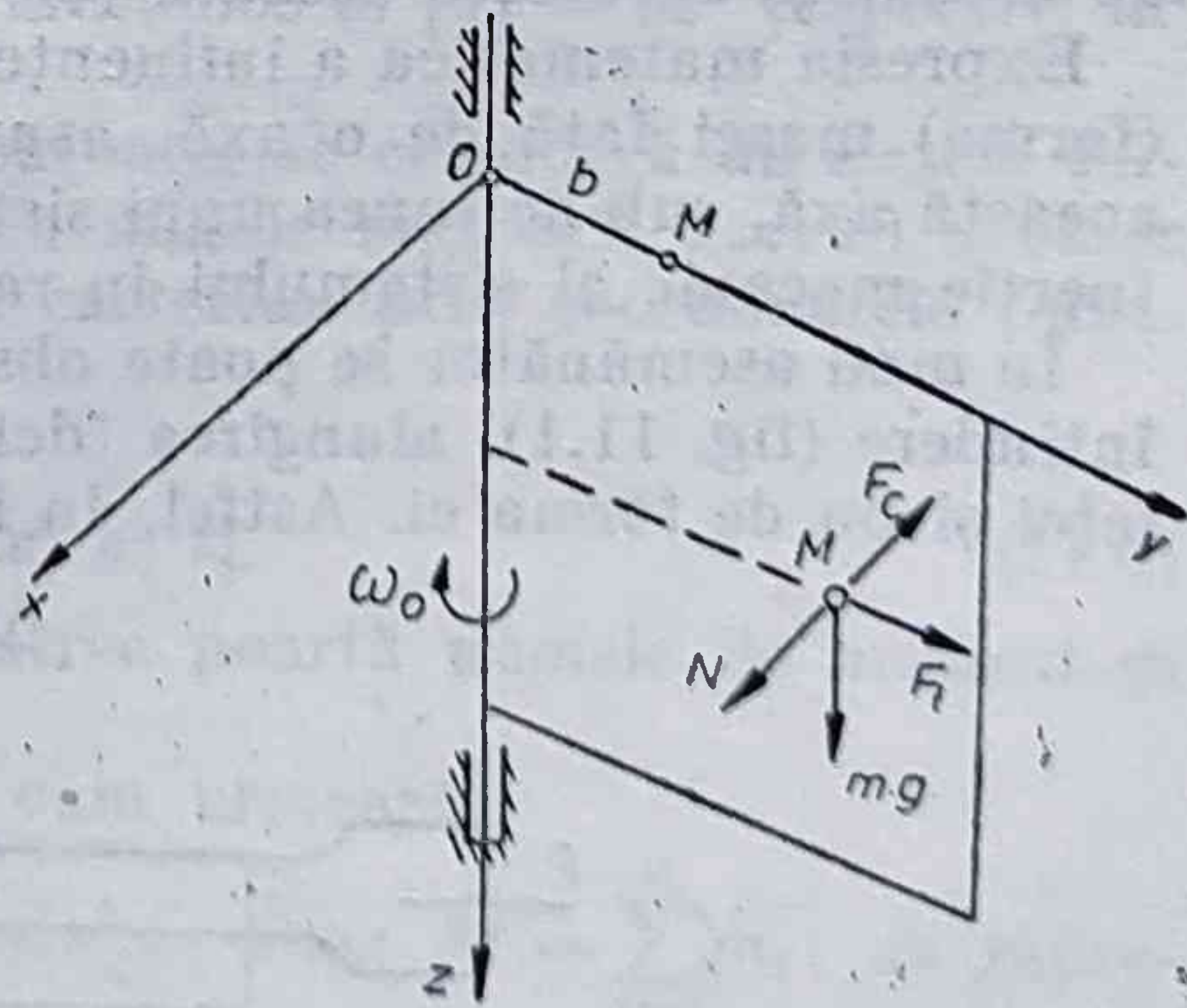


Fig. 10.33

Știind că în momentul inițial se află în $M_0 (0, b, 0)$, cu viteza inițială $v_0 = 0$, să se studieze mișcarea relativă și reacțiunea planului.

Rezolvare

Ecuatia fundamentală a dinamicii mișcării relative a punctului este :

$$m \cdot \bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c,$$

în care :

$$|\bar{F}_t| = m \cdot a_t = m \cdot x \cdot \omega_0^2;$$

$$|\bar{F}_c| = 2m|\omega_t \times \bar{v}_r| = 2m \cdot \omega_0 \cdot x.$$

Se proiectează ecuația fundamentală pe cele trei axe :

$$m \cdot \ddot{x} = m \cdot \omega_0^2 \cdot x;$$

$$0 = N - 2m \cdot \omega_0 \cdot x;$$

$$m \cdot \ddot{z} = m \cdot g.$$

Ținând seama de condițiile inițiale, rezultă :

$$x = \frac{b}{2} (e^{\omega_0 \cdot t} + e^{-\omega_0 \cdot t}) = b \operatorname{ch} \omega_0 t;$$

$$N = 2m \cdot \omega_0 \cdot b \cdot \operatorname{ch} \omega_0 t.$$

11.

MOMENTE DE INERTIE

11.1. GENERALITĂȚI

Mișcarea unui punct material este exprimată prin ecuația fundamentală a mecanicii : $\bar{F} = m \cdot \bar{a}$. În această relație \bar{F} este rezultanta tuturor forțelor ce acționează asupra punctului, \bar{a} este accelerația față de sistemul de referință fix (inițial), iar m este masa punctului și este considerată constantă.

În cazul mișcării de rotație a unui sistem de puncte materiale sau a unui corp solid rigid față de o axă se constată că legea fundamentală nu mai poate exprima complet corelația dintre mase, forțe și mișcare. Se constată experimental că mișcarea de rotație în jurul unei axe a unui corp solid rigid (sau a unui sistem de puncte materiale) depinde de mărimea masei și de modul în care este așezată (distribuită) masa față de axa de rotație.

Expresia matematică a influenței pe care o are masa corpului și distribuția (forma) masei față de o axă, asupra mișcării de rotație a corpului față de această axă, sub acțiunea unui sistem de forțe, poartă numele de moment de inerție mecanic al sistemului în raport cu axa respectivă.

În mod asemănător se poate observa că dacă se consideră o bară supusă la întindere (fig. 11.1), alungirea (deformația) barei depinde de mărimea suprafeței și nu de forma ei. Astfel, în baza legii lui Hooke, se obține :

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EA}. \quad (11.1)$$

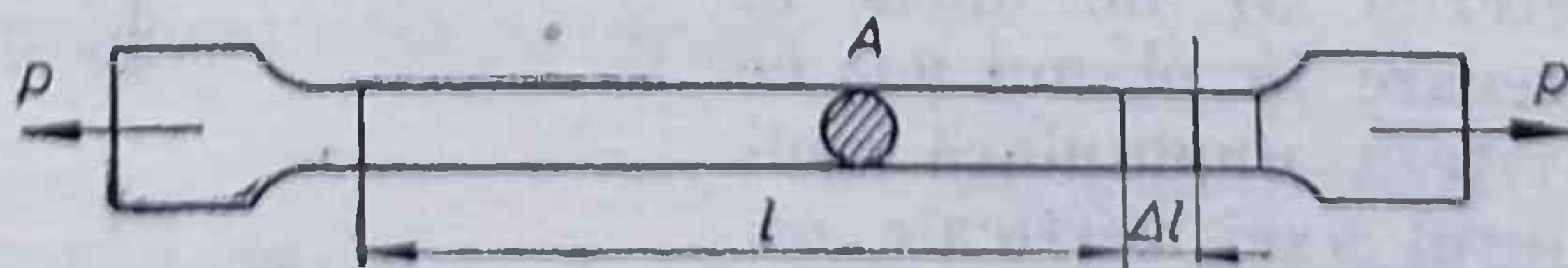


Fig. 11.1

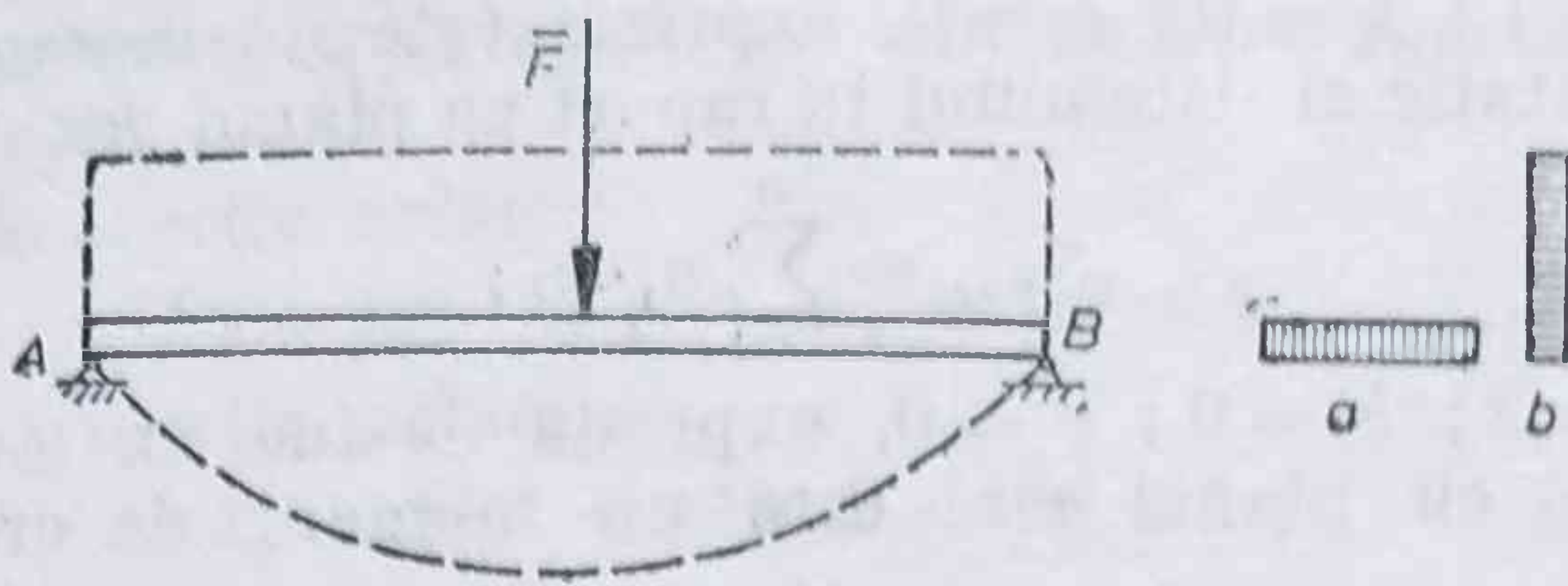


Fig. 11.2

Se ia în considerare o bară de secțiune dreptunghiulară îngustă, ca în figura 11.2. Dacă bara este simplu rezemată în A și B și asupra ei acționează o forță \bar{F} , deformația barei depinde nu numai de mărimea secțiunii ei și de modul în care este așezată secțiunea barei față de acțiunea forței. Expresia matematică a influenței mărimii secțiunii și a formei secțiunii barei asupra deformației corpului sub acțiunea unui sistem de forțe poartă numele de *moment de inerție geometric*.

Pe cale experimentală se stabilește ușor că influența distribuției masei asupra mișcării intervine proporțional cu pătratul distanței elementului de masă sau de volum față de axa de rotație.

În cazul unui sistem de n puncte material $A_i (i = 1, \dots, n)$, pentru un punct i corespunzând o masă m_i și o distanță l_i la axa în jurul căreia se poate roti sistemul, expresia momentului de inerție este :

$$J_{\Delta} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot l_i^2. \quad (11.2, a)$$

În cazul corpului solid, această sumă se transformă în integrală referitoare la domeniul (D) ocupat de corp :

$$J_{\Delta} = \int_{(D)} l^2 \cdot dm. \quad (11.2, b)$$

La plăcile plane, m este masa pe unitatea de suprafață a suprafeței plane. În mod corespunzător, pentru momentele de inerție geometrice se pot scrie relațiile :

$$I_{\Delta} = \sum_{i=1}^n V_i \cdot l_i^2; \quad (11.3, a)$$

$$I_{\Delta} = \int_{(D)} l^2 \cdot dV. \quad (11.3, b)$$

Dimensiunile și unitățile de măsură pentru momentele de inerție sînt : $[J] = ML^2$, respectiv $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ pentru cele mecanice și $[I] = M^4$ respectiv m^4 pentru cele geometrice.

Pentru a stabili o definiție mai cuprinzătoare, se consideră un sistem format din n puncte materiale discrete P_i cu masele $m_i (i = 1, \dots, n)$ a căror poziție este dată în sistemul de referință cartezian prin coordonatele punctelor x_i, y_i, z_i .

Expresia :

$$J_{\Delta} = \sum m_i \cdot x_i^a \cdot y_i^b \cdot z_i^c, \quad (11.4)$$

unde : a, b, c sînt numere întregi și pozitive poartă numele de *moment de ordinul $a + b + c$* .

Aceste momente se pot clasifica după cum urmează :

— pentru $a = 0 ; b = 0 ; c = 0$, expresia devine : $M = \sum_{i=1}^n m_i$; ea reprezintă momentul de ordinul zero și este masa M a sistemului ;

— pentru $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$, expresia este un moment de ordinul 1; este un moment static al sistemului în raport cu planul yoz și devine :

$$S_{yoz} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i; \quad (11.5, a)$$

— pentru $a = 2$; $b = 0$; $c = 0$, expresia devine un moment de inerție mecanic în raport cu planul yoz ; este un moment de ordinul al doilea :

$$J_{yoz} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i^2; \quad (11.5, b)$$

— pentru $a = 1$; $b = 1$; $c = 0$, expresia se numește moment de inerție mecanic centrifugal denumit și moment de deviație al sistemului față de planele yoz și zox . Este de asemenea un moment de ordinul al doilea :

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i \cdot y_i. \quad (11.5, c)$$

În aplicațiile curente din mecanica tehnică interesează numai momentul de ordin zero, de ordinul întâi și momentele de ordinul doi. Momentele de ordin mai mare nu prezintă interes în mecanica tehnică. Dacă se consideră sistemul de puncte materiale discrete $P_i(m_i)$; ($i = 1, 2, \dots, n$) și se notează cu l_i ($i = 1, 2, \dots, n$) distanțele de la punctele sistemului la un plan (P), la o axă (Δ) sau la un punct O , expresia : $J_{\Delta} = \sum m_i \cdot l_i^2$ reprezintă un moment de inerție planar, axial sau polar. Dacă se aplică același raționament la un corp solid rigid cuprins în conturul (C), respectiv domeniul (D), care se împarte într-o infinitate de mase elementare dm aflate la distanțele l de planul P , axa Δ sau punctul O , atunci expresia devine : $J = \int l^2 \cdot dm$.

În funcție de modul cum se măsoară distanța l , momentele de inerție se numesc :

— *momente de inerție planare :*

$$J_{xoy} = \sum m_i \cdot z_i^2; \quad J_{yoz} = \sum m_i \cdot x_i^2; \quad J_{xoz} = \sum m_i \cdot y_i^2, \quad (11.6, a)$$

sau :

$$J_{xoy} = \int_{(D)} z^2 \cdot dm; \quad J_{yoz} = \int_{(D)} x^2 \cdot dm; \quad J_{xoz} = \int_{(D)} y^2 \cdot dm;$$

— *momente de inerție axiale :*

$$J_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2); \quad J_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2); \quad J_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

sau :

$$J_x = \int_{(D)} (y^2 + z^2) dm; \quad J_y = \int_{(D)} (x^2 + z^2) dm; \quad J_z = \int_{(D)} (x^2 + y^2) dm; \quad (11.6, b)$$

— *momente de inerție polare :*

$$J_o = \sum m_i \cdot r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \quad \text{sau} \quad J_o = \int_{(D)} r^2 \cdot dm = \int_{(D)} (x^2 + y^2 + z^2) dm; \quad (11.6, c)$$

— *momente de inerție centrifugale :*

$$J_{xy} = \sum m_i \cdot x_i \cdot y_i; \quad J_{xz} = \sum m_i \cdot x_i \cdot z_i; \quad J_{yz} = \sum m_i \cdot y_i \cdot z_i;$$

sau :

$$J_{xy} = \int_D x \cdot y \cdot dm; \quad J_{xz} = \int_D x \cdot z \cdot dm; \quad J_{yz} = \int_D y \cdot z \cdot dm.$$

Se observă că momentele de inerție planare, axiale și polare sînt mărimi scalare întotdeauna pozitive, în timp ce momentele de inerție centrifugale sînt mărimi tot scalare ce pot fi însă pozitive, negative sau nule. În mod

similar se definesc aceleași categorii de momente de inerție ale suprafețelor plane, în planul xOy :

— momente de inerție axiale:

$$I_x = \int y^2 \cdot dA; \quad I_y = \int x^2 \cdot dA; \quad (11.7, a)$$

— momente de inerție polare:

$$I_p = \int (y^2 + x^2) dA = \int r^2 \cdot dA; \quad (11.7, b)$$

— moment de inerție centrifugale:

$$I_{xy} = \int x \cdot y \cdot dA. \quad (11.7, c)$$

În aplicațiile practice din domeniul mecanicii tehnice este necesar a se folosi relații între diferitele categorii de momente de inerție. Astfel, între *momentele de inerție planare și cele axiale*, stabilite pentru un sistem de puncte sau un corp rigid în raport cu un sistem de referință, se pot stabili relații de genul:

$$J_x = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i^2$$

sau:

$$J_x = J_{xoz} + J_{xoy}; \quad J_y = J_{xoy} + J_{yoz}; \quad J_z = J_{yoz} + J_{zox}. \quad (11.8)$$

În mod similar, se pot obține relații de forma:

$$\begin{aligned} J_x + J_y &= 2J_{xoy} + J_z; & J_y + J_z &= 2J_{yoz} + J_x; \\ J_z + J_x &= 2J_{zox} + J_y. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Este ușor de văzut că se poate obține relația:

$$\begin{aligned} J_0 &= \sum_1^n m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \sum_1^n m_i \cdot x_i^2 + \sum_1^n m_i \cdot y_i^2 + \sum_1^n m_i \cdot z_i^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_1^n m_i (y_i^2 + z_i^2) + \sum_1^n m_i (z_i^2 + x_i^2) + \sum_1^n m_i (x_i^2 + y_i^2) \right], \end{aligned}$$

sau:

$$J_0 = J_{yoz} + J_{xoz} + J_{xoy} = \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z). \quad (11.10)$$

Aceste relații sînt valabile și în cazul solidului rigid.

Legătura dintre momentele de inerție mecanice și cele geometrice. Se observă că:

— momentul de inerție geometric este:

$$I = \int l^2 \cdot dv;$$

— momentul de inerție mecanic este:

$$J = \int l^2 \cdot dm.$$

Pentru corpurile omogene: $dm = \rho \cdot dv$, unde ρ este masa specifică.

Rezultă că între momentul de inerție mecanic și cel geometric se stabilește relația:

$$J = \rho \cdot I. \quad (11.11)$$

Raza de inerție (raza de girație). Expresia momentului de inerție se mai poate pune și sub forma:

$$J_{yoz} = M \cdot i_{yoz}^2 \quad \text{și deci} \quad i_{yoz} = \sqrt{\frac{J_{yoz}}{M}}. \quad (11.12, a)$$

În mod similar, se pot scrie :

$$\begin{aligned} J_x &= M \cdot i_x^2; & J_y &= M \cdot i_y^2; & J_z &= M \cdot i_z^2; & J_{xoz} &= M \cdot i_{xoz}^2; \\ J_{xoy} &= M \cdot i_{xoy}^2; & J_{yoz} &= M \cdot i_{yoz}^2; & J_0 &= M \cdot i_0^2. \end{aligned} \quad (11.12, b)$$

Lungimea i reprezintă distanța de la plan, axă sau pol pînă la poziția în care trebuie plasat un punct material ce are masa M egală cu masa corpului solid rigid, astfel ca momentul de inerție al punctului astfel obținut, în raport cu planul, axa sau polul, să fie egal cu momentul de inerție al corpului. Raza de inerție (de rotație) se măsoară în metri.

11.2. VARIAȚIA MOMENTELOR DE INERȚIE MECANICE ÎN RAPORT CU DIFERITE SISTEME DE REFERINȚĂ

În majoritatea aplicațiilor practice în care există corpuri sau sisteme de puncte ce au o mișcare de rotație în jurul unei axe, este necesar să se determine momentul de inerție, față de axa respectivă. Forma acestor corpuri este de cele mai multe ori o formă geometrică comună, ca, de exemplu, o placă omogenă dreptunghiulară, o bară omogenă de secțiune constantă, o placă omogenă circulară, un cilindru, un con etc.

Pentru aceste forme de corpuri care se întîlnesc în mod curent, se găsesc în tabele și în memoratoare, gata determinate, expresia momentelor de inerție în raport cu anumite axe, de regulă în raport cu axe ce trec prin centrul de greutate.

La rezolvarea problemelor este însă necesar să se determine expresia momentelor de inerție în raport cu alte axe, fie paralele cu cele indicate în memoratoarele tehnice, fie înclinate. În cele ce urmează se vor determina relațiile ce stabilesc expresiile momentelor de inerție față de un sistem de axe cînd se cunosc momentele de inerție față de alte axe.

Variația momentelor de inerție mecanice și geometrice în raport cu axe paralele obținute prin translație față de sistemul în raport cu care sînt cunoscute momentele de inerție. Formula lui Steiner. Se consideră două sisteme de referință : $Oxyz$ și $O_1x_1y_1z_1$, care au axele paralele, iar punctul O are coordonatele a, b, c față de sistemul $O_1x_1y_1z_1$ (fig. 11.3). Expresia momentului de inerție față de axele Oz și O_1z_1 este :

$$J_z = \int_{(c)} (x^2 + y^2) dm; \quad J_{z_1} = \int_{(c)} (x_1^2 + y_1^2) dm. \quad (11.13)$$

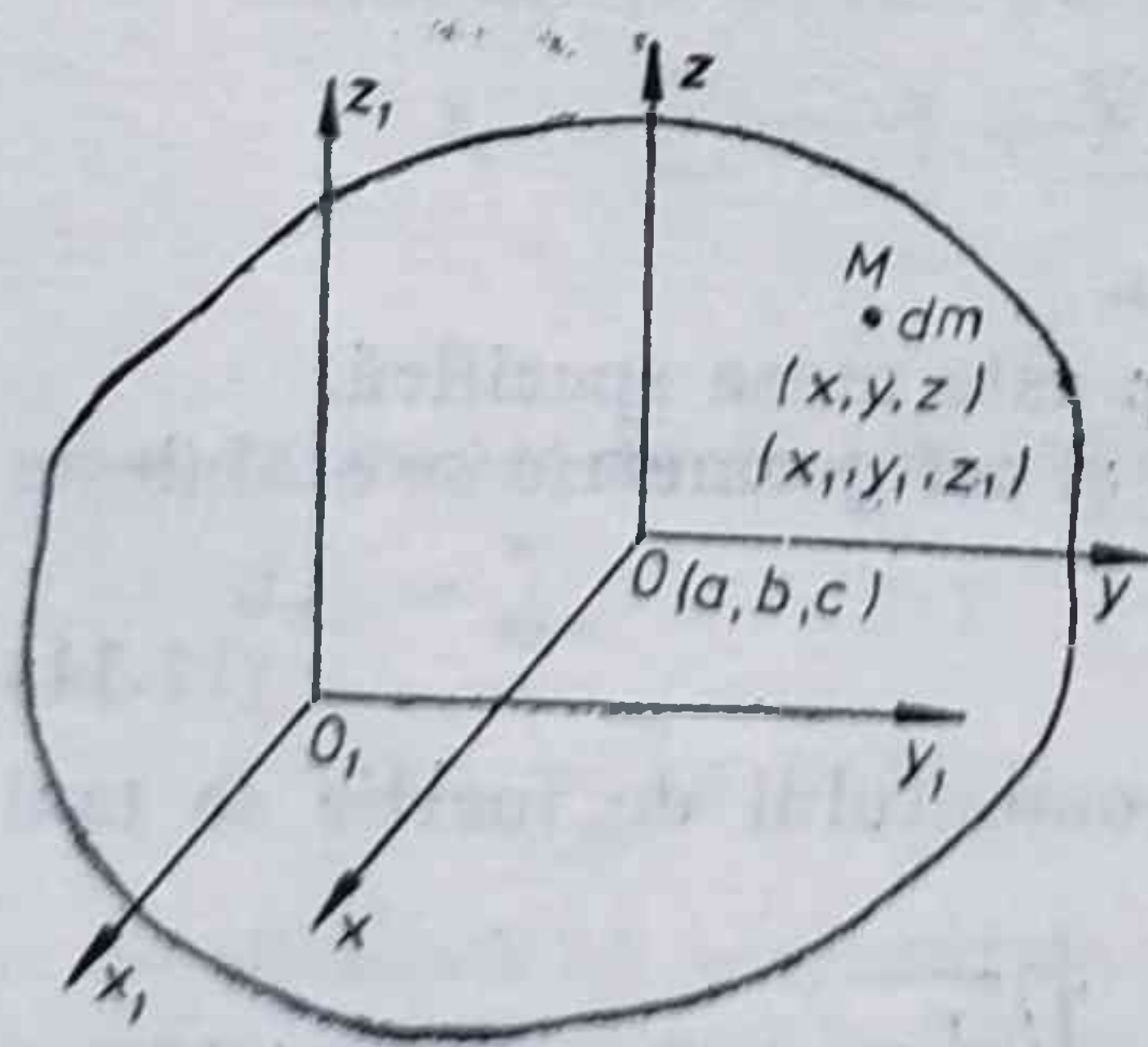


Fig. 11.3

Între aceste două expresii se poate găsi o legătură scriind relația între coordonatele punctului M în cele două sisteme :

$$x_1 = x + a; \quad y_1 = y + b.$$

Folosind această relație, se obține :

$$\begin{aligned} J_{z_1} &= \int_{(c)} (x_1^2 + y_1^2) dm = \\ &= \int_{(c)} [(x + a)^2 + (y + b)^2] dm = \\ &= \int_{(c)} (x^2 + y^2) dm + 2a \int x dm + 2b \int y dm + (a^2 + b^2) \int dm; \\ J_{z_1} &= J_z + 2a \cdot S_x + 2b \cdot S_y + d^2 \cdot M, \end{aligned} \quad (11.14, a)$$

unde : S_x și S_y sînt momentele statice mecanice ale corpului față de planele de zOx și xOy , iar $d^2 = a^2 + b^2$ este distanța dintre cele două axe Oz și O_1z_1 .

În caz că centrul de greutate se află pe axa Oz , momentele statice S_x și S_y sînt nule, deoarece avem :

$$S_x = \int x \cdot dm = M \cdot x_G \quad \text{și} \quad S_y = \int y \cdot dm = M \cdot y_G.$$

Rezultă că dacă centrul de greutate se află pe axa Oz atunci expresia momentului de inerție față de O_1z_1 devine :

$$J_{z_1} = J_z + m_0 \cdot d^2. \quad (11.14, b)$$

Această relație este cunoscută sub numele de formula lui Steiner. În mod asemănător se pot determina relațiile pentru momentele de inerție polare, centrifugale, planare etc. Astfel, în cazul secțiunilor plane, formula lui Steiner se scrie : $I_{z_1} = I_z + A \cdot d^2$, unde : A este suprafața secțiunii (aria).

$$J_{O_1} = J_O + OO_1^2 \cdot M ; J_{x_1y_1} = J_{xy} + a \cdot b \cdot M ; J_{x_1O_1y_1'} = J_{xOy} + z^2 \cdot M. \quad (11.14, c)$$

Din teorema lui Steiner rezultă cîteva proprietăți importante ale momentului de inerție, stabilite față de sisteme de axe paralele :

1) momentul de inerție este minim față de o axă ce trece prin centrul de greutate al sistemului ;

2) locul geometric al axelor paralele, față de care momentele de inerție sînt egale, este un cilindru circular a cărui axă de simetrie trece prin centrul de greutate al sistemului și este paralelă cu direcția dată.

Notînd cu i_{z_1} și i_z razele de rotație, se observă că există relațiile de forma :

$$i_{z_1}^2 = i_z^2 + d^2. \quad (11.15)$$

Variația momentelor de inerție mecanice și geometrice în raport cu o axă oarecare ce trece prin originea sistemului de referință. Se consideră un rigid C , constituit dintr-un material omogen și continuu, și un sistem de referință cartezian $Oxyz$, față de care se presupun cunoscute toate momentele de inerție ale corpului. Corpul C poate să se rotească în jurul unei axe Δ ce trece prin origine ; pentru a exprima ecuația de mișcare, este necesar să se determine momentul de inerție față de axa Δ (fig. 11.4).

Axa Δ este determinată de versorul \bar{u} caracterizat prin cosinusurile sale directe : $\bar{u} = \cos \alpha \cdot \bar{i} + \cos \beta \cdot \bar{j} + \cos \gamma \cdot \bar{k}$. Pentru simplificarea calculului se utilizează notația ;

$$l = \cos \alpha ; \quad m = \cos \beta ; \quad n = \cos \gamma. \quad (11.16, a)$$

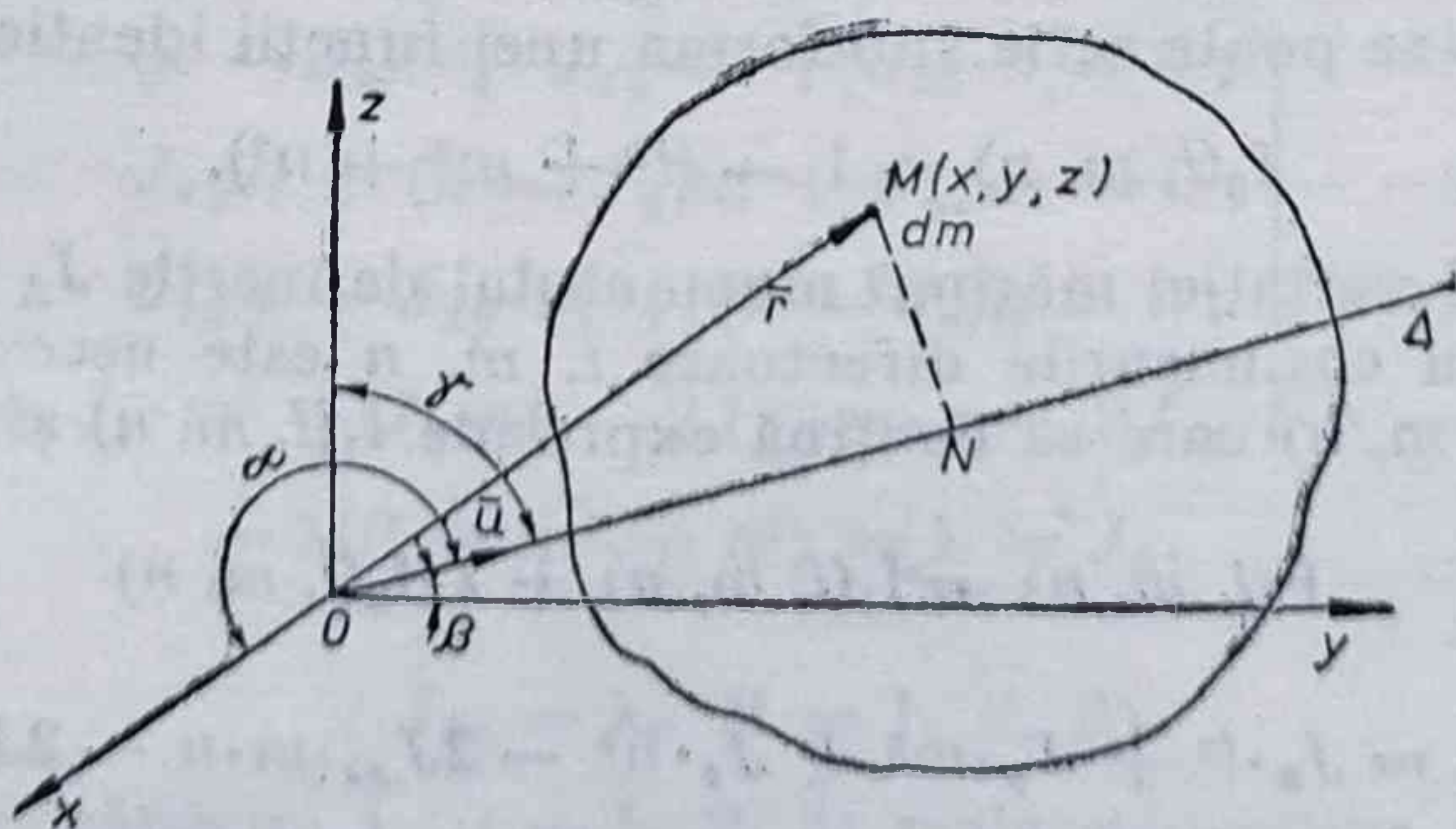


Fig. 11.4

Dacă unui punct M al corpului solid rigid C i se atribuie o masă elementară dm , momentul de inerție mecanic față de axa Δ este dat de expresia : $J_{\Delta} = \int l^2 \cdot dm$, unde : $l = MN$ este distanța de la punct la axa Δ .

Dacă vectorul de poziție al punctului M este $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$, distanța ON este proiecția vectorului de poziție pe axa Δ și are valoarea : $|ON| = \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|} = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma$.

Distanța $MN = l$ rezultă din relația :

$$MN^2 = OM^2 - ON^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma)^2$$

Deoarece : $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, relația se mai poate scrie :

$$MN^2 = l^2 = (x^2 + y^2 + z^2) (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2.$$

Expresia momentului de inerție al rigidului C în raport cu axa Δ este conform definiției :

$$\begin{aligned} J_{\Delta} = \int_C [(x^2 + y^2 + z^2) (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2] dm = \\ = \cos^2 \alpha \int_C (y^2 + z^2) dm + \cos^2 \beta \int_C (x^2 + z^2) dm + \\ + \cos^2 \gamma \int_C (x^2 + y^2) dm - 2 \cos \alpha \cos \beta \int_C x \cdot y \cdot dm - 2 \cos \alpha \cos \gamma \int_C x \cdot z \cdot dm - \\ - 2 \cos \beta \cos \gamma \int_C y \cdot z \cdot dm ; \end{aligned}$$

sau :

$$J_{\Delta} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma, \quad (11.17)$$

Mărimea momentului de inerție J_{Δ} depinde de trei parametri, variabili în funcție de poziția axei, și anume : $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$; mărimile J_x , J_y , J_z , J_{xy} , J_{xz} , J_{yz} sînt considerate cunoscute și bine determinate în raport cu sistemul de referință $Oxyz$. Notînd : $l = \cos \alpha$; $m = \cos \beta$ și $n = \cos \gamma$, funcția J_{Δ} se poate scrie sub forma :

$$f_1(l, m, n) = J_{\Delta} = J_x \cdot l^2 + J_y \cdot m^2 + J_z \cdot n^2 - 2J_{xy} \cdot lm - 2J_{yz} \cdot mn - 2J_{zx} \cdot ln. \quad (11.18)$$

Cosinusurile directoare l , m , n sînt legate între ele prin relația : $1 = l^2 + m^2 + n^2$, care se poate scrie sub forma unei funcții identice nulă :

$$f_2(l, m, n) = 1 - (l^2 + m^2 + n^2). \quad (11.19)$$

Pentru studiul variației mărimii momentului de inerție J_{Δ} față de o axă Δ , determinată prin sinusurile directoare l , m , n este necesară introducerea unei funcții $F(l, m, n)$ care să conțină expresiile $f_1(l, m, n)$ și $f_2(l, m, n)$ și este de forma :

$$F(l, m, n) = f_1(l, m, n) + \lambda \cdot f_2(l, m, n)$$

sau :

$$\begin{aligned} F(l, m, n) = J_x \cdot l^2 + J_y \cdot m^2 + J_z \cdot n^2 - 2J_{yz} \cdot m \cdot n - 2J_{zx} \cdot l \cdot n - \\ - 2J_{xy} \cdot l \cdot m + \lambda [1 - (l^2 + m^2 + n^2)], \end{aligned} \quad (11.20)$$

unde λ este o mărime scalară oarecare. Pentru a găsi valorile maxime și minime ale momentului J_{Δ} în funcție de variabilele l, m, n , se anulează derivatele parțiale ale funcției $F(l, m, n)$ în raport cu cei trei cosinusi directori și se obține un sistem de ecuații liniare omogene în raport cu l, m, n .

$$\begin{aligned} (\lambda - J_x)l + J_{xy} \cdot m + J_{zx} \cdot n &= 0; & J_{xy} \cdot l + (\lambda - J_y)m + J_{yz} \cdot n &= 0; \\ J_{zx} \cdot l + J_{yz} \cdot m + (\lambda - J_z)n &= 0. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Pentru ca sistemul să admită soluții, este necesar și suficient ca determinantul sistemului să fie nul, deci :

$$\begin{vmatrix} \lambda - J_x & J_{xy} & J_{zx} \\ J_{xy} & \lambda - J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{yz} & \lambda - J_z \end{vmatrix} = 0. \quad (11.22)$$

Din acesta se obține o ecuație de gradul al treilea în raport cu λ , de forma :

$$\lambda^3 - (J_x + J_y + J_z)\lambda^2 + (J_y \cdot J_z + J_z \cdot J_x + J_x \cdot J_y - J_{xy}^2 - J_{yz}^2 - J_{zx}^2)\lambda + J_x \cdot J_{yz}^2 + J_y \cdot J_{zx}^2 + J_z \cdot J_{xy}^2 - J_x \cdot J_y \cdot J_z + 2J_{yz} \cdot J_{zx} \cdot J_{xy} = 0. \quad (11.23)$$

Această ecuație admite trei rădăcini reale și pozitive $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$. Pentru fiecare din aceste trei valori ale parametrului λ sistemul de ecuații admite soluții diferite de zero pentru l, m, n . Se obține astfel un sistem de trei soluții $l_i, m_i, n_i (i = 1, 2, 3)$ pentru cosinusurile directoare. Fiecare din aceste soluții reprezintă poziții distincte ale axei Δ . Se obțin astfel trei axe concurente Δ_i . În raport cu două din aceste axe, momentele de inerție capătă valori extreme (maxime sau minime), iar în raport cu cea de-a treia axă se obține o valoare intermediară. Cele trei axe Δ_i constituie un triedru cartezian de referință $Oxyz$. Axele Δ_i astfel obținute poartă numele de *axe principale de inerție* corespunzătoare punctului O . Dacă punctul O este chiar centrul de masă al rigidului, atunci axele Δ_i poartă numele de *axe principale centrale*, iar momentele se vor denumi *momente principale centrale de inerție*.

Cele trei plane stabilite de câte două axe principale poartă numele de *plane principale de inerție*.

Pentru a găsi valorile momentelor de inerție principale, este necesar ca în expresia momentului J_{Δ} să se introducă valorile soluțiilor $l_i \cdot m_i \cdot n_i (i = 1, 2, 3)$. Același rezultat se poate obține din sistemul de ecuații liniare și omogene care s-a determinat, înmulțindu-le cu $-l, -m$ și $-n$, și însumînd rezultă :

$$\begin{aligned} (\lambda - J_x)l + J_{xy} \cdot m + J_{zx} \cdot n &= 0; & -l \\ J_{xy} \cdot l + (\lambda - J_y)m + J_{yz} \cdot n &= 0; & -m \\ J_{zx} \cdot l + J_{yz} \cdot m + (\lambda - J_z)n &= 0; & -n \end{aligned} \quad (11.24)$$

$$\begin{aligned} J_{\Delta} &= J_x \cdot l^2 + J_y \cdot m^2 + J_z \cdot n^2 - 2J_{yz} \cdot m \cdot n - 2J_{zx} \cdot l \cdot n - 2J_{xy} \cdot l \cdot m = \\ &= \lambda(l^2 + m^2 + n^2) = \lambda J_{\Delta}. \end{aligned}$$

Rezultă deci :

$$J_{\Delta_i} = \lambda_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Adică cele trei rădăcini $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ reale și pozitive obținute mai sus sînt tocmai valorile momentelor de inerție în raport cu cele trei axe prin-

cipale de inerție $\Delta_i (i = 1, 2, 3)$. Axele principale de inerție sînt ortogonale două cîte două. Pentru a demonstra această proprietate, să considerăm sistemul de ecuații, care este verificat de soluția :

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_1; & \alpha &= \alpha_1; & \beta &= \beta_1; & \gamma &= \gamma_1; \\ (J_x - \lambda_1) \cos \alpha_1 - J_{xy} \cos \beta_1 - J_{xz} \cos \gamma_1 &= 0; \\ -J_{xy} \cos \alpha_1 + (J_y - \lambda_1) \cos \beta_1 - J_{yz} \cos \gamma_1 &= 0; \\ -J_{xz} \cos \alpha_1 - J_{yz} \cos \beta_1 + (J_z - \lambda_1) \cos \gamma_1 &= 0;\end{aligned}$$

ecuațiile respectiv se multiplică cu $\cos \alpha_2$, $\cos \beta_2$, $\cos \gamma_2$ și apoi se adună, obținîndu-se :

$$\begin{aligned}-\lambda_1(\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2) + J_x \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 + \\ + J_y \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + J_z \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 - J_{xy}(\cos \beta_1 \cdot \cos \alpha_2 + \\ + \cos \beta_2 \cdot \cos \alpha_1) - J_{yz}(\cos \gamma_1 \cdot \cos \beta_2 + \cos \gamma_2 \cdot \cos \beta_1) - J_{xz}(\cos \alpha_1 \cdot \cos \gamma_2 + \\ + \cos \alpha_2 \cdot \cos \gamma_1) = 0.\end{aligned}$$

În mod similar, pentru soluția $\lambda = \lambda_2$; $\alpha = \alpha_2$; $\beta = \beta_2$; $\gamma = \gamma_2$, dacă se multiplică ecuațiile respectiv cu $\cos \alpha_1$, $\cos \beta_1$ și $\cos \gamma_1$, și se adună, se obține :

$$\begin{aligned}-\lambda_2(\cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1 + \cos \beta_2 \cdot \cos \beta_1 + \cos \gamma_2 \cdot \cos \gamma_1) + J_x \cdot \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1 + \\ + J_y \cdot \cos \beta_2 \cdot \cos \beta_1 + J_z \cdot \cos \gamma_2 \cdot \cos \gamma_1 - J_{xy}(\cos \beta_2 \cdot \cos \alpha_1 + \\ \cos \beta_1 \cdot \cos \alpha_2) - J_{yz}(\cos \gamma_2 \cdot \cos \beta_1 + \cos \gamma_1 \cdot \cos \beta_2) - J_{xz}(\cos \alpha_2 \cdot \cos \gamma_1 + \\ + \cos \alpha_1 \cdot \cos \gamma_2) = 0.\end{aligned}$$

Scăzînd între ele aceste relații, se obține :

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2) = 0.$$

Presupunînd $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se poate scrie :

$$\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 = 0;$$

și deoarece :

$$\bar{u}_1 = \cos \alpha_1 \cdot \bar{i} + \cos \beta_1 \cdot \bar{j} + \cos \gamma_1 \cdot \bar{k}$$

$$\bar{u}_2 = \cos \alpha_2 \cdot \bar{i} + \cos \beta_2 \cdot \bar{j} + \cos \gamma_2 \cdot \bar{k}$$

sînt versorii axelor principale Δ_1 și Δ_2 , rezultă că acestea sînt ortogonale.

Pentru a determina parametrii directori ai axelor Δ_1 , Δ_2 și Δ_3 , se va considera determinantul :

$$\begin{vmatrix} J_x - \lambda & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y - \lambda & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

În care se va înlocui λ_i cu J_1 , respectiv J_2 sau J_3 . Minorii acestui determinant sînt tocmai parametrii directori ai axelor Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 . Se obține astfel :

— pentru axa (Δ_1) :

$$\begin{vmatrix} J_y - J_1 & -J_{yz} \\ -J_{zy} & J_z - J_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -J_{yz} & -J_{yx} \\ J_z - J_1 & -J_{zx} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -J_{yx} & J_y - J_1 \\ -J_{zx} & -J_{zy} \end{vmatrix}$$

— pentru axa (Δ_2):

$$\begin{vmatrix} J_y - J_2 & -J_{yz} \\ -J_{zy} & J_z - J_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -J_{yz} & -J_{yx} \\ J_z - J_2 & -J_{zx} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -J_{yx} & J_y - J_2 \\ -J_{xz} & -J_{zy} \end{vmatrix}$$

— pentru axa (Δ_3):

$$\begin{vmatrix} J_y - J_3 & -J_{yz} \\ -J_{zy} & J_z - J_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -J_{yz} & -J_{yx} \\ J_z - J_3 & -J_{zx} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -J_{yx} & J_y - J_3 \\ -J_{xz} & -J_{zy} \end{vmatrix}$$

Dacă sistemul de puncte materiale este situat într-un plan ne aflăm în cazul plăcilor. Să considerăm că sistemul se află în planul Oxy și deci: $z_i = 0$.

$$J_x = \sum m_i \cdot y_i^2; \quad J_y = \sum m_i \cdot x_i^2; \quad J_z = \sum m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) = J_0 = J_x + J_y;$$

$$J_{xy} = \sum m_i \cdot x_i \cdot y_i; \quad J_{xz} = 0; \quad J_{yz} = 0;$$

folosind aceste simplificări, se obține ecuația:

$$\begin{vmatrix} J_x - \lambda & -J_{xy} & 0 \\ -J_{yx} & J_y - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & J_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

și rezultă:

$$(J_0 - \lambda)[\lambda^2 - (J_x + J_y)\lambda + J_x \cdot J_y - J_{xy}^2] = 0,$$

care are rădăcinile:

$$\lambda_{1,2} = J_{I,II} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2},$$

(11.25)

$$\lambda_3 = J_c = J_{III}.$$

Direcțiile principale vor fi redată de parametrii directori ai axelor Δ_1 și Δ_2 ; ținând seama că $J_{xz} = J_{yz} = 0$ rezultă:

— pentru axa Δ_1 :

$$\begin{vmatrix} J_y - J_1 & 0 \\ 0 & J_z - J_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -J_{yx} \\ J_z - J_1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -J_{yx} & J_y - J_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix};$$

sau:

$$(J_y - J_1)(J_z - J_1); \quad J_{yx}(J_z - J_1); \quad 0.$$

— pentru axa Δ_2 vor rezulta parametrii:

$$(J_y - J_2)(J_z - J_2); \quad J_{yx}(J_z - J_2); \quad 0.$$

Direcțiile celor două axe principale se pot exprima și sub forma:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_{yx}}{J_y - J_1} \text{ pentru axa } \Delta_1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{J_{yx}}{J_y - J_2} \text{ pentru axa } \Delta_2. \quad (11.26)$$

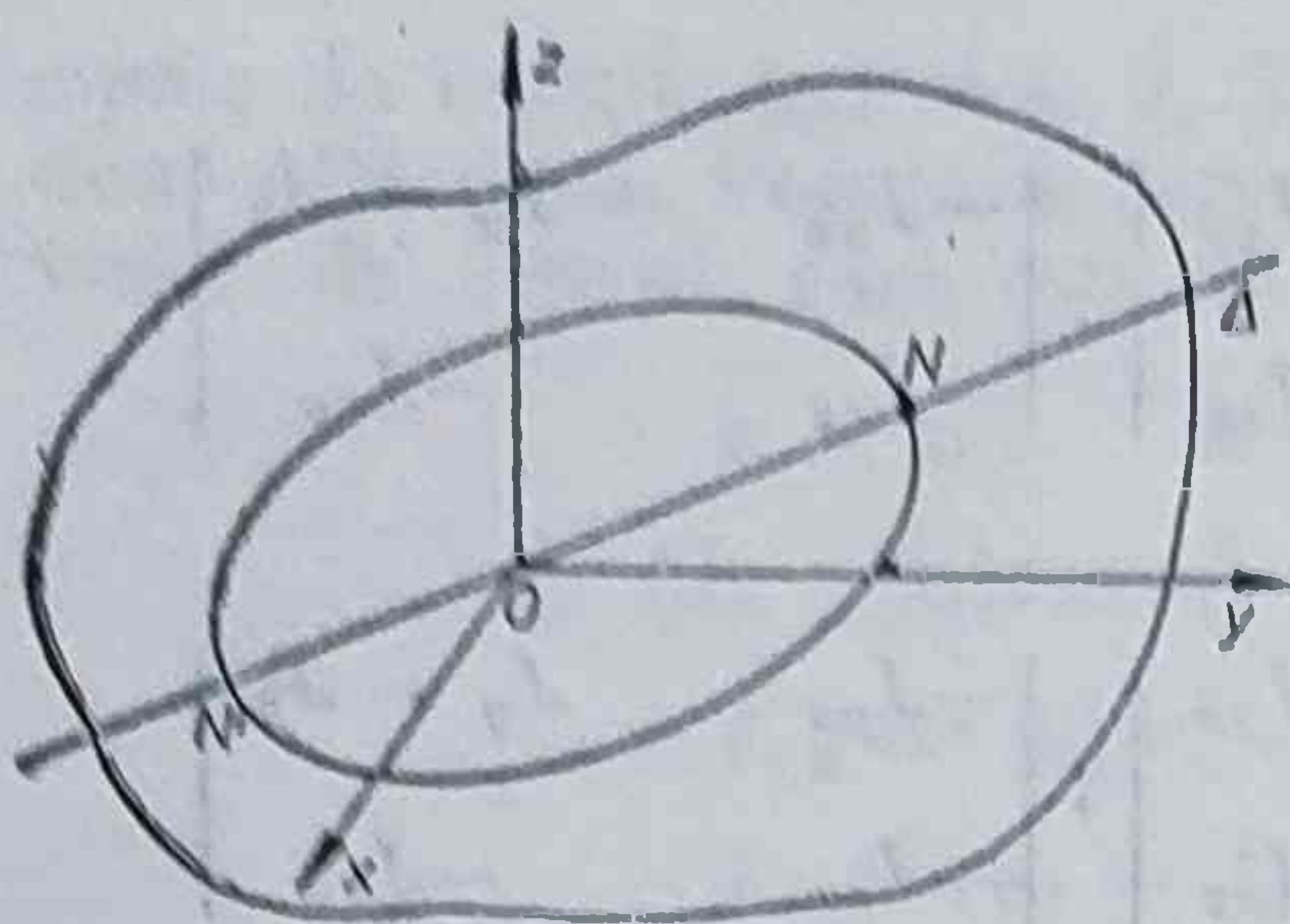


Fig. 11.5

Elipsoidul de inerție. Se consideră un corp rigid C , un sistem de referință $Oxyz$ (fig. 11.5) și o axă oarecare Δ ce trece prin O .

Mărimea momentului de inerție în raport cu axa Δ este dependentă de valorile cosinusurilor directe ale dreptei: $l = \cos \alpha$; $m = \cos \beta$ și $n = \cos \gamma$, care variază odată cu schimbarea poziției dreptei.

Expresia momentului de inerție față de axa Δ este:

$$J_{\Delta} = J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \cos^2 \beta + J_z \cdot \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - 2J_{xz} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma - 2J_{yz} \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

În această relație J_x , J_y , J_z , J_{xy} , J_{xz} , J_{yz} sînt cunoscute, iar cosinusurile directe sînt variabile. Se plasează pe axa Δ un punct N astfel ca distanța sa pînă la originea O a sistemului de referință să fie dată de relația:

$$ON = \frac{k}{\sqrt{J_{\Delta}}}. \quad (11.27, a)$$

Coordonatele punctului N față de reperul de referință cartezian $Oxyz$ au expresiile:

$$x = \frac{k}{\sqrt{J_{\Delta}}} \cos \alpha; \quad y = \frac{k}{\sqrt{J_{\Delta}}} \cos \beta; \quad z = \frac{k}{\sqrt{J_{\Delta}}} \cos \gamma,$$

de unde se obține:

$$\cos \alpha = \frac{x \sqrt{J_{\Delta}}}{k}; \quad \cos \beta = \frac{y \sqrt{J_{\Delta}}}{k}; \quad \cos \gamma = \frac{z \sqrt{J_{\Delta}}}{k}. \quad (11.27, b)$$

Introducînd aceste valori în expresia momentului de inerție față de axa Δ se obține:

$$J_x \cdot x^2 + J_y \cdot y^2 + J_z \cdot z^2 - 2J_{yz} \cdot y \cdot z - 2J_{xy} \cdot x \cdot y - 2J_{xz} \cdot x \cdot z = k^2. \quad (11.28)$$

Această relație reprezintă ecuația suprafeței pe care se plasează punctele N și simetricele lor N' în raport cu originea O și este un elipsoid ce are centrul de simetrie în O și poartă numele de *elipsoid de inerție*. Elipsoidul de inerție constituie o reprezentare geometrică a legii de variație a momentelor de inerție în funcție de variația axei.

Dacă se alege un sistem de referință ce are originea în centrul maselor C se va determina în mod asemănător un elipsoid ce va purta numele de *elipsoid central de inerție*. În acest caz, expresia J_{Δ} devine:

$$J_{\Delta} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma$$

și se obține:

$$J_x \cdot X^2 + J_y \cdot Y^2 + J_z \cdot Z^2 = k^2. \quad (11.29)$$

În raport cu axa Δ_1 paralelă cu Δ și plasată la distanța d , expresia momentului de inerție J_{Δ_1} devine:

$$J_{\Delta_1} = J_{\Delta} + M \cdot d^2 = J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \cos^2 \beta + J_z \cdot \cos^2 \gamma + M \cdot d^2.$$

Expresia elipsoidului central de inerție devine:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1, \quad (11.30)$$

unde s-a notat:

$$a^2 = \frac{k^2}{J_x}; \quad b^2 = \frac{k^2}{J_y}; \quad c^2 = \frac{k^2}{J_z},$$

a , b și c fiind semiaxele elipsoidului.

În cazul unei plăci plane, expresia momentului de inerție în raport cu o axă (Δ) înclinată ce trece prin O originea sistemului Oxy , are forma :

$$J_{\Delta} = J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \sin^2 \alpha - 2J_{xy} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Expresia elipsei de inerție va fi de forma :

$$J_x \cdot x^2 + J_y \cdot y^2 - 2J_{xy} \cdot xy = k^2,$$

dar scrisă în raport cu axele principale de inerție, capătă forma :

$$J_1 \cdot X^2 + J_2 \cdot Y^2 = C^2 \quad \text{sau :} \quad \frac{X^2}{l_2^2} + \frac{Y^2}{l_1^2} = 1;$$

pentru a realiza această transformare s-au ales : $C = l_1 \cdot l_2 \cdot \sqrt{M}$; $J_1 = M \cdot l_1^2$; $J_2 = M \cdot l_2^2$.

Elipsa de inerție constituie o reprezentare geometrică a legii de variație a momentului de inerție în funcție de poziția axei Δ ce trece prin O ; distanța de la originea O la punctul de intersecție al dreptei Δ cu elipsa este mărimea momentului de inerție în raport cu axa, reprezentat la scară.

În anexa II sînt date expresiile momentelor de inerție pentru diferite corpuri ce se întîlnesc curent.

12.

IMPULSUL (CANTITATEA DE MIȘCARE), MOMENTUL CINETIC, ENERGIA CINETICĂ ȘI LUCRUL MECANIC ÎN CAZUL UNUI SISTEM DE PUNCTE MATERIALE SAU DE CORPURI

Pentru utilizarea teoremelor generale ale dinamicii în cazul sistemelor de puncte materiale sau de corpuri, este necesar să se cunoască modul de determinare al mărimilor fundamentale (impulsul, momentul cinetic, energia cinetică și lucrul mecanic).

12.1. IMPULSUL

Se consideră un sistem de puncte materiale A_i ce au masa m_i și viteza \vec{v}_i și vectorul de poziție \vec{r}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) (fig. 12.1).

Pentru întregul sistem de puncte, cantitatea de mișcare este :

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \sum_{i=1}^n \vec{H}_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{v}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \cdot \vec{r}_i) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Expresia $\sum m_i \cdot \vec{r}_i = M \cdot \vec{r}_c$ este tocmai momentul static al sistemului ;

$$\vec{H} = \frac{d}{dt} (M \cdot \vec{r}_c) = M \cdot \vec{v}_c, \quad (12.2)$$

unde \vec{r}_c este vectorul de poziție al centrului de masă al sistemului, iar \vec{v}_c este viteza centrului de masă.

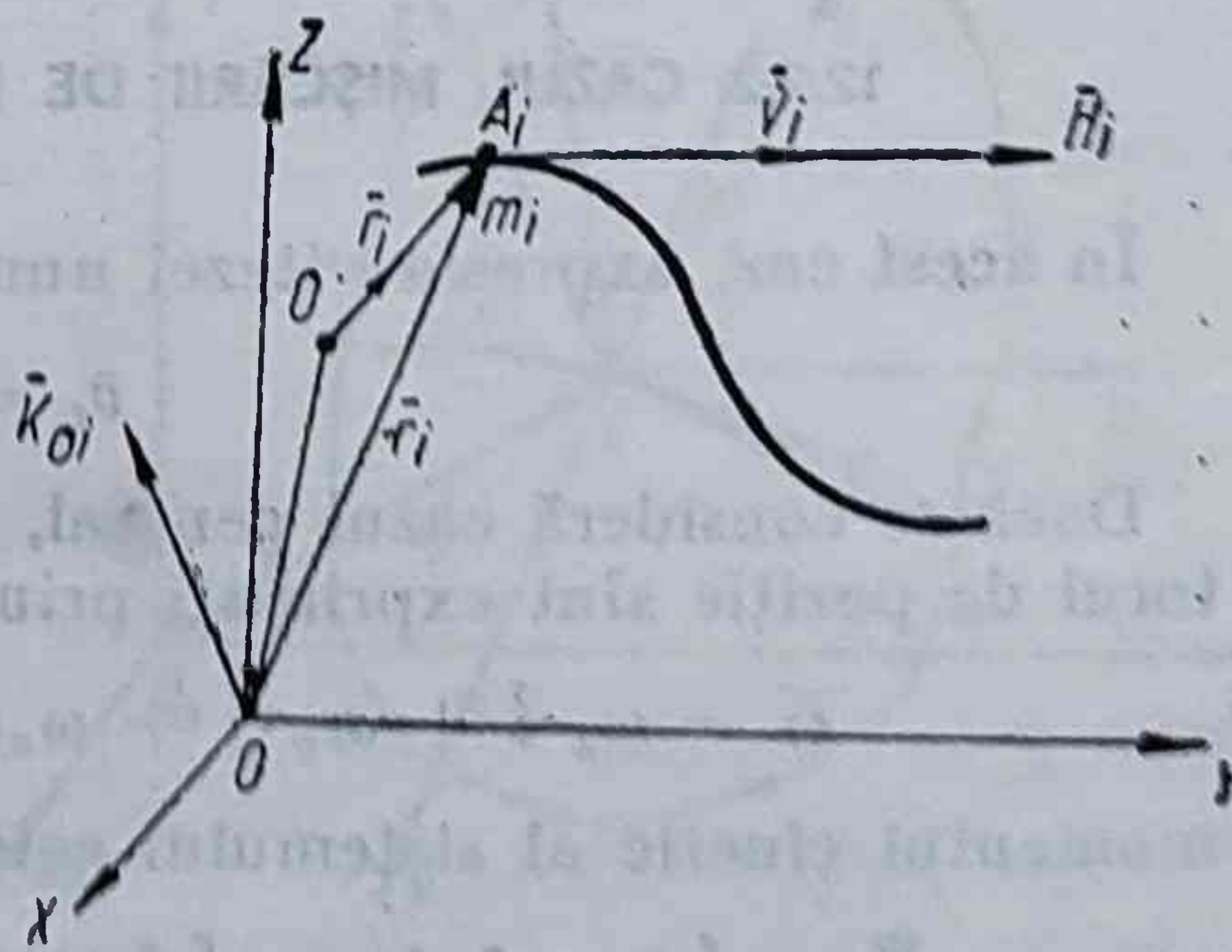


Fig. 12.1

Impulsul instantaneu sau cantitatea de mișcare a unui sistem de puncte materiale este egal cu masa întregului sistem înmulțită cu viteza centrului de masă al sistemului, ca și cum s-ar concentra toată masa sistemului într-un punct în centrul de masă și s-ar calcula impulsul punctului astfel obținut.

Impulsul este o mărime vectorială ce are direcția și sensul vitezei centrului de masă a sistemului.

12.2. MOMENTUL CINETIC

Se consideră un sistem de puncte materiale A_i ce au masa m_i , viteza \vec{v}_i și vectorul de poziție \vec{r}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) (v. fig. 12.1).

Pentru întregul sistem de puncte materiale, expresia momentului cinetic în raport cu originea O este :

$$\vec{K}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{K}_{0i} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{v}_i. \quad (12.3)$$

Spre deosebire de impulsul sistemului, momentul cinetic depinde de felul mișcării sistemului de puncte materiale (translație, rotație în jurul unei axe fixe, mișcare compusă elicoidală, plan paralelă etc.).

12.2.1. CAZUL MIȘCĂRII DE TRANSLAȚIE

Această mișcare se caracterizează prin faptul că vectorii viteză și accelerație sînt vectori liberi. Ca o observație în plus se poate spune că toate punctele sistemului au aceeași viteză și accelerație ca și centrul de masă al sistemului, adică :

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 = \vec{v}_c. \quad (12.4)$$

Momentul cinetic al sistemului este deci :

$$\vec{K}_0 = \int \vec{r} \times \vec{v} \cdot dm = \int (\vec{r} dm) \times \vec{v}_c = M \cdot \vec{r}_c \times \vec{v}_c = \vec{r}_c \times M \cdot \vec{v}_c.$$

Deci :

$$\vec{K}_0 = \vec{r}_c \times M \cdot \vec{v}_c = \vec{r}_c \times \vec{H}. \quad (12.5)$$

Rezultă că în cazul mișcării de translație a unui sistem de puncte materiale sau al unui rigid momentul cinetic se determină considerînd că toată masa sistemului este concentrată într-un punct în centrul de masă al sistemului și s-ar calcula momentul cinetic al punctului astfel obținut.

12.2.2. CAZUL MIȘCĂRII DE ROTAȚIE ÎN JURUL UNEI AXE FIXE

În acest caz, expresia vitezei unui punct A_i oarecare este :

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i.$$

Dacă se consideră cazul general, în care vectorul viteză unghiulară și vectorul de poziție sînt exprimați prin :

$$\vec{\omega} = \omega_x \cdot \vec{i} + \omega_y \cdot \vec{j} + \omega_z \cdot \vec{k}; \quad \vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k},$$

momentul cinetic al sistemului este dat de relația :

$$\vec{K}_0 = \int_D \vec{r} \times \vec{v} \cdot dm = \int_D \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \int_D [r^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}] dm.$$

Efectuînd calculele, rezultă :

$$\begin{aligned}\bar{K}_0 = & (J_x \cdot \omega_x - J_{xy} \cdot \omega_y - J_{xz} \cdot \omega_z) \bar{i} + (J_y \cdot \omega_y - J_{yz} \cdot \omega_z - J_{yx} \cdot \omega_x) \bar{j} + \\ & + (J_z \cdot \omega_z - J_{zx} \cdot \omega_x - J_{zy} \cdot \omega_y) \bar{k}.\end{aligned}\quad (12.6)$$

Această relație capătă o formă mai simplă în anumite cazuri particulare, și anume :

a) axa de rotație este chiar axa Oz , adică $\omega_x = \omega_y = 0$ și $\omega_z = \omega$, expresia momentului cinetic devine :

$$\bar{K}_0 = -J_{xz} \cdot \omega \cdot \bar{i} - J_{yz} \cdot \omega \cdot \bar{j} + J_z \cdot \omega \cdot \bar{k}; \quad (12.7)$$

b) corpul are o formă de revoluție, axa de simetrie fiind chiar axa de rotație ; în acest caz avem :

$$\omega_x = \omega_y = 0; \quad \omega_z = \omega; \quad J_{yz} = J_{zx} = 0$$

și expresia momentului cinetic devine :

$$\bar{K}_0 = J_z \cdot \bar{\omega}. \quad (12.8)$$

12.2.3. CAZUL MIȘCĂRII GENERALE

Se consideră un sistem de puncte materiale sau un corp solid rigid care are o mișcare de translație \bar{v}_c și o mișcare de rotație în jurul unei axe ce trece prin centrul de masă al sistemului (fig. 12.2). (Axele x, y, z , sînt paralele cu x_1, y_1, z_1).

Expresia momentului cinetic în raport cu un sistem de referințe fix $O_{x_1 y_1 z_1}$ este :

$$\begin{aligned}\bar{K}_{0_1} = & \sum (\bar{r}_c + \bar{\rho}_i) \times m_i (\bar{v}_c + \dot{\bar{\rho}}_i) = \sum \bar{r}_c \times m_i \cdot \bar{v}_c + \sum \bar{r}_c \times m_i \cdot \dot{\bar{\rho}}_i + \\ & + \sum \bar{\rho}_i \times m_i \cdot \bar{v}_c + \sum \bar{\rho}_i \times m_i \cdot \dot{\bar{\rho}}_i,\end{aligned}\quad (12.9)$$

unde s-a notat cu :

\bar{r}_c — vectorul de poziție al centrului de masă în raport cu sistemul de referință fix ;

\bar{v}_c — viteza centrului de masă față de sistemul de referință fix ;

$\bar{\rho}_i$ — vectorul de poziție al punctului A_i în raport cu sistemul de referință mobil ce are originea în C centrul de masă al sistemului ;

$\dot{\bar{\rho}}_i$ — viteza relativă a punctului A_i față de centrul de masă.

Observînd că :

$$\sum m_i \cdot \bar{\rho}_i = 0 \quad \text{și} \quad m_i \cdot \dot{\bar{\rho}}_i = 0,$$

deoarece centrul de masă coincide cu originea sistemului de referință (așa a fost ales) ; expresia momentului cinetic devine :

$$\bar{K}_{0_1} = \bar{r}_c \times M \cdot \bar{v}_c + \bar{K}_c, \quad (12.10)$$

unde : $\bar{K}_c = \sum \bar{\rho}_i \times m_i \cdot \bar{v}_c$ este momentul cinetic al sistemului în raport cu centrul său de masă care constituie un reper mobil. Această relație este cunoscută sub numele de prima *teoremă a lui Koenig* (a doua se referă la calculul energiei cinetice).

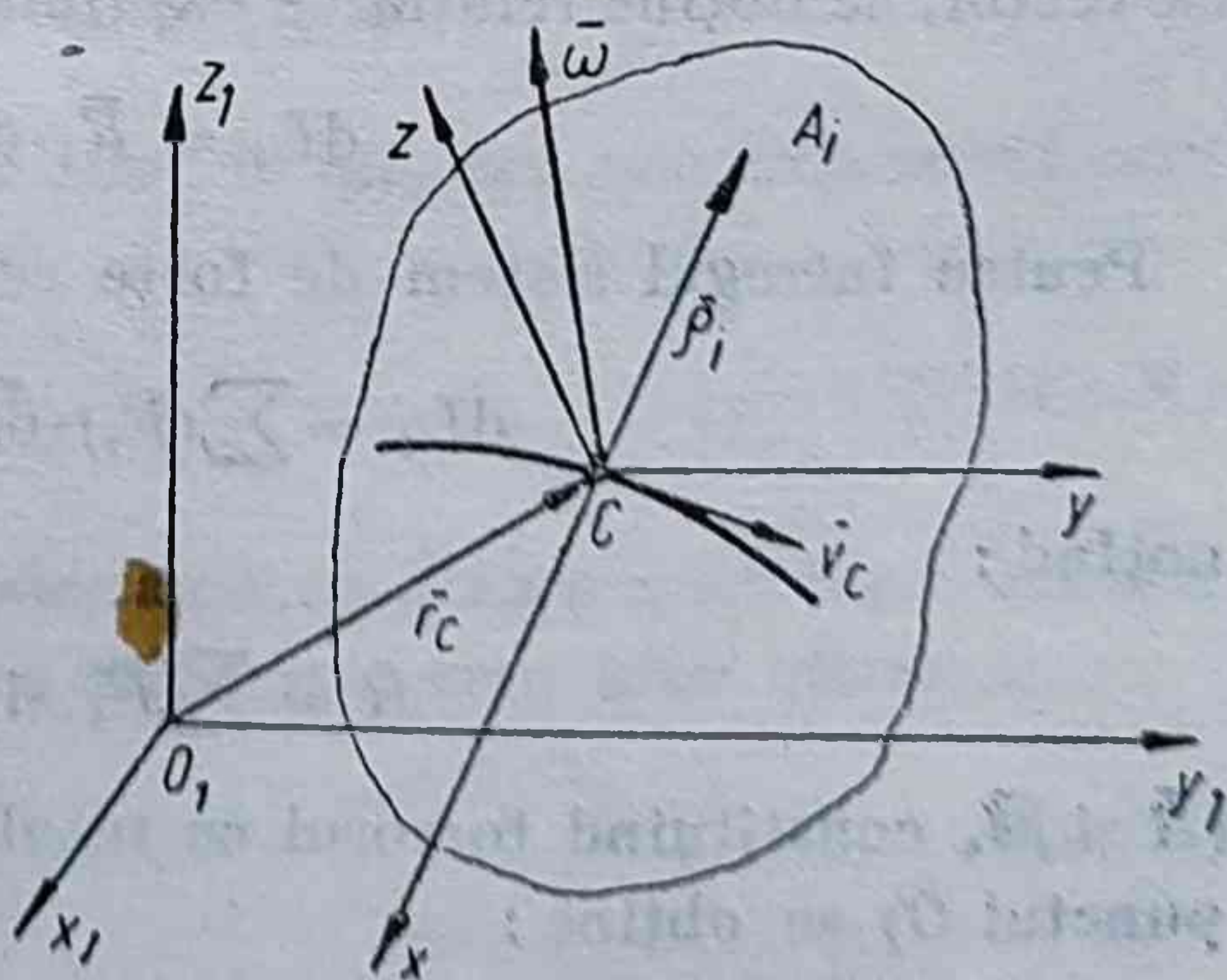


Fig. 12.2

12.3. LUCRUL MECANIC

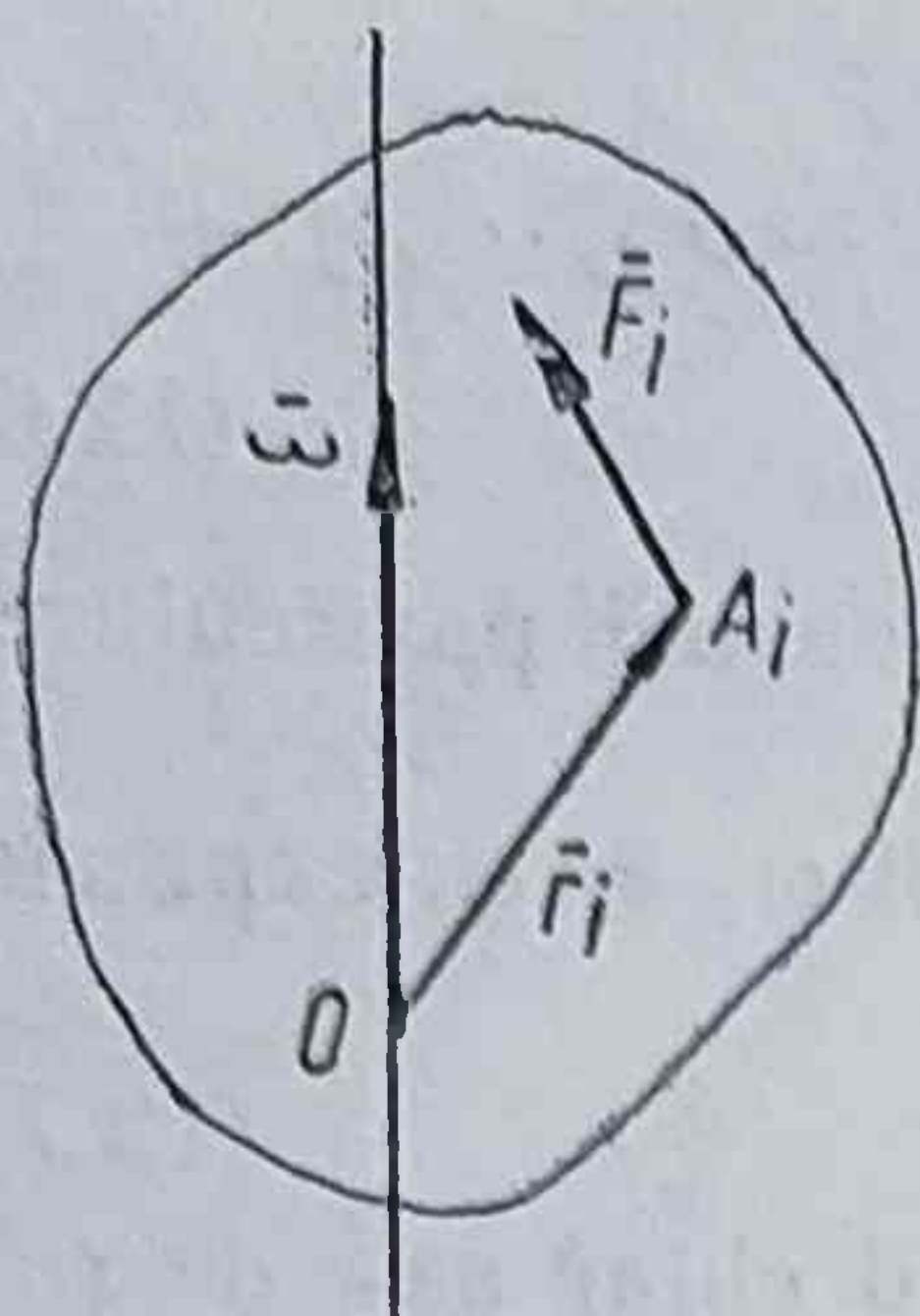


Fig. 12.3

12.3.1. LUCRUL MECANIC ELEMENTAR AL UNUI SISTEM DE FORȚE CE ACȚIONEAZĂ ASUPRA UNUI CORP SOLID RIGID

Se consideră un corp solid rigid (fig. 12.3) supus acțiunii unui sistem de forțe. În raport cu un reper O legat de corpul rigid, poziția unui punct A_i este dată de vectorul de poziție \vec{r}_i . Se consideră că în punctul A_i acționează o forță \vec{F}_i care produce deplasarea corpului astfel că în timpul elementar dt punctul A_i se deplasează cu distanța elementară :

$$d\vec{r}_i = \vec{v}_i \cdot dt, \quad (12.11)$$

viteza \vec{v}_i fiind la rândul ei exprimată prin relația :

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i, \quad (12.12)$$

unde \vec{v}_0 este viteza de translație a solidului, iar $\vec{\omega}$ este viteza unghiulară de rotație în jurul unei axe Δ ce trece prin punctul O . Rezultă că deplasarea elementară este :

$$d\vec{r}_i = \vec{v}_0 dt + (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) dt.$$

Expresia lucrului mecanic elementar corespunzător este :

$$dL_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_0 dt + \vec{F}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) dt. \quad (12.13)$$

Observînd că :

$$\vec{F}_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \cdot \vec{\omega},$$

se poate scrie :

$$dL_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_0 dt + (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \cdot \vec{\omega} dt.$$

Dacă se notează : $d\vec{r}_0 = \vec{v}_0 \cdot dt$ — deplasarea elementară ce rezultă din mișcarea de translație și cu $d\vec{\theta} = \vec{\omega} \cdot dt$, unghiul elementar de rotație exprimat ca vector, se obține relația ce exprimă lucrul mecanic corespunzător forței \vec{F}_i :

$$dL_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_0 + \vec{M}_{i0} \cdot d\vec{\theta}. \quad (12.14)$$

Pentru întregul sistem de forțe ce acționează asupra rigidului se obține :

$$dL_i = \sum (\vec{F}_i) \cdot d\vec{r}_0 + (\sum \vec{M}_{i0}) \cdot d\vec{\theta}, \quad (12.15a)$$

notînd :

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i \text{ și } \vec{M}_0 = \sum \vec{M}_{i0}$$

(\vec{R} și \vec{M}_0 constituind torsorul ce rezultă din reducerea sistemului în raport cu punctul O) se obține :

$$dL_i = \vec{R} \cdot d\vec{r}_0 + \vec{M}_0 \cdot d\vec{\theta}. \quad (12.15, b)$$

12.3.2. PUTEREA

Prin definiție, prin puterea unui sistem care acționează și pune în mișcare un sistem de puncte sau un corp se înțelege lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp ; este exprimată prin relația :

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\bar{F} \cdot d\bar{r}}{dt} + \frac{\bar{M}_0 d\bar{\theta}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v} + \bar{M} \cdot \bar{\omega}. \quad (12.16)$$

12.3.3. RANDAMENTUL MECANIC

Într-o mașină, forțele motoare produc lucru mecanic motor L_m , forțele rezistente produc lucru mecanic util L_u — în scopul pentru care a fost construită mașina — și lucrul mecanic pasiv L_p — folosit pentru înfrângerea frecărilor.

Deci :

$$L_m = L_u + L_p. \quad (12.17)$$

Se definește ca randament mecanic, notat cu η , raportul

$$\eta = \frac{L_u}{L_m}, \quad (12.18)$$

care este o mărime adimensională, ce ne dă o indicație asupra felului cum folosește mașina lucru mecanic motor.

Știind că :

$$L_u = L_m - L_p, \quad (12.19)$$

rezultă

$$\eta = 1 - \frac{L_p}{L_m} = 1 - \varphi, \quad (12.20)$$

în care $\varphi = \frac{L_p}{L_m}$ este coeficientul de pierdere. Se constată că $\eta < 1$.

12.4. ENERGIA CINETICĂ

Energia cinetică a unui punct material aflat în mișcare este exprimată prin relația :

$$E = \frac{1}{2} m \cdot v^2. \quad (12.21)$$

În cazul unui sistem de puncte materiale sau a unui corp solid rigid, energia cinetică este egală cu suma energiilor cinetice ale punctelor sistemului :

$$E = \sum \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2. \quad (12.22)$$

Expresia energiei cinetice depinde de felul mișcării sistemului de puncte.

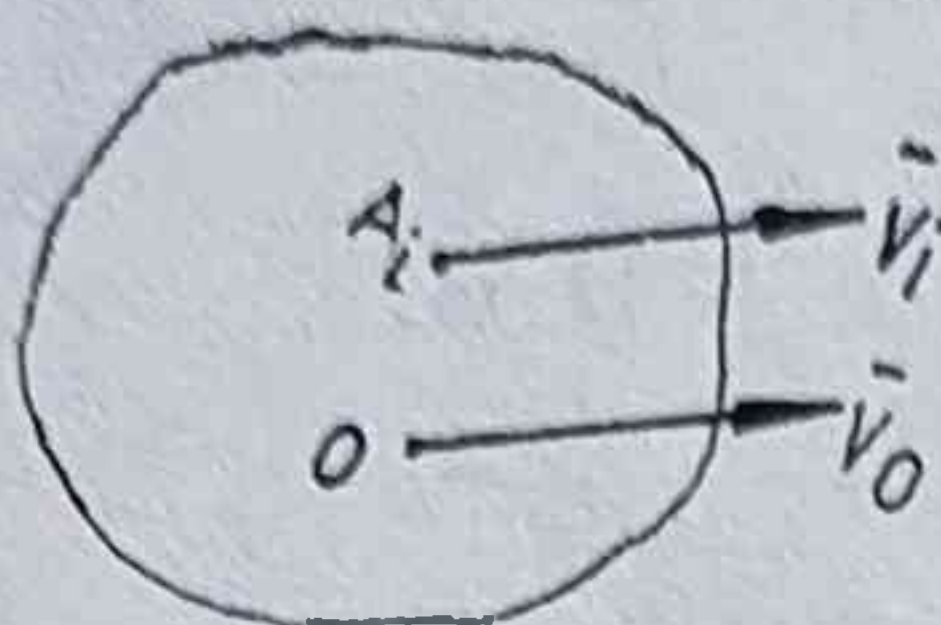


Fig. 12.4

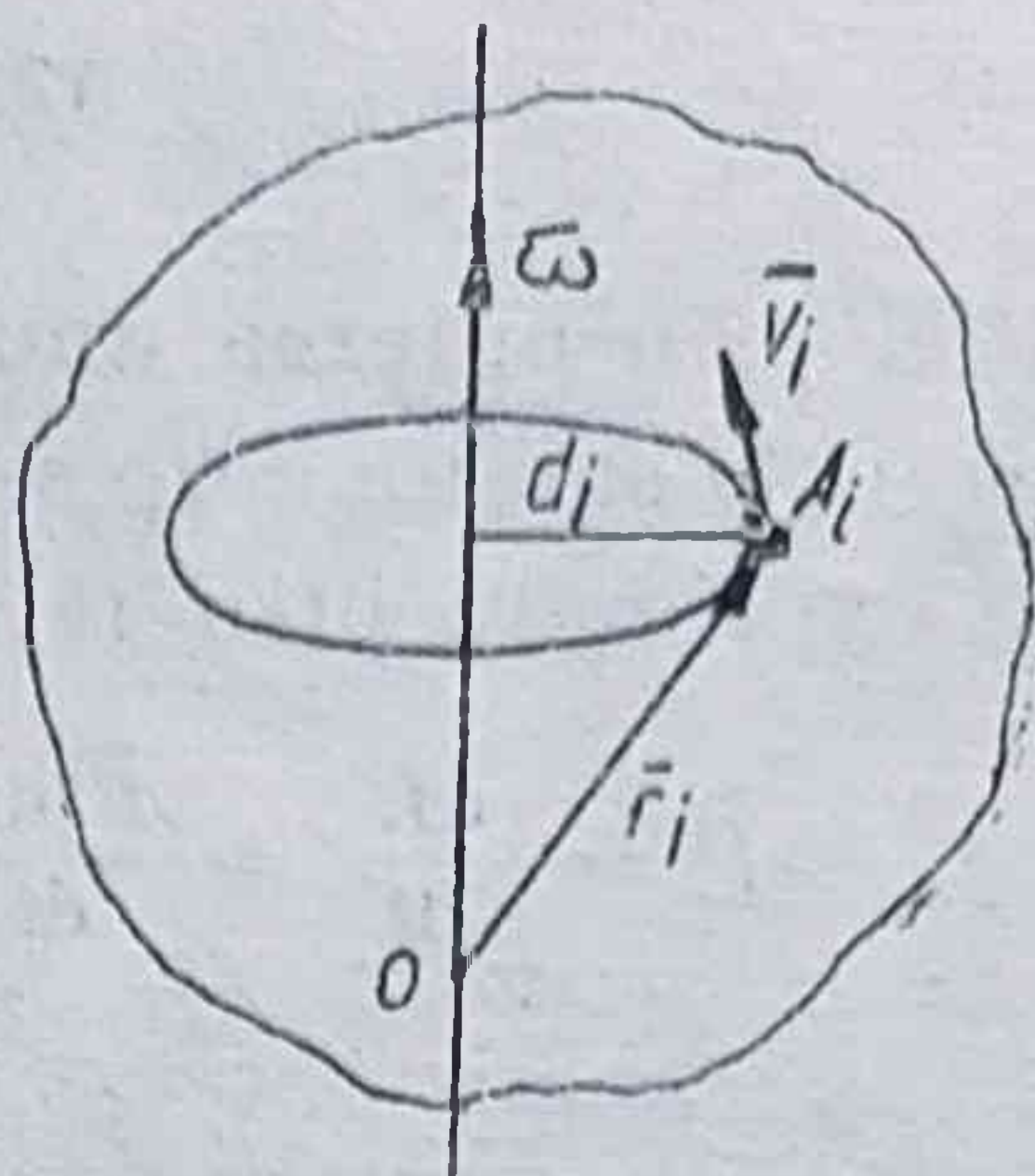


Fig. 12.5

12.4.1. CAZUL MIȘCĂRII DE TRANSLAȚIE

În acest caz (fig. 12.4) : $\bar{v}_i = \bar{v}_0 = \bar{v}_c$, toate punctele au aceeași viteză ca mărime, direcție și sens. Ca atare, expresia energiei cinetice este :

$$E = \sum \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \cdot v_0^2 = \frac{v_0^2}{2} \sum m_i = M \frac{v_0^2}{2} \quad (12.23)$$

Deci :

$$E = \frac{1}{2} M \cdot v_0^2.$$

12.4.2. CAZUL MIȘCĂRII DE ROTAȚIE ÎN JURUL UNEI AXE FIXE

Ținînd seama că viteza unui punct oarecare (fig. 12.5) este :

$$\bar{v}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i,$$

expresia energiei cinetice a sistemului va fi :

$$E = \frac{1}{2} \sum m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (\bar{\omega} \times \bar{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \cdot \omega^2 r_i^2 \sin^2 \alpha,$$

sau :

$$E = \frac{1}{2} \sum m_i \cdot \omega^2 \cdot d_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot J_{\Delta}, \quad (12.24)$$

unde s-a notat :

$$d_i = |\bar{r}_i| \sin \alpha, \text{ și } J_{\Delta} = \sum m_i \cdot d_i^2$$

reprezentînd momentul de inerție al sistemului de puncte materiale față de axă.

12.4.3. CAZUL MIȘCĂRII GENERALE

Considerînd un sistem de referință fix $O_1 x_1 y_1 z_1$ cu originea în O_1 și unul mobil $Oxyz$ cu originea în centrul de masă C al sistemului de puncte materiale sau al corpului solid rigid dar cu axele paralele cu cele fixe

(fig. 12.6), expresia energiei cinetice este dată de relația :

$$E = \frac{1}{2} \sum m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (\bar{v}_c + \dot{\bar{r}}_i)^2 = \\ = \frac{v_c^2}{2} \sum m_i + \bar{v}_c \cdot \sum m_i \cdot \dot{\bar{r}}_i + \frac{1}{2} \sum m_i \cdot \dot{\bar{r}}_i^2.$$

Rezultă :

$$E_c = \frac{1}{2} M \cdot v_c^2 + E_c,$$

unde :

$$E_c = \frac{1}{2} \sum m_i \cdot \dot{\bar{r}}_i^2, \quad (12.24)$$

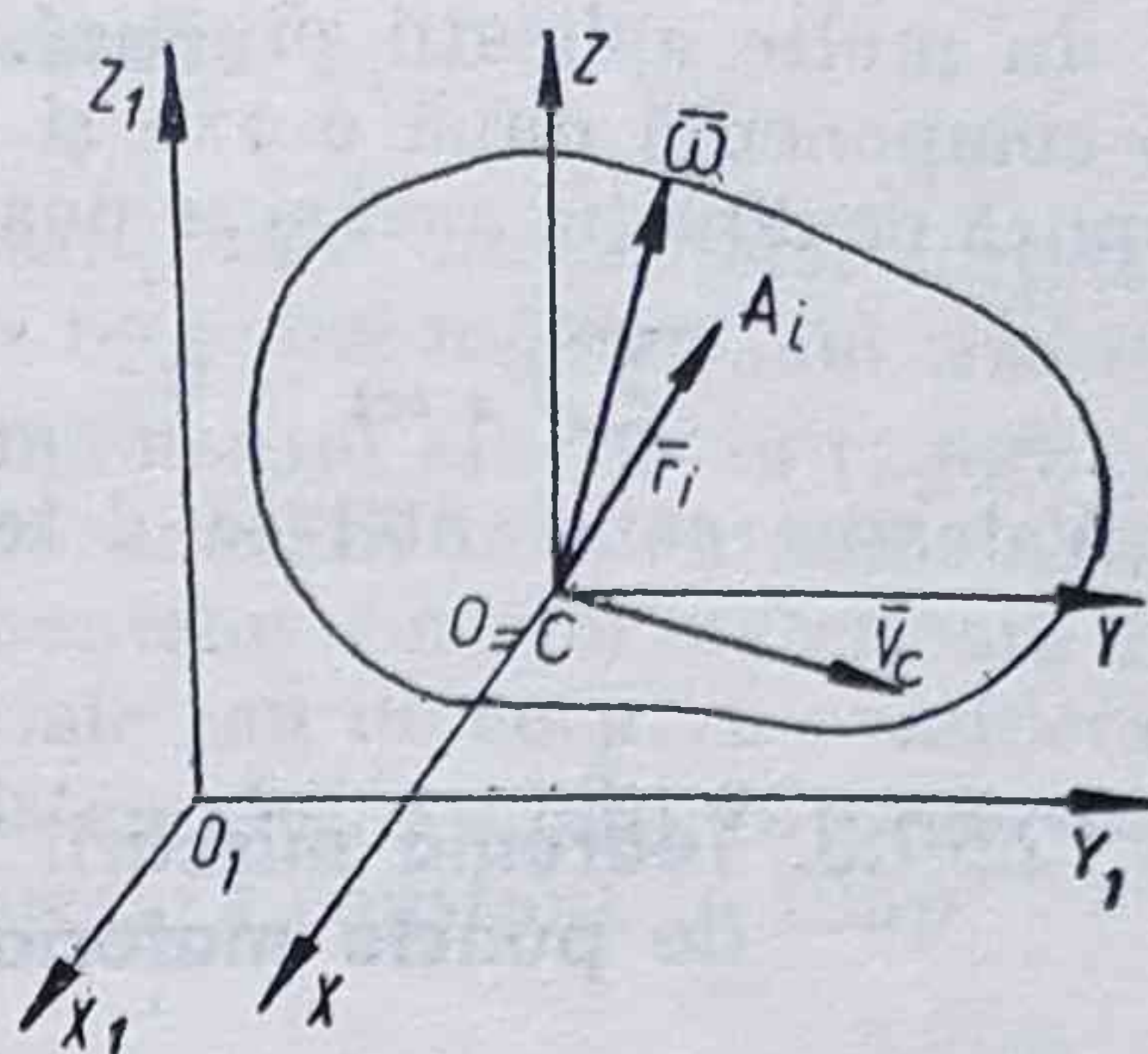


Fig. 12.6

12.5. TEOREMELE GENERALE ALE DINAMICII

12.5.1. TEOREMELE IMPULSULUI ÎN CAZUL SISTEMELOR DE PUNCTE MATERIALE SAU DE CORPURI

12.5.1.1. Teorema impulsului

Se consideră un sistem de n puncte materiale A_i , de mase m_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) a căror mișcare se stabilește în raport cu un sistem de referință cartezian $O_1x_1y_1z_1$ fix (inertial).

Cantitatea de mișcare (impulsul instantaneu) a sistemului de puncte materiale este dată de relația :

$$\bar{H} = \sum m_i \cdot \bar{v}_i. \quad (12.25)$$

Dacă derivăm această relație în raport cu timpul, se obține :

$$\dot{\bar{H}} = \sum m_i \dot{\bar{v}}_i = \sum m_i \cdot \bar{a}_i = \sum \bar{F}_i = \sum \bar{F}_{ext} + \sum \bar{F}_{int}. \quad (12.26, a)$$

Se poate ușor observa că forțele interioare sistemului de puncte materiale sînt două cîte două egale și de semn contrar pe același suport și că suma lor este nulă :

$$\dot{\bar{H}} = \sum \bar{F}_{ext} \quad (12.26, b)$$

Teorema impulsului se poate deci enunța astfel : că derivata în raport cu timpul a impulsului instantaneu (a cantității de mișcare) a unui sistem de puncte materiale sau a unui rigid, este egală cu suma forțelor exterioare care acționează asupra sistemului studiat.

12.5.1.2. Teorema conservării cantității de mișcare

Dacă rezultanta forțelor exterioare este nulă, adică $\sum \bar{F}_{ext} = 0$, este evident că avem relațiile $\dot{\bar{H}} = 0$ și deci $\bar{H} = \bar{C}$, adică impulsul instantaneu sau cantitatea de mișcare a sistemului este constant în timp, adică se conservă.

În multe aplicații practice, rezultanta forțelor exterioare are nulă numai o componentă după o axă și în acest caz teorema conservării impulsului se aplică pe direcția axei și se poate scrie sub forma :

$$\sum F_{x \text{ ext}} = 0 ; \quad \dot{H}_x = 0 ; \quad H_x = C_1 = M \cdot v_{ox}. \quad (12.27)$$

Valoarea constantei se determină cu ajutorul condițiilor inițiale.

12.5.1.3. Teorema mișcării centrului de masă a unui sistem de puncte materiale sau a unui sistem de corpuri

Expresia impulsului unui sistem de puncte materiale se poate reda și în funcție de viteza centrului de masă :

$$\bar{H} = \sum m_i \cdot \bar{v}_i = M \cdot \bar{v}_C \quad (12.28)$$

Derivata în raport cu timpul a impulsului conduce la relația :

$$\dot{\bar{H}} = M \cdot \dot{\bar{v}}_C = M \cdot \bar{a}_C = \sum \bar{F}_{ext}. \quad (12.29)$$

12.5.2. TEOREMELE MOMENTULUI CINETIC

12.5.2.1. Teorema variației momentului cinetic

Pentru un sistem de puncte materiale, momentul cinetic în raport cu un punct fix O este :

$$\bar{K}_O = \sum \bar{r}_i \times m_i \cdot \bar{v}_i. \quad (12.30)$$

Derivând în raport cu timpul, se obține :

$$\dot{\bar{K}}_O = \sum \dot{\bar{r}}_i \times m_i \cdot \bar{v}_i + \sum \bar{r}_i \times m_i \cdot \dot{\bar{v}}_i = \sum \bar{r}_i \times m_i \cdot \dot{\bar{v}}_i = \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i,$$

deoarece :

$$\dot{\bar{r}}_i = \bar{v}_i \text{ și deci } \dot{\bar{r}}_i \times m_i \cdot \bar{v}_i = 0.$$

Expresia se poate scrie deci sub forma :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{K}}_O &= \sum \bar{r}_i \times m_i \cdot \bar{a}_i = \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_{ext} + \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_{int}; \\ \dot{\bar{K}}_O &= \bar{M}_O \text{ ext} + \bar{M}_O \text{ int}. \end{aligned} \quad (12.31)$$

Suma momentelor forțelor interioare este nulă deoarece forțele interioare sînt două cîte două egale, de sens contrar și pe același suport. Rezultă deci :

$$\dot{\bar{K}}_O = \bar{M}_O \text{ ext}, \quad (12.32)$$

adică derivata în raport cu timpul a momentului cinetic calculat în raport cu un punct fix O este egală cu suma momentelor forțelor exterioare calculate în raport cu același punct fix O .

Această relație vectorială proiectată pe cele trei axe conduce la trei relații scalare :

$$\dot{K}_x = M_{ox \text{ ext}} ; \quad \dot{K}_y = M_{oy \text{ ext}} ; \quad \dot{K}_z = M_{oz \text{ ext}}.$$

12.5.2.2. Teorema conservării momentului cinetic

Dacă se consideră un sistem izolat pentru care suma momentelor forțelor exterioare este nulă $\bar{M}_{o\ ext} = 0$, atunci, conform teoremei momentului cinetic, avem și : $\dot{\bar{K}}_0 = 0$ și rezultă $\bar{K}_0 = \text{const}$, adică momentul cinetic în raport cu reperul fix O este constant în timp. Teorema conservării momentului cinetic se poate deci enunța astfel : dacă suma momentelor forțelor exterioare ce acționează asupra unui sistem de puncte materiale sau de corpuri, considerat izolat, este nulă, atunci momentul cinetic al sistemului, stabilit în raport cu același reper fix, este conservativ, adică se păstrează constant în timp.

12.5.2.3. Teorema momentului cinetic aplicată în mișcarea relativă a sistemului de puncte materiale sau a rigidului față de centrul de masă

Din cele arătate anterior a reieșit clar că momentul cinetic este un vector legat, adică valoarea lui se modifică odată cu reperul față de care se calculează. Pe de altă parte, observînd că teoremele generale se deduc din legea fundamentală a mecanicii, se reține concluzia că aceste teoreme sînt valabile numai față de un sistem de referință fix.

Dacă se consideră un sistem de puncte materiale și două repere, unul fix $O_1x_1y_1z_1$ și unul mobil $Cxyz$ avînd originea în centrul de masă C și axele paralele cu axele triedrului fix ca în figura 12.7 se pot scrie relațiile :

$$\bar{\rho}_{1i} = \bar{\rho}_{1c} + \bar{r}_i; \quad \bar{v}_{1i} = \bar{v}_{1c} + \bar{v}_i,$$

unde s-a notat :

$\bar{\rho}_{1i}$ — vectorul de poziție al unui punct oarecare A_i față de sistemul fix ;

$\bar{\rho}_{1c}$ — vectorul de poziție al centrului de masă față de sistemul fix ;

\bar{v}_{1i} — viteza absolută a lui A_i ;

\bar{v}_{1c} — viteza centrului de masă față de sistemul fix ;

\bar{v}_i — viteza relativă a unui punct A_i față de centrul de masă (originea sistemului mobil).

În baza teoremei lui Koenig, momentul cinetic pentru un sistem de puncte materiale ce are o mișcare generală este :

$$\bar{K}_1 = \bar{\rho}_{1c} \times M \cdot \bar{v}_{1c} + \bar{K}_c. \quad (12.33)$$

Teorema momentului cinetic aplicată în raport cu reperul fix O_1 , se poate exprima prin relația :

$$\dot{\bar{K}}_1 = \sum \dot{\bar{\rho}}_{1i} \times \bar{F}_i,$$

ceea ce se mai poate scrie :

$$\frac{d}{dt} (\bar{\rho}_{1c} \times M \cdot \bar{v}_{1c} + \bar{K}_c) = \sum (\dot{\bar{\rho}}_{1c} + \dot{\bar{r}}_i) \times \bar{F}_i,$$

sau :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\rho}}_{1c} \times M \cdot \bar{v}_{1c} + \bar{\rho}_{1c} \times M \cdot \dot{\bar{v}}_{1c} + \dot{\bar{K}}_c &= \\ &= \sum \dot{\bar{\rho}}_{1c} \times \bar{F}_i + \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i. \end{aligned}$$

Se poate observa că :

$$\dot{\bar{\rho}}_{1c} \times M \cdot \bar{v}_{1c} = \bar{v}_{1c} \times M \cdot \bar{v}_{1c} = 0;$$

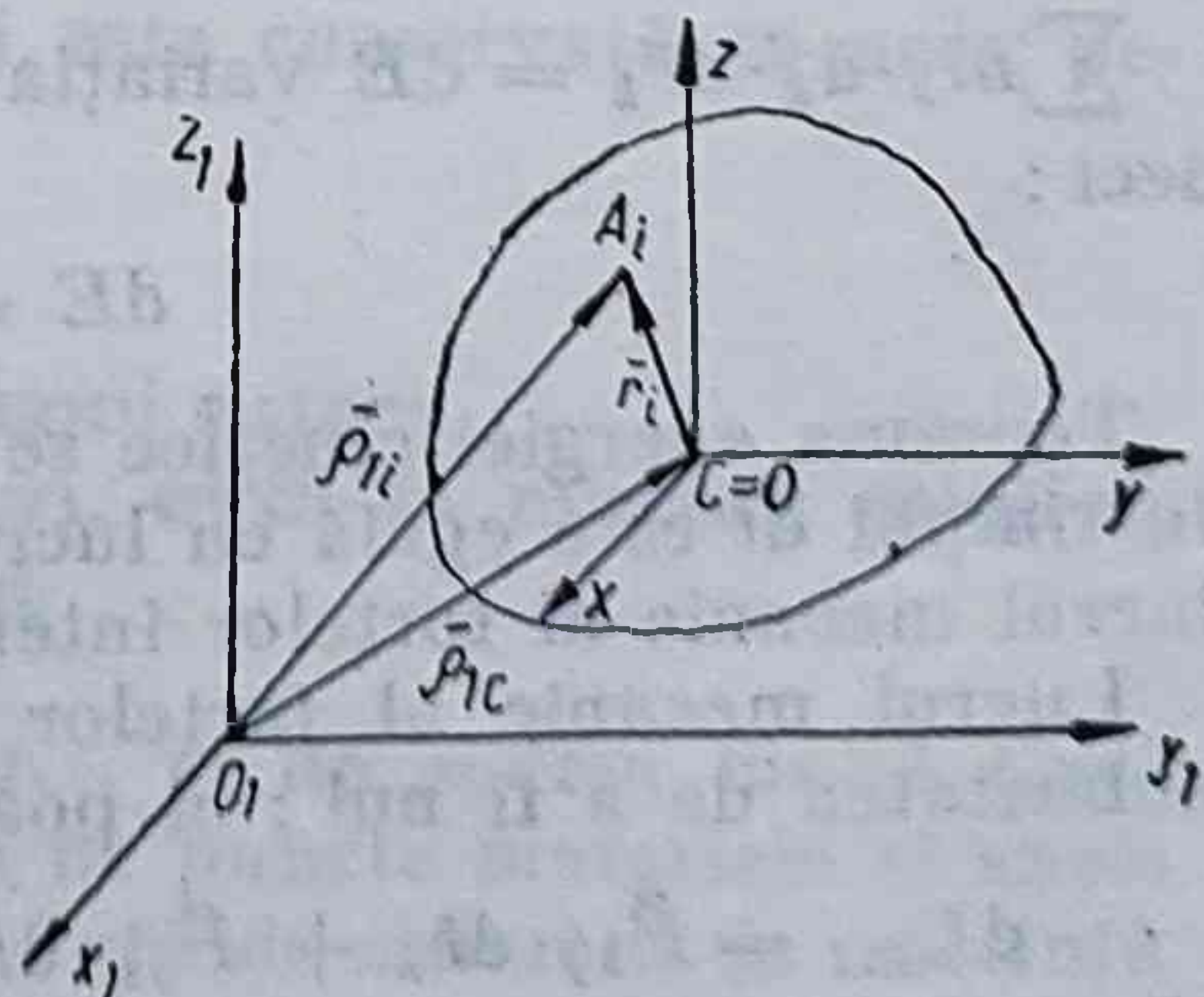


Fig. 12.7

$$\bar{\rho}_{10} \times M \cdot \dot{\bar{v}}_{10} = \bar{\rho}_{10} \times M \cdot \bar{a}_0 = \sum \bar{\rho}_{10} \times \bar{F}_i = \bar{\rho}_{10} \times \sum \bar{F}_i, \quad (12.34)$$

deoarece s-a ținut seama de teorema mișcării centrului de greutate.

Din aceste relații comparate între ele rezultă că avem :

$$\bar{K}_0 = \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i. \quad (12.35)$$

Se poate deci reține că teorema momentului cinetic se poate aplica fie față de un reper fix, fie față de centrul de greutate al sistemului, care se află în mișcare și nu este valabilă față de un reper mobil care nu coincide cu centrul de masă.

12.5.3. TEOREMA ENERGIEI CINETICE

S-a arătat că în cazul unui punct material, teorema variației energiei cinetice este exprimată prin relația :

$$L_{1-2} = E_2 - E_1 \quad \text{sau :} \quad \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2.$$

Dacă se consideră un sistem de puncte materiale $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ acționate de un sistem de forțe exterioare \bar{F}_k și de forțe interioare de interacțiune $\bar{F}_{kj} (k, j = 1, \dots, n)$, atunci pentru un punct oarecare al sistemului se poate exprima legea fundamentală a dinamicii, sub forma :

$$m_k \cdot \bar{a}_k = \bar{F}_k + \bar{F}_{k1} + \bar{F}_{k2} + \dots + \bar{F}_{kn}.$$

Înmulțind scalar cu $d\bar{r}_k$, se obține :

$$m_k \cdot \bar{a}_k \cdot d\bar{r}_k = \bar{F}_k \cdot d\bar{r}_k + \bar{F}_{k1} \cdot d\bar{r}_k + \bar{F}_{k2} \cdot d\bar{r}_k + \dots + \bar{F}_{kn} \cdot d\bar{r}_k.$$

Însumînd toate relațiile corespunzătoare valorilor $k = 1, \dots, n$, se deduce :

$$\sum_{k=1}^n m_k \cdot \bar{a}_k \cdot d\bar{r}_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot d\bar{r}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1, k \neq j}^n \bar{F}_{kj} \cdot d\bar{r}_k. \quad (12.36)$$

În această relație avem :

$\sum \bar{F}_k \cdot d\bar{r}_k = dL_{ext}$ lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare ;

$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{F}_{kj} \cdot d\bar{r}_k = dL_{int}$ lucrul mecanic elementar al forțelor interioare ;

$\sum m_k \cdot \bar{a}_k \cdot d\bar{r}_k = dE$ variația energiei cinetice ;

deci :

$$dE = dL_{ext} + dL_{int}. \quad (12.37)$$

Teorema energiei cinetice se poate enunța astfel : variația energiei cinetice în timpul dt este egală cu lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare plus lucrul mecanic al forțelor interioare efectuat în același timp.

Lucrul mecanic al forțelor interioare prezintă în anumite cazuri particularitatea de a fi nul ; el poate fi exprimat și sub forma :

$$\begin{aligned} dL_{int} &= \bar{F}_{kj} \cdot d\bar{r}_k + \bar{F}_{jk} \cdot d\bar{r}_j = \bar{F}_{kj} \cdot (d\bar{r}_k - d\bar{r}_j) = \bar{F}_{kj} \cdot (\bar{v}_k - \bar{v}_j) dt = \\ &= \bar{F}_{kj} \cdot \bar{v}_{kj} dt, \end{aligned}$$

unde s-a ținut seama că :

$$\vec{F}_{kj} = -\vec{F}_{jk}; \quad d\vec{r}_k = \vec{v}_k \cdot dt \quad \text{și} \quad \vec{v}_k - \vec{v}_j = \vec{v}_{kj}.$$

Rezultă că lucrul mecanic elementar $dL_{int} = 0$ în următoarele cazuri :

- 1) $\vec{F}_{kj} = 0$ în cazul în care punctele nu se interacționează ;
- 2) \vec{F}_{kj} și \vec{v}_{kj} sînt vectori perpendiculari ;
- 3) $\vec{v}_{kj} = 0$ viteza relativă dintre puncte sau corpuri este nulă.

În cazul corpului solid rigid sau a sistemelor de corpuri, forțele interioare sînt două cîte două egale și de semn contrar și deoarece nu există deformații rezultă :

$$dL_{int} = 0.$$

Teorema variației energiei cinetice cînd $dL_{int} = 0$ se exprimă :

$$L_{A-B \text{ forțe ext}} = E_B - E_A. \quad (12.38)$$

12.5.3.1. Conservarea energiei mecanice

Se consideră un sistem de puncte materiale $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$. Acest sistem se numește conservativ dacă forțele sale interioare derivă dintr-o funcție de forță $U(x_1 y_1 z_1, \dots, x_n y_n z_n)$, adică :

$$dL_{int} = dU. \quad (12.39)$$

În acest caz se poate scrie :

$$L_{int \text{ } 0 \rightarrow 1} = U_1 - U_0,$$

iar expresia teoremei variației energiei se poate scrie :

$$d(E - U) = dL_{ext}.$$

Dacă vom denumi drept energie potențială funcția

$$V = -U,$$

va rezulta :

$$d(E + V) = dL_{ext}.$$

Dacă $dL_{ext} = 0$ se obține :

$$E + V = \text{const}_i \quad (12.40)$$

Această relație exprimă tocmai teorema conservării energiei mecanice și se poate enunța sub forma : dacă lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare care lucrează asupra unui sistem conservativ este nul într-o anumită perioadă, atunci energia mecanică a sistemului este conservată în acea perioadă de timp.

12.5.3.2. Teorema energiei cinetice în cazul unui sistem de puncte materiale, sau de corpuri, aflat în mișcare relativă față de centrul de masă al sistemului

Considerînd un sistem de referință fix $O_1 x_1 y_1 z_1$ și un sistem mobil $Cxyz$ ce are originea în centrul de masă al sistemului de puncte materiale și axele paralele cu cele ale sistemului fix, se poate scrie față de sistemul de referință fix :

$$dE_1 = dL_{1 \text{ ext}} + dL_{1 \text{ int}}. \quad (12.41)$$

Ținând seama de a doua teoremă a lui Koenig pentru determinarea energiei cinetice pentru un sistem ce are o mișcare generală, se poate scrie :

$$d\left[\frac{1}{2} M \cdot v_c^2 + E_c\right] = \sum \bar{F}_k \cdot d(\bar{\rho}_c + \bar{r}_k) + \sum \sum \bar{F}_{kj} \cdot d(\bar{\rho}_c + \bar{r}_k),$$

unde :

M este masa întregului sistem ;

\bar{v}_c — viteza centrului de masă a sistemului ;

\bar{F}_k — forța exterioară aplicată în punctul A_k ;

\bar{F}_{kj} — forța de interacțiune între puncte A_k și A_j ;

$\bar{\rho}_c$ — vectorul de poziție al centrului de masă în raport cu sistemul fix ;

\bar{r}_k — vectorul de poziție al punctului A_k față de centrul de masă ;

E_c — energia cinetică față de centrul de masă.

Diferențiind și dezvoltând, se obține :

$$M \cdot \bar{v}_c \cdot d\bar{v}_c + dE_c = \sum \bar{F}_k \cdot d\bar{\rho}_c + \sum \bar{F}_k \cdot d\bar{r}_k + \\ + \sum \sum \bar{F}_{kj} \cdot d\bar{\rho}_c + \sum \sum \bar{F}_{kj} \cdot d\bar{r}_k.$$

Se observă că :

$$\sum \sum \bar{F}_{kj} \cdot d\bar{\rho}_c = d\bar{\rho}_c \cdot \sum \sum \bar{F}_{kj} = 0.$$

Iar :

$$M \cdot \bar{v}_c \cdot d\bar{v}_c = M \frac{d\bar{v}_c}{dt} d\bar{v}_c = \sum \bar{F}_k \cdot d\bar{\rho}_c \text{ este lucrul mecanic elementar al forțelor}$$

exterioare stabilit față de sistemul fix ;

$$\sum \bar{F}_k \cdot d\bar{r}_k = dL_{ext}$$

— lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare în mișcarea relativă față de centrul de masă ;

$$\sum \sum \bar{F}_{kj} \cdot d\bar{r}_k = dL_{int}$$

— lucrul mecanic elementar al forțelor interioare în mișcarea relativă față de centrul de masă.

Analizând și comparînd aceste relații se poate reține că :

$$dE_c = dL_{ext} + dL_{int},$$

adică, teorema variației energiei cinetice se păstrează sub aceeași formă în mișcarea relativă a unui sistem de puncte în raport cu centrul său de masă ca și în raport cu un sistem de referință fix.

APLICAȚIA 1

Se consideră sistemul de corpuri din figura 12.8, elementele geometrice fiind cunoscute. Să se determine accelerația, tensiunile din fire, reacțiunile din O și reacțiunea normală între corpul $\frac{G}{4}$ și corpul G .

Rezolvare

Se izolează corpurile, figurînd forțele ce le acționează, și se aplică la fiecare corp teorema generală corespunzătoare mișcării sale.

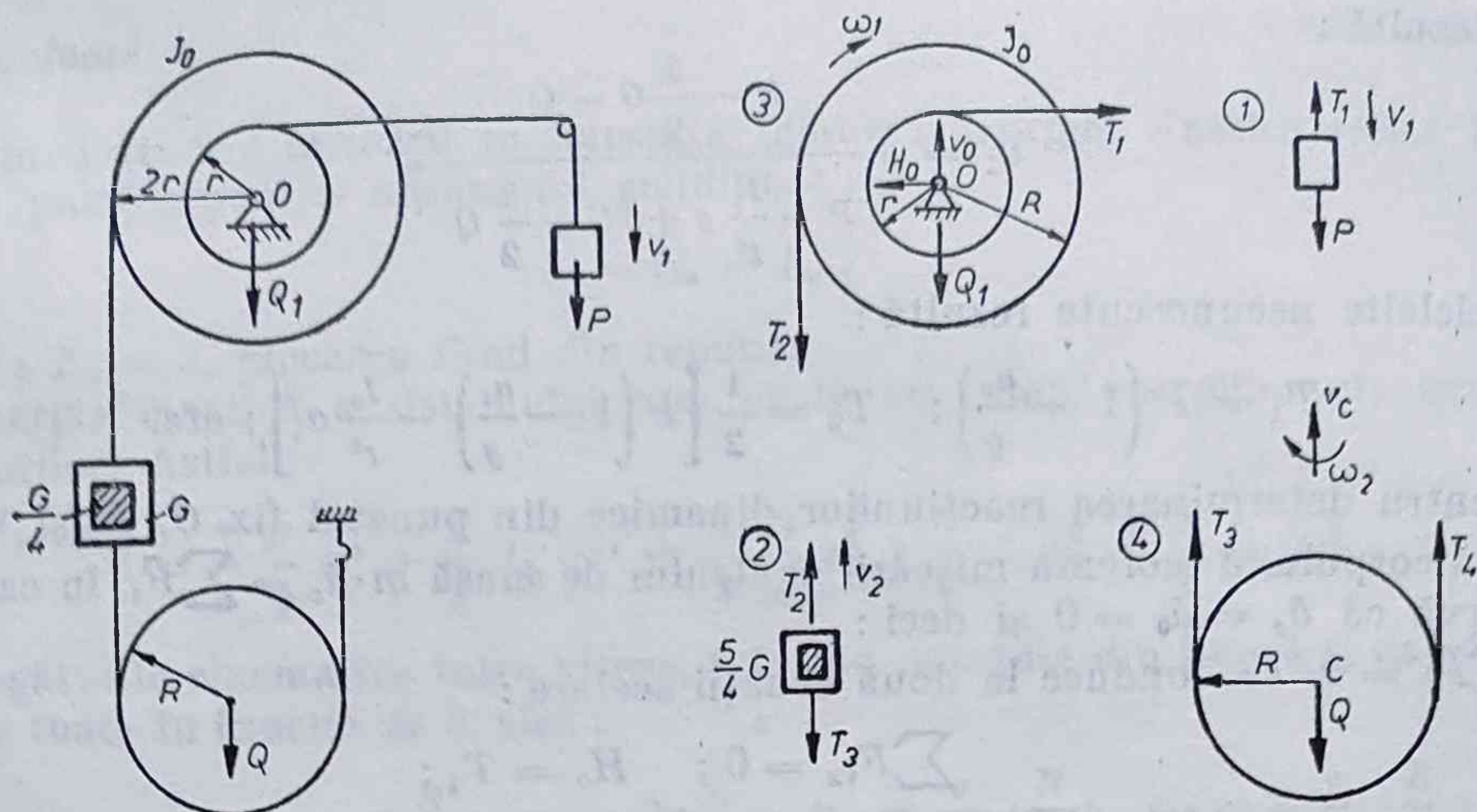


Fig. 12.8

Astfel :

— La corpurile (1, 2) în translație, teorema impulsului $\frac{d\bar{H}}{dt} = \sum \bar{F}_i$, proiectată pe direcția și în sensul mișcării :

— corp (1) $\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{g} v_1 \right) = P - T_1 \rightarrow \frac{P}{g} a_1 = P - T_1;$

— corp (2) $\frac{d}{dt} \left(\frac{5}{4} \frac{G}{g} v_2 \right) = T_2 - T_3 - \frac{5}{4} G \rightarrow \frac{5}{4} \frac{G}{g} a_2 = T_2 - T_3 - \frac{5}{4} G.$

— La corpul (3) în rotație, teorema momentului cinetic față de punctul fix O : $\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum \bar{M}_{iO}$ proiectată față de axa \perp pe figură în O ;

$$\frac{d}{dt} (I_0 \cdot \omega_1) = T_1 \cdot r - T_2 \cdot 2r \rightarrow I_0 \cdot \varepsilon_1 = T_1 \cdot r - T_2 \cdot r$$

— La corpul (4) în mișcare plană se aplică teorema impulsului sub forma teoremei mișcării centrului de masă și teorema momentului cinetic față de centrul de masă :

$$m \bar{a}_c = \sum \bar{F}_i \text{ și } \frac{d\bar{K}_c}{dt} = \sum \bar{M}_{ic}.$$

Rezultă

$$\frac{Q}{g} a_c = T_3 + T_4 - Q$$

$$\frac{d}{dt} (I_c \cdot \omega_2) = T_3 \cdot R - T_4 \cdot R \rightarrow I_c \cdot \varepsilon_2 = T_3 \cdot R - T_4 \cdot R.$$

Atașind relațiile cinematice de legătură dintre variabilele de tip accelerații și exprimându-le în funcție de a_1 , accelerația greutatei P , se obține :

$$a_2 = 2a_1; \quad a_c = \frac{1}{2} a_2 = a_1; \quad \varepsilon_1 = \frac{a_1}{r}; \quad \varepsilon_2 = \frac{a_1}{R},$$

Rezultă :

$$a_1 = g \frac{P - \frac{5}{2}G - Q}{P + \frac{I_0}{r^2}g + 5G + \frac{3}{2}Q}.$$

Celelalte necunoscute rezultă :

$$T_1 = P \left(1 - \frac{a_1}{g} \right); \quad T_2 = \frac{1}{2} \left[P \left(1 - \frac{a_1}{g} \right) - \frac{I_0}{r^2} a_1 \right]; \text{ etc.}$$

Pentru determinarea reacțiunilor dinamice din punctul fix O , H_0 și V_0 , se aplică corpului 3 teorema mișcării centrului de masă $m \cdot \bar{a}_c = \sum \bar{F}_i$, în care se observă că $\bar{a}_c = \bar{a}_0 = 0$ și deci :

$\sum \bar{F}_i = 0$, ce conduce la două ecuații scalare :

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0; & H_0 &= T_1; \\ \sum F_{iy} &= 0; & V_0 &= Q_1 + T_2. \end{aligned}$$

Pentru determinarea reacțiunii normale N dintre corpul $\frac{G}{4}$ și corpul G se aplică teorema impulsului : $\frac{d\bar{H}}{dt} = \sum \bar{F}_i$ pentru studiul mișcării lui $\frac{G}{4}$, proiectată pe direcția și în sensul mișcării :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{G}{4g} v_2 \right) = N - \frac{G}{4}.$$

Rezultă :

$$N = \frac{G}{4} \left(1 + \frac{2a_1}{g} \right).$$

APLICAȚIA 2

Se dă sistemul de corpuri din figura 12.9, în care sînt specificate elementele mecanice și geometrice respective. Sistemul este pus în mișcare de cuplul motor de moment M_0 . Să se determine accelerația greutateii P de pe pantă.

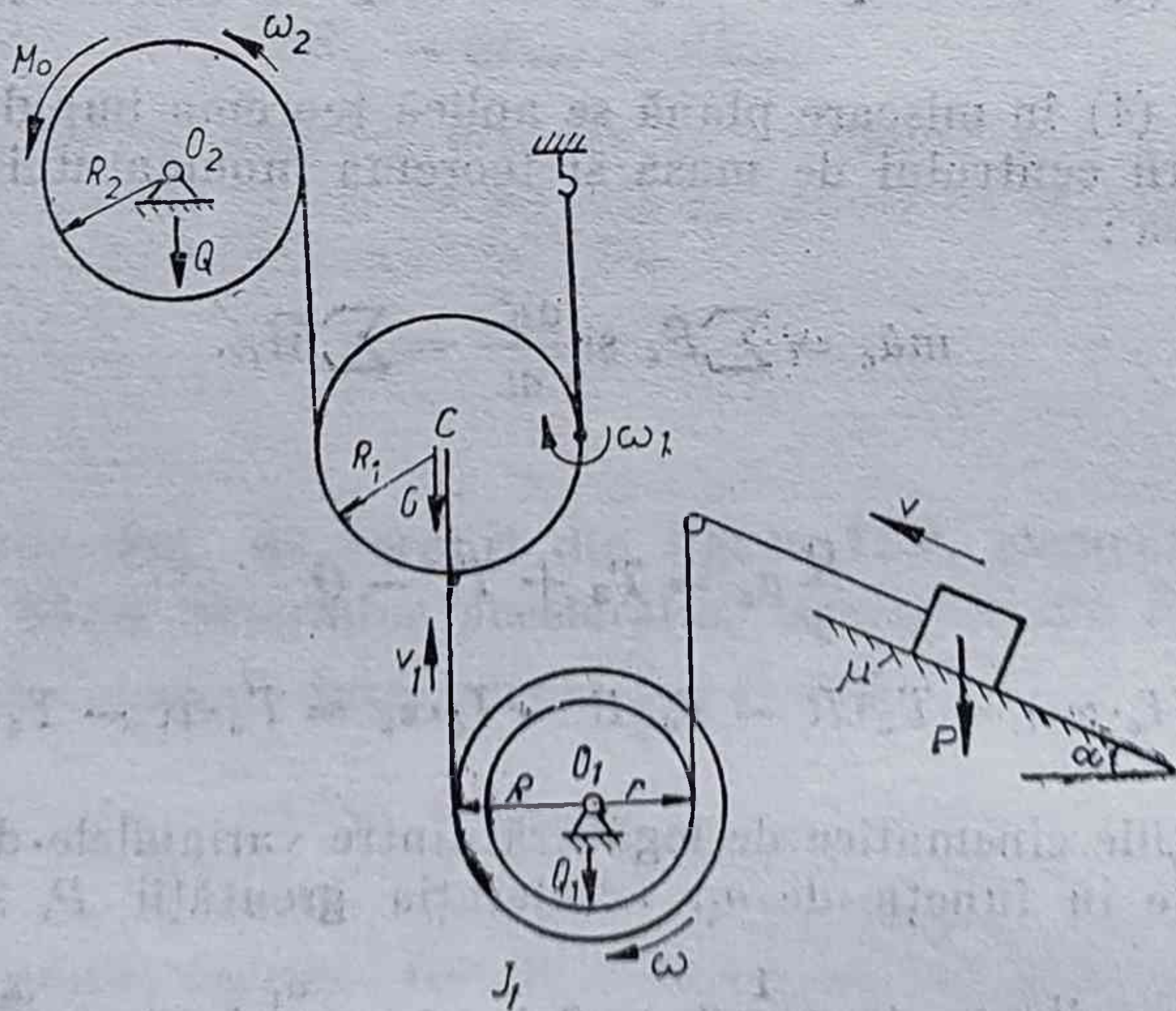


Fig. 12.9

Rezolvare

Pentru studiul mișcării se folosește teorema energiei cinetice scrisă între două poziții, pentru ansamblul solidificat :

$$E - E_0 = L_{ext},$$

unde : $E_0 = 0$, plecarea fiind din repaus.

Energia cinetică a sistemului este egală cu suma energiilor cinetice ale corpurilor. Astfel :

$$E = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 + \frac{1}{2} I_{O_1} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_1^2 + \frac{1}{2} I_c \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_{O_2} \cdot \omega_2^2.$$

Legăturile cinematice între viteze, folosind notațiile din figură și exprimându-le toate în funcție de v , sînt :

$$v = r \cdot \omega ; \quad v_1 = v \frac{R}{r} ; \quad v_2 = 2v \frac{R}{r} ; \quad \omega_1 = \frac{v}{R_1} \cdot \frac{R}{r} ; \quad \omega_2 = 2 \frac{v}{R_2} \cdot \frac{R}{r}.$$

Expresia lui E devine :

$$E = \frac{v^2}{2g} \left[P + \frac{I_1}{r^2} g + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} G + 2Q \right) \right] = \frac{v^2}{2g} A,$$

unde prin A s-a notat paranteza mare.

Lucru mecanic este produs de cuplu M_0 , greutatea G și P , forța de frecare pe pantă. Astfel :

$$L = M_0 \cdot \theta_2 - G \cdot x_1 - (P \sin \alpha + \mu \cdot P \cos \alpha) x = x \left[2 \frac{M_0}{R_2} \cdot \frac{R}{r} - \right. \\ \left. - G \frac{R}{r} - P(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \right] = x \cdot B,$$

unde cu B s-a notat paranteza mare.

Introducînd în expresia teoremei energiei, se obține :

$$\frac{v^2}{2g} A = B \cdot x.$$

Derivînd în raport cu timpul, rezultă :

$$A \frac{v}{g} \cdot a = B \cdot v.$$

Deci :

$$a = g \frac{\left(2 \frac{M_0}{R_2} - G \right) \frac{R}{r} - P(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{P + \frac{I_1}{r^2} g + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} G + 2Q \right)}.$$

APLICAȚIA 3

Se consideră sistemul din figura 12.10, avînd elementele geometrice date. Să se determine accelerația corpului Q .

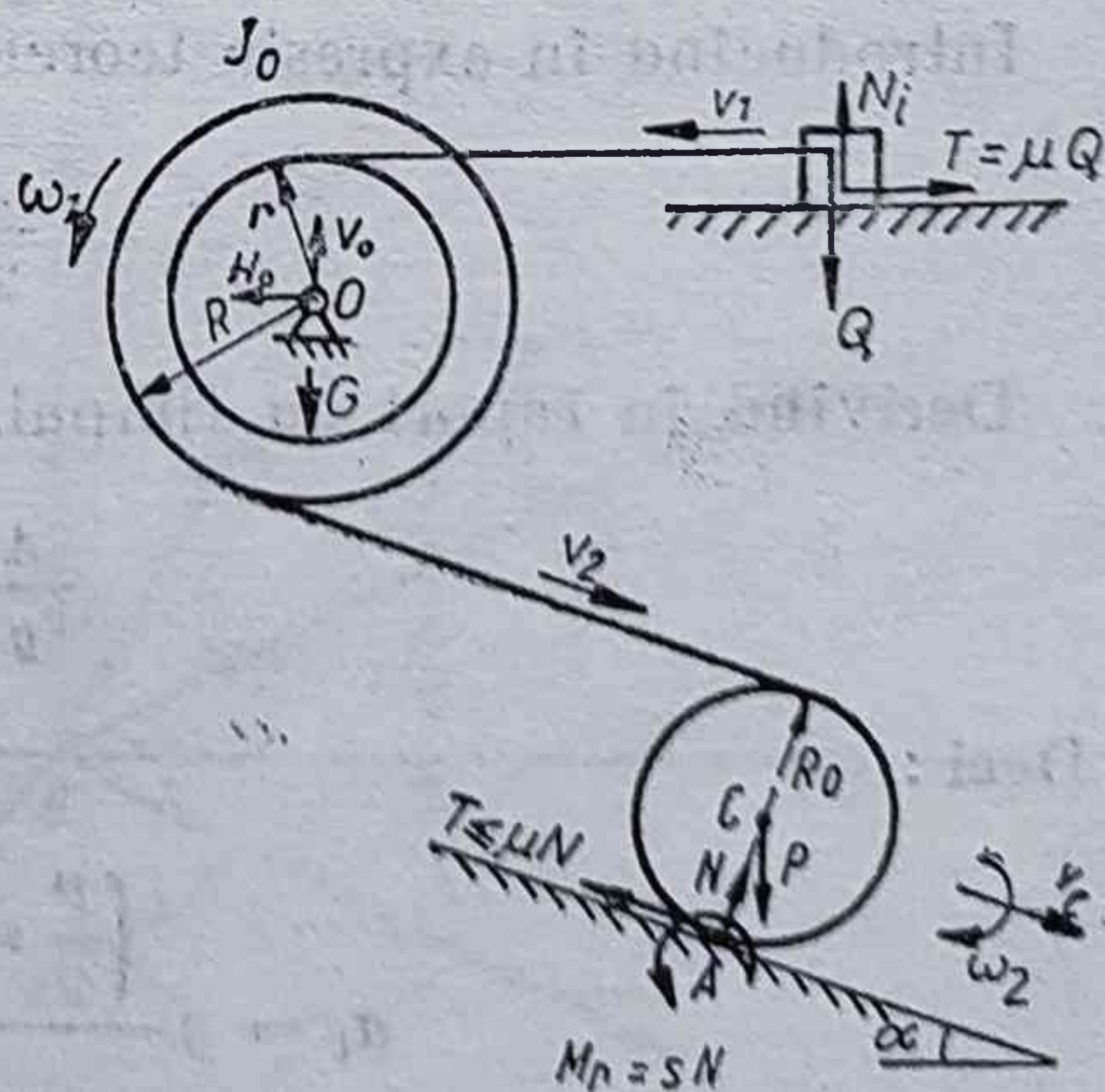


Fig. 12.10

Rezolvare

Se aplică teorema energiei cinetice scrisă între două poziții, pentru întregul sistem solidificat :

$$E - E_0 = L_{ext}.$$

Energia cinetică inițială $E_0 = 0$ pentru că sistemul pornește din repaus. Cu notațiile pentru variabilele mișcării din figură, energia sistemului la un moment dat este :

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v_1^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega_1^2 + \frac{1}{2} \frac{P}{g} v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega_2^2.$$

Legăturile cinematice între viteze, exprimate toate în funcție de v_1 sînt :

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r}; \quad v_2 = v_1 \frac{R}{r}; \quad v_c = \frac{1}{2} v_1 \frac{R}{r}; \quad \omega_2 = \frac{1}{2R_0} v_1 \frac{R}{r}.$$

Expresia lui E devine :

$$E = \frac{v_1^2}{2g} \left(Q + \frac{I_0}{r^2} g + \frac{3}{8} P \frac{R^2}{r^2} \right) = \frac{A}{2g} v_1^2,$$

unde prin A s-a notat conținutul parantezei.

Lucru mecanic este produs de P , Mr și T_1 , forța de frecare F_f de la baza discului neparticipînd la lucru mecanic dat fiindcă calcă în centrul instantaneu de rotație. Deci :

$$L = P \sin \alpha \cdot x_c - s \cdot N \cdot \theta_2 - \mu \cdot Q \cdot x_1$$

Cu relațiile de legătură : $x_c = \frac{1}{2} x_1 \frac{R}{r}$ și $\theta_2 = \frac{1}{2R_0} x_1 \frac{R}{r}$ expresia lui L devine :

$$L = x_1 \left[\frac{P}{2} \sin \alpha \cdot \frac{R}{r} - \frac{Q}{2} \frac{s}{R_0} \cos \alpha \cdot \frac{R}{r} - \mu \cdot Q \right] = B \cdot x_1,$$

unde prin B s-a notat paranteza.

Introducînd în expresia teoremei energiei, se obține :

$$\frac{A}{2g} v_1^2 = B \cdot x_1.$$

Derivînd în raport cu timpul, rezultă :

$$\frac{A}{g} v_1 \cdot a_1 = B \cdot v_1.$$

Deci :

$$a_1 = g \frac{\left(\frac{P}{2} \sin \alpha - \frac{Q}{2} \frac{s}{R_0} \cos \alpha \right) \frac{R}{r} - \mu \cdot Q}{Q + \frac{I_0}{r^2} g + \frac{3}{8} P \frac{R^2}{r^2}}.$$

13.

DINAMICA CORPULUI SOLID ÎN ROTAȚIE ÎN JURUL UNEI AXE FIXE

13.1. ECUAȚIILE MIȘCĂRII

Se consideră un corp solid rigid C (fig. 13.1) solidar cu o axă rigidă OO' prevăzută în O și O' cu două articulații sferice în care frecarea este considerată neglijabilă.

Se presupune că asupra corpului solid rigid acționează un sistem de forțe oarecare, care redus în raport cu punctul O poate fi înlocuit cu un torsesor format din rezultanta \bar{R} și momentul \bar{M}_O .

Se alege un sistem de referință fix $Ox_1y_1z_1$ și un sistem de referință mobil $Oxyz$, astfel ca axele Oz și Oz_1 să se confunde, iar unghiul $x_1Ox = \theta$ și centrul de masă G al solidului să se afle în planul Oxz (fig. 13.2).

Articulațiile sferice din O și O' se înlocuiesc cu două forțe de legătură necunoscute, a căror expresie este :

$$\bar{R}' = R'_x \cdot \bar{i} + R'_y \cdot \bar{j} + R'_z \cdot \bar{k}; \quad \bar{R}'' = R''_x \cdot \bar{i} + R''_y \cdot \bar{j} + R''_z \cdot \bar{k} \quad (13.1, a)$$

Torsesorul de reducere în raport cu originea este format din :

$$\bar{R} = R_x \cdot \bar{i} + R_y \cdot \bar{j} + R_z \cdot \bar{k}; \quad \bar{M}_O = M_x \cdot \bar{i} + M_y \cdot \bar{j} + M_z \cdot \bar{k}. \quad (13.1, b)$$

Vectorul de poziție al centrului de masă față de sistemul mobil este :

$$\overline{OG} = \bar{r} = a \cdot \bar{i} + c \cdot \bar{k}.$$

Viteza centrului de masă este :

$$\bar{v}_G = a \frac{d\theta}{dt} \bar{j}.$$

Accelerația centrului de masă este :

$$\bar{a}_G = a \frac{d^2\theta}{dt^2} \bar{j} - a \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cdot \bar{i}.$$

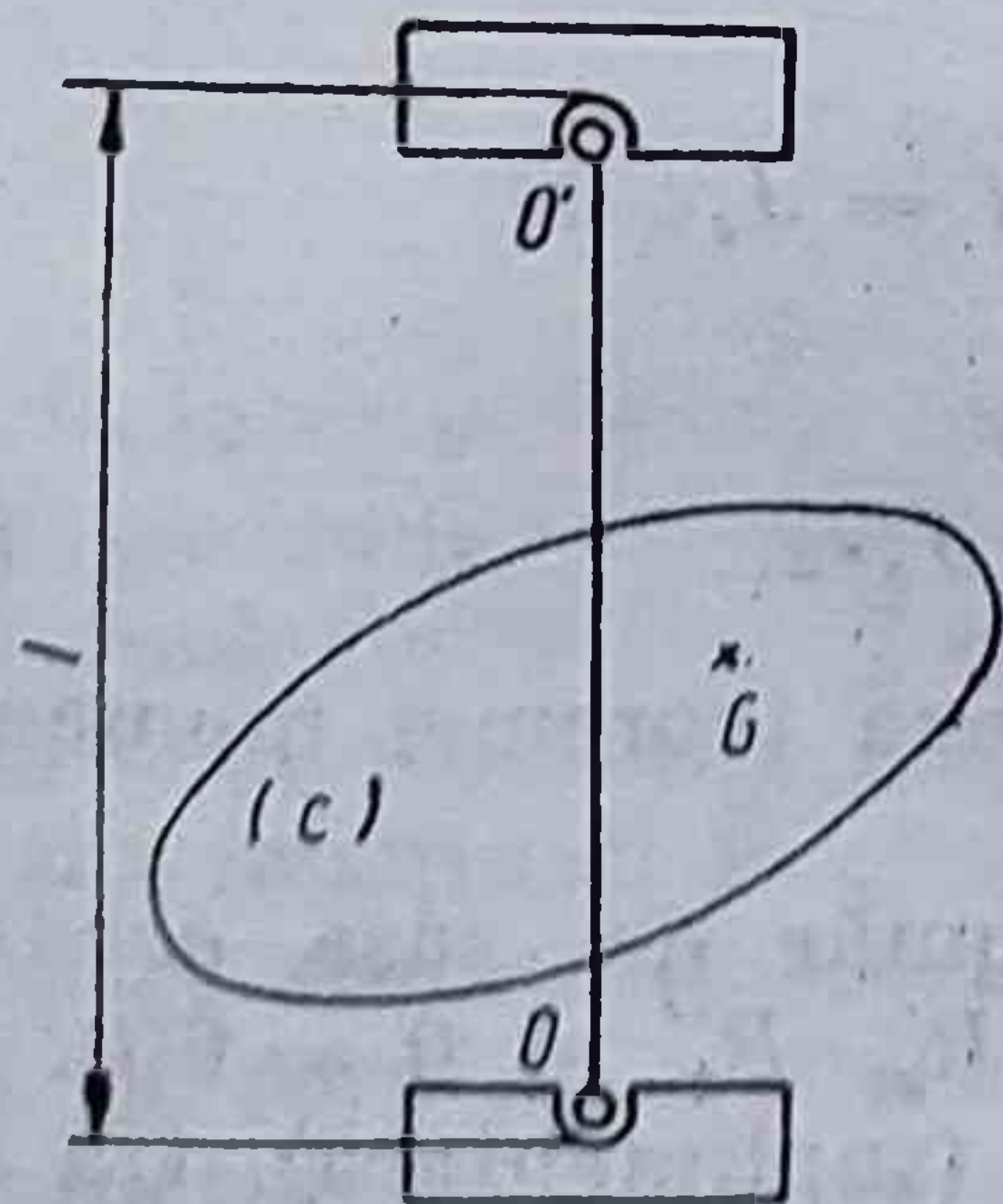


Fig. 13.1

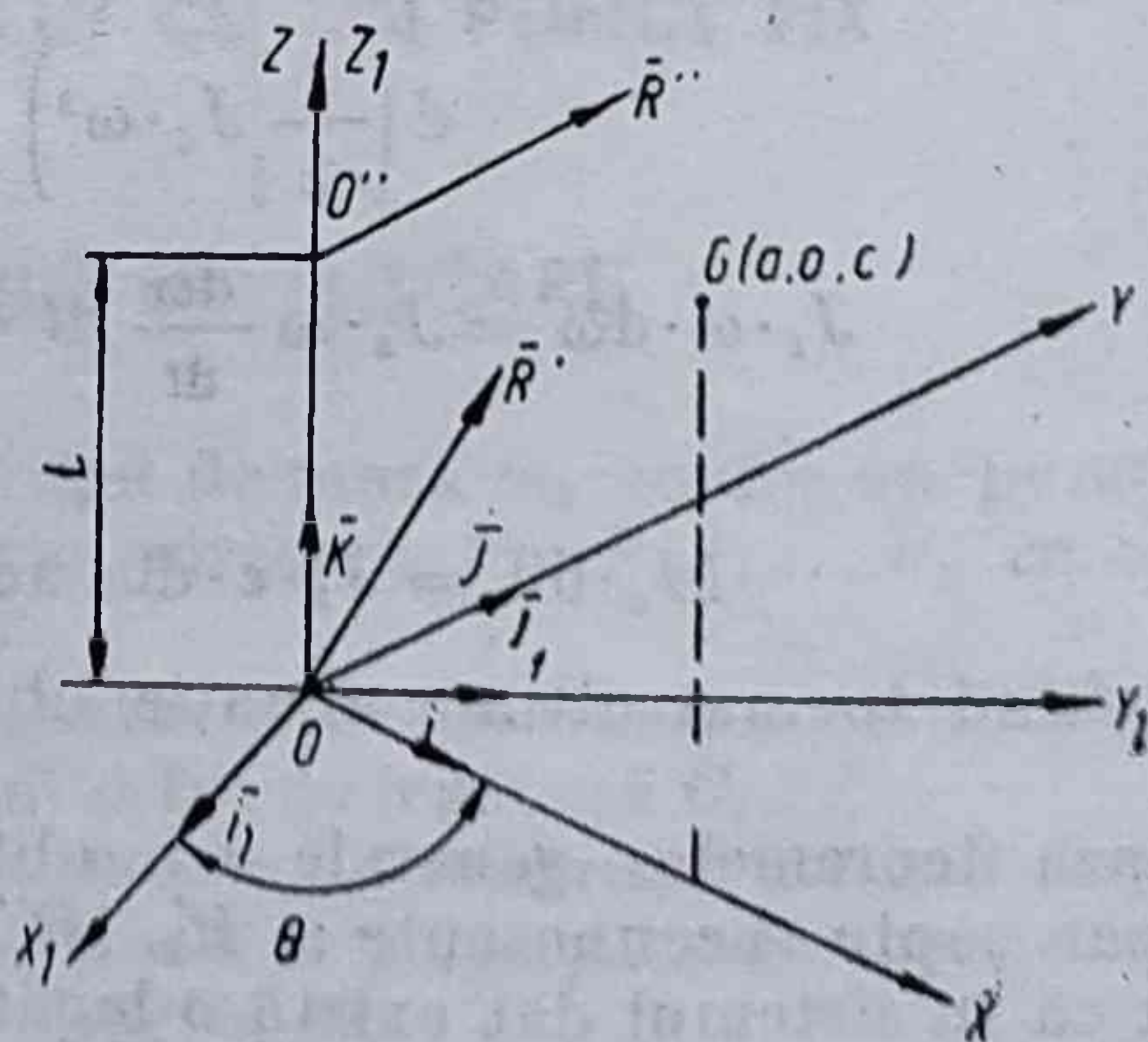


Fig. 13.2

[Folosind teorema mișcării centrului de masă se pot scrie ecuațiile :

$$R_x + R'_x + R''_x = -m \cdot a \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2; \quad (1)$$

$$R_y + R'_y + R''_y = m \cdot a \frac{d^2\theta}{dt^2}; \quad (2) \quad (13.2)$$

$$R_z + R'_z + R''_z = 0. \quad (3)$$

În baza teoremei momentului cinetic se pot scrie relațiile :

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{M}_0 + \bar{OO}' \times \bar{R}''.$$

Expresia derivatei vectorului moment cinetic în raport cu timpul și cu sistemul de referință fix este :

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \frac{\partial \bar{K}_0}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{k}_0,$$

unde :

$$\bar{K}_0 = \sum_1^n \bar{r}_i \times m_i \cdot \bar{v}_i = \sum_1^n \bar{r}_i \times m_i (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_i & y_i & z_i \\ -m_i \omega y_i & m_i \omega x_i & 0 \end{vmatrix} \quad (13.3)$$

$$k_0 = -J_{xz} \cdot \omega \cdot \bar{i} - J_{yz} \cdot \omega \cdot \bar{j} + J_z \cdot \omega \cdot \bar{k}$$

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = [-J_{xz} \cdot \varepsilon + J_{yz} \cdot \omega^2] \bar{i} + [-J_{yz} \cdot \varepsilon + J_{xz} \cdot \omega^2] \bar{j} + J_z \cdot \varepsilon \cdot \bar{k}. \quad (13.4)$$

Ecuațiile bazate pe teorema momentului cinetic se pot scrie, deci, sub forma :

$$M_x - l \cdot R''_y = -J_{xz} \cdot \varepsilon + J_{yz} \cdot \omega^2; \quad (4)$$

$$M_y + l \cdot R''_x = -J_{yz} \cdot \varepsilon + J_{xz} \cdot \omega^2; \quad (5) \quad (13.5)$$

$$M_z = J_z \cdot \varepsilon. \quad (6)$$

În baza teoremei energiei cinetice se poate scrie :

$$dE = dL_{ext};$$

sau :

$$d \left(\frac{1}{2} J_z \cdot \omega^2 \right) = M_z \cdot d\theta;$$

$$J_z \cdot \omega \cdot d\omega = J_z \cdot \omega \frac{d\omega}{dt} dt = J_z \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot dt = J_z \varepsilon d\theta$$

și deci :

$$M_z \cdot d\theta = J_z \cdot \varepsilon \cdot d\theta, \text{ adică : } M_z = J_z \cdot \varepsilon, \quad (13.6)$$

aceasta fiind tocmai ultima ecuație obținută în baza teoremei momentului cinetic.

În baza teoremelor generale s-a obținut un număr de șase ecuații în care apar șapte necunoscute : R'_x , R''_x , R'_y , R''_y , R'_z , R''_z și $\theta = \theta(t)$. Este evident că în sistemul dat există o legătură în plus (suplimentară). Un astfel de sistem se numește *sistem hyperstatic*.

Dacă se înlocuiește una din cele două articulații sferice cu una cilindrică (care se înlocuiește cu două reacțiuni necunoscute) sistemul devine rezolvabil avînd șase ecuații cu șase necunoscute. Un astfel de sistem poartă numele de *sistem isostatic*.

13.2 ECHILIBRUL STATIC ȘI DINAMIC

Componentele reacțiunilor ce se pot stabili din ecuațiile 1—6 pot căpăta valori remarcabil de mari dacă viteza unghiulară de rotație este mare.

a) *Echilibrul static* are drept scop aducerea centrului de masă pe axa de rotație. În acest fel accelerația centrului de masă este nulă și, aplicînd teorema mișcării centrului de masă în raport cu sistemul de referință fix, se obține :

$$R_x + R'_x + R''_x = 0 ; \quad (1')$$

$$R_y + R'_y + R''_y = 0 ; \quad (2') \quad (13.7)$$

$$R_z + R'_z + R''_z = 0. \quad (3')$$

b) *Echilibrul dinamic* constă în alegerea axei de rotație Oz astfel ca să fie axa principală de inerție. În acest fel momentele de inerție centrifugale J_{xz} și J_{yz} sînt nule. Aplicînd teorema momentului cinetic se obțin relațiile :

$$M_x - I \cdot R''_y = 0 ; \quad (4')$$

$$M_y + I \cdot R''_x = 0 ; \quad (5') \quad (13.8)$$

$$M_z = J_z \varepsilon. \quad (6')$$

Se poate ușor vedea că dacă s-a realizat echilibrul static și cel dinamic, reacțiunile suporturilor asupra axei de rotație a solidului sînt aceleași în echilibru ca și în stare de mișcare.

14.

DINAMICA RIGIDULUI CU UN PUNCT FIX

14.1. ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Se ia în considerație un corp solid rigid de masă m_0 ce are un punct fix O_1 și este acționat de un sistem de forțe oarecare F_1, F_2, \dots, F_n ce au drept rezultantă forța $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ (fig. 14.1).

Obiectul studiului, în acest caz, constă în determinarea ecuațiilor de mișcare și a reacțiunii \vec{R}' ce apare în punctul fix de legătură O_1 .

Pentru studiul mișcării se alege ca sistem de referință triedrul $Oxyz$ mobil legat de corp ale cărui axe sînt tocmai axele principale de inerție în raport cu punctul O_1 fix care coincide cu punctul O .

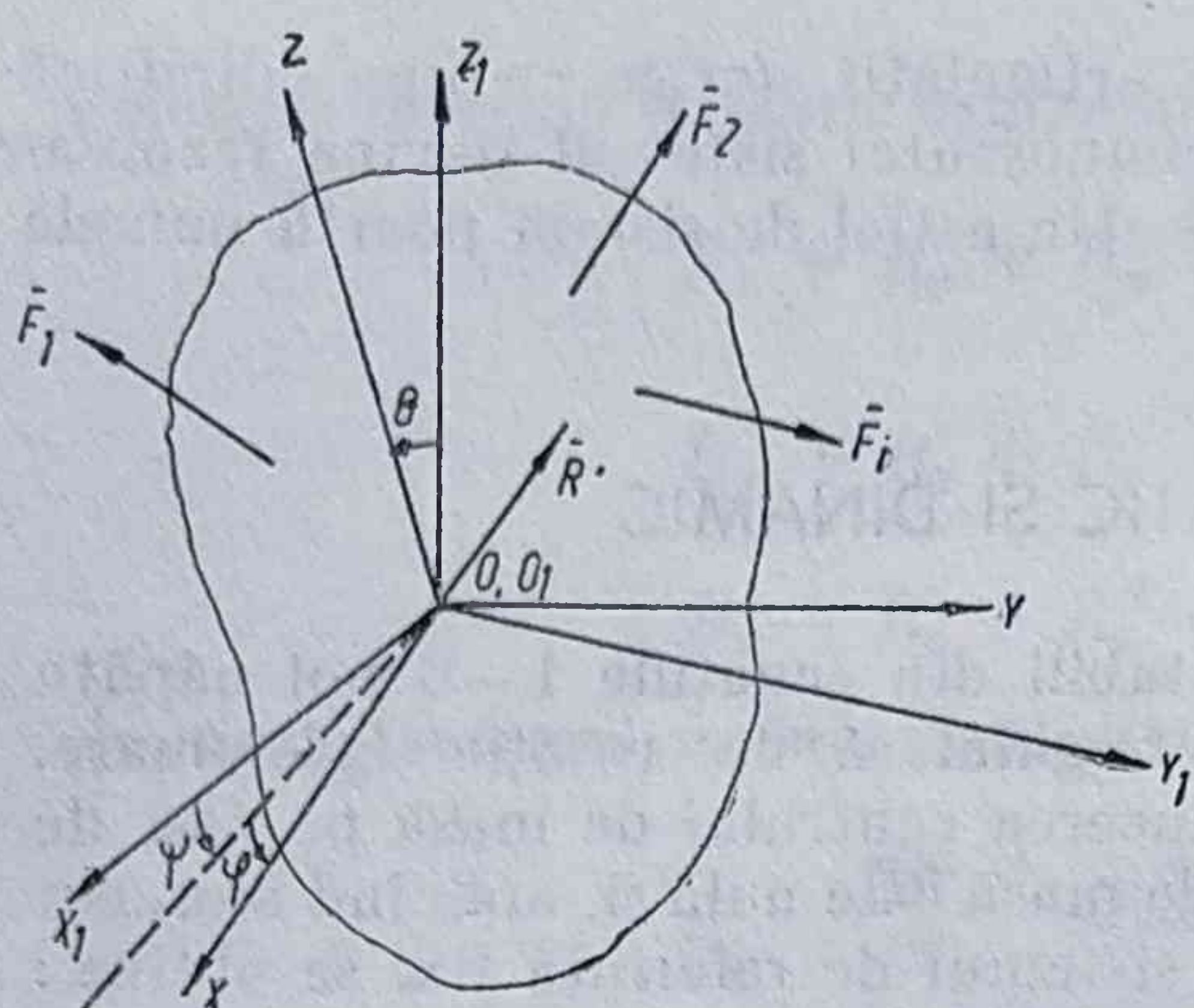


Fig. 14.1

În raport cu acest sistem de referință mobil, momentul cinetic este dat de expresia :

$$\bar{K}_0 = J_1 \cdot \omega_x \cdot \bar{i} + J_2 \cdot \omega_y \cdot \bar{j} + J_3 \cdot \omega_z \cdot \bar{k}, \quad (14.1)$$

$$\bar{K}_0 = \sum \bar{M}_0 \text{ ext.} \quad (14.2)$$

Momentul rezultat al forțelor exterioare în raport cu punctul O are expresia de forma :

$$\bar{M}_0 = M_x \cdot \bar{i} + M_y \cdot \bar{j} + M_z \cdot \bar{k}. \quad (14.3)$$

Derivata momentului cinetic în raport cu sistemul de referință fix este :

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \frac{\partial \bar{K}_0}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{K}_0 = J_1 \varepsilon_x \cdot \bar{i} + J_2 \varepsilon_y \cdot \bar{j} + J_3 \varepsilon_z \cdot \bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ J_1 \cdot \omega_x & J_2 \cdot \omega_y & J_3 \cdot \omega_z \end{vmatrix} \quad (14.4)$$

Teorema momentului cinetic proiectată pe cele trei axe ne conduce la ecuațiile lui Euler pentru rigidul cu un punct fix :

$$\begin{aligned} J_1 \cdot \varepsilon_x + \omega_y \cdot \omega_z (J_3 - J_2) &= M_x; \\ J_2 \cdot \varepsilon_y + \omega_x \cdot \omega_z (J_1 - J_3) &= M_y; \\ J_3 \cdot \varepsilon_z + \omega_x \cdot \omega_y (J_2 - J_1) &= M_z. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Acest sistem de ecuații conduce la soluții de forma :

$$\omega_x = f_1(t); \quad \omega_y = f_2(t); \quad \omega_z = f_3(t),$$

iar acestea, integrate, conduc în final la legea de mișcare, sub forma :

$$\psi = \psi(t); \quad \varphi = \varphi(t); \quad \theta = \theta(t).$$

Integrarea sistemului de ecuații ce formează ecuațiile lui Euler este destul de dificil de realizat. Ea a fost efectuată numai pentru câteva cazuri particulare, și anume :

a) *Cazul Euler-Poinsot*. În acest caz, torsorul forțelor exterioare constă dintr-o forță al cărei suport trece prin punctul fix O , adică avem : $\bar{M}_0 = 0$ sau $M_x = M_y = M_z = 0$. Se poate considera deci un corp solid rigid greu suspendat în centrul său de greutate și neîncărcat cu alte sarcini.

b) *Cazul Lagrange-Poisson*. În acest caz, elipsoidul de inerție relativ la punctul fix O este un elipsoid de rotație față de axa Oz , adică avem : $J_1 = J_2$, iar centrul de greutate se află pe axa acestui elipsoid. Corpul este supus numai acțiunii greutății sale.

c) *Cazul Sofia Kovalevskaja*. În acest caz, elipsoidul de inerție în raport cu punctul fix O este un elipsoid de rotație față de axa Oz și avem deci : $J_1 = J_2$, iar centrul de greutate se află în planul ecuatorial al elipsoidului de inerție. Corpul este supus numai acțiunii greutății sale. Pentru acest caz se face, de regulă, ipoteza : $J_1 = J_2 = 2J_3$, care constituie o particularitate interesantă

14.2. CALCULUL REACȚIUNILOR

Teorema impulsului este $\dot{\bar{H}} = \sum \bar{F}_{ext} = \bar{R}' + \bar{F}$, unde \bar{R}' este reacțiunea, iar \bar{F} este rezultanta forțelor exterioare; vectorul \bar{H} fiind definit în raport cu sistemul de referință mobil, derivata sa față de sistemul fix în raport cu timpul este:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{H} = m_0(\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_c) + m_0[\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_c)], \quad (14.6)$$

Rezultă:

$$\bar{R}' = -\bar{F} + m_0(\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_c) + m_0[\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_c)]. \quad (14.7)$$

14.3. CAZUL EULER-POINSOT

În acest caz s-a considerat că sistemul de forțe ce acționează asupra rigidului cu punct fix se reduce la o forță rezultantă ce trece prin punctul fix.

Rezultă deci: $\bar{M}_0 = 0$, sau: $M_x = M_y = M_z = 0$.

Ecuatiile lui Euler capătă forma:

$$\begin{aligned} J_1 \cdot \varepsilon_x + \omega_y \cdot \omega_z (J_3 - J_2) &= 0; \\ J_2 \cdot \varepsilon_y + \omega_z \cdot \omega_x (J_1 - J_3) &= 0; \\ J_3 \cdot \varepsilon_z + \omega_x \cdot \omega_y (J_2 - J_1) &= 0. \end{aligned} \quad (14.8)$$

O soluție particulară este: $\omega_x = \omega_0 = \text{const.}; \omega_y = \omega_z = 0$.

Rezultă că rigidul se rotește uniform în jurul axei Ox și că vectorul $\bar{\omega}$ este constant ca modul și direcție față de sistemul fix, precum și față de sistemul mobil. Aceasta înseamnă că axa de rotație este o dreaptă fixă în spațiu și este o axă permanentă de rotație. Această axă este axa principală de inerție față de care momentul este maxim sau minim.

Ținând seama că $\bar{M}_0 = 0$, se poate scrie lucrul mecanic elementar:

$$dL = \bar{M}_0 \cdot d\bar{\theta} = 0$$

sau:

$$dL = dE = 0.$$

Rezultă:

$$E = \frac{1}{2} (J_1 \cdot \omega_x^2 + J_2 \cdot \omega_y^2 + J_3 \cdot \omega_z^2) = \text{const.}$$

sau:

$$J_1 \cdot \omega_x^2 + J_2 \cdot \omega_y^2 + J_3 \cdot \omega_z^2 = 2E = \text{const.} \quad (14.9)$$

În concluzie, se poate reține observația că în cazul Euler-Poinsot mișcarea se face păstrându-se energia cinetică constantă. Teorema momentului cinetic conduce la a scrie: $\dot{\bar{K}}_0 = \sum \bar{M}_0 \cdot \bar{r}_c = 0$; deci: $\bar{K}_0 = \bar{C}_1 = \text{const.}$ (modul constant și direcție fixă).

Rezultă:

$$K_0^2 = C \text{ sau: } J_1^2 \cdot \omega_x^2 + J_2^2 \cdot \omega_y^2 + J_3^2 \cdot \omega_z^2 = \text{const.} \quad (14.10)$$

În concluzie, se poate reține că în cazul Euler-Poinsot mișcarea se face păstrându-se momentul cinetic constant.

Folosind expresiile pentru energia cinetică și pentru momentul cinetic și încă una din ecuațiile lui Euler, se obține un sistem de ecuații care permite o cale mai ușoară de integrare, și anume :

$$J_1 \cdot \omega_x^2 + J_2 \cdot \omega_y^2 + J_3 \cdot \omega_z^2 = 2E; \quad J_1^2 \cdot \omega_x^2 + J_2^2 \cdot \omega_y^2 + J_3^2 \cdot \omega_z^2 = K_0^2; \\ J_2 \cdot \omega_y + \omega_z \cdot \omega_x (J_1 - J_3) = 0. \quad (14.11)$$

Acest sistem este echivalent cu sistemul format de ecuațiile lui Euler. Necunoscutele sînt ω_x , ω_y , ω_z (vitezele unghiulare funcții de timp). Pentru simplificare se poate face ipoteza :

$$J_1 > J_2 > J_3. \quad (14.12)$$

Înmulțind prima ecuație din sistem cu $(-J_3)$ și adunînd cu a doua se obține :

$$\omega_x^2 (J_1^2 - J_1 \cdot J_3) + \omega_y^2 (J_2^2 - J_2 \cdot J_3) = (K_0^2 - 2E \cdot J_3). \quad (14.13)$$

Se utilizează notația :

$$J_1^2 - J_1 \cdot J_3 = a^2; \quad J_2^2 - J_2 \cdot J_3 = b^2; \quad K_0^2 - 2E \cdot J_3 = c^2. \quad (14.14)$$

Se obține :

$$\omega_x = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \omega_y^2} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{c^2}{b^2} - \omega_y^2} = C_1 \sqrt{\alpha^2 - \omega_y^2}$$

unde :

$$C_1 = \frac{b}{a} \quad \text{și} \quad \alpha^2 = \frac{c^2}{b^2} \quad (14.15)$$

În mod asemănător se înmulțește prima ecuație cu $(-J_1)$ și se adună cu a doua ecuație din sistem ; se obține :

$$\omega_y^2 (-J_1 \cdot J_2 + J_2^2) + \omega_z^2 (-J_1 \cdot J_3 + J_3^2) = K_0^2 - 2E \cdot J_1. \quad (14.16)$$

Dacă se notează :

$$J_1 \cdot J_2 - J_2^2 = b_1^2; \quad J_1 \cdot J_3 - J_3^2 = a_1^2; \quad 2E \cdot J_1 - K_0^2 = c_1^2, \quad (14.17)$$

se obține, în mod asemănător :

$$\omega_z = \frac{b_1}{a_1} \sqrt{\frac{c_1^2}{b_1^2} - \omega_y^2} = C_2 \sqrt{\beta^2 - \omega_y^2},$$

unde :

$$C_2 = \frac{b_1}{a_1}; \quad \frac{c_1^2}{b_1^2} = \beta^2.$$

Folosind valorile obținute pentru ω_x și ω_z se obține din ecuația a treia din sistemul de ecuații Euler, relația :

$$J_2 \frac{d\omega_y}{dt} + (J_1 - J_3) C_1 C_2 \sqrt{(\alpha^2 - \omega_y^2)(\beta^2 - \omega_y^2)} = 0. \quad (14.18)$$

Această relație se poate pune sub o formă convenabilă separînd variabilele :

$$\frac{d\omega_y}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega_y^2)(\beta^2 - \omega_y^2)}} = C_3 \cdot dt, \quad (14.19)$$

unde s-a notat :

$$\frac{J_3 - J_1}{J_2} C_1 \cdot C_2 = C_3. \quad (14.20)$$

Se poate ușor observa din expresiile obținute pentru ω_x și ω_z , că pentru ca acestea să aibă valori reale, trebuie să avem :

$$\omega_y^2 < \alpha^2 \quad \text{și} \quad \omega_y^2 < \beta^2. \quad (14.21)$$

Totodată se mai poate deduce, în baza ipotezelor și a substituțiilor făcute, că $\alpha > \beta$ și că rezultă :

$$\omega_y^2 < \beta^2. \quad (14.22)$$

Rezultă că valorile lui ω_y sînt cuprinse între $-\beta$ și $+\beta$, adică :

$$\omega_y(t) \in [-\beta, +\beta],$$

ceea ce permite să se afirme că funcția $\omega_y(t)$ este o funcție mărginită. Dacă se procedează la o schimbare de variabilă de felul :

$$\omega_y = \beta \cdot x, \quad (14.23)$$

expresia ecuației de mai sus (14.19) devine :

$$\frac{\beta \cdot dx}{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2 \cdot x^2)(\beta^2 - \beta^2 \cdot x^2)}} = C_3 \cdot dt,$$

sau :

$$\frac{\beta \, dx}{\alpha \cdot \beta \sqrt{\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} x^2\right)(1 - x^2)}} = C_3 \cdot dt. \quad (14.24)$$

Dacă se notează :

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = k^2 \quad \text{și} \quad \alpha \cdot C_3 = \gamma, \quad \text{se obține :}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 \cdot x^2)}} = \gamma \cdot dt.$$

Integrînd, se obține :

$$\int_{t_0}^t \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 \cdot x^2)}} = \gamma(t - t_0), \quad (14.25)$$

unde : t_0 este timpul pentru $\omega_y = 0$ și integrala se efectuează începînd de la această valoare a timpului.

Dacă se notează : $\gamma(t - t_0) = u$ și se ține seama că integrala din membrul stîng este o integrală eliptică, se poate scrie :

$$x = sn \, u; \quad (14.26)$$

unde : $sn \, u$ este funcția eliptică sinus de amplitudine u și este o funcție periodică în u , deci de timp.

Se poate considera că ω_x și ω_z se pot determina în funcție de ω_y , deci cu funcții periodice de timp și că deci sistemul este rezolvat.

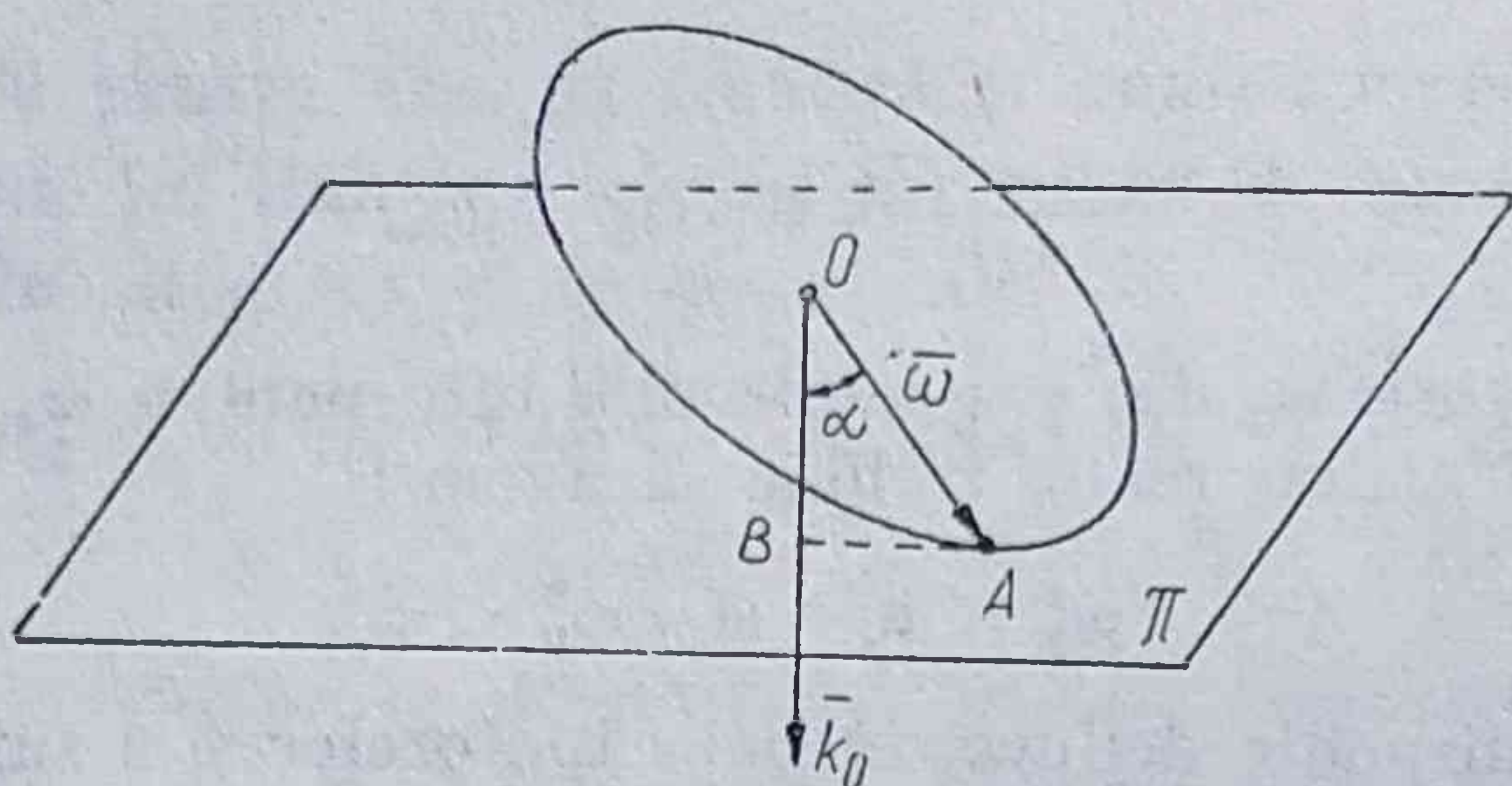


Fig. 14.2

Observație. S-a obținut mai sus relația :

$$J_1 \cdot \omega_x^2 + J_2 \cdot \omega_y^2 + J_3 \cdot \omega_z^2 = 2E.$$

Notînd :

$$\omega_x^2 = x^2 ; \quad \omega_y^2 = y^2 ; \quad \omega_z^2 = z^2,$$

se obține relația :

$$J_1 \cdot x^2 + J_2 \cdot y^2 + J_3 \cdot z^2 = 2E.$$

Această expresie poartă numele de *elipsoidul energetic* sau *elipsoidul lui Poinsot*, deoarece ea poate fi interpretată ca fiind ecuația unui elipsoid. Se poate ușor observa că elipsoidul de inerție are o expresie asemănătoare, și anume :

$$J_1 \cdot x^2 + J_2 \cdot y^2 + J_3 \cdot z^2 = 1. \quad (14.27)$$

Rezultă că cei doi elipsoizi sînt similari, adică concentrici și omofocali. Folosind expresia momentului cinetic \bar{K}_0 și înmulțindu-l scalar cu $\bar{\omega}$ se obține :

$$\bar{K}_0 \cdot \bar{\omega} = J_1 \cdot \omega_x^2 + J_2 \cdot \omega_y^2 + J_3 \cdot \omega_z^2 = 2E = \text{const.}$$

Rezultă că proiecția vectorului viteză unghiulară $\bar{\omega}$ pe direcția vectorului moment cinetic \bar{K}_0 este o constantă, deoarece :

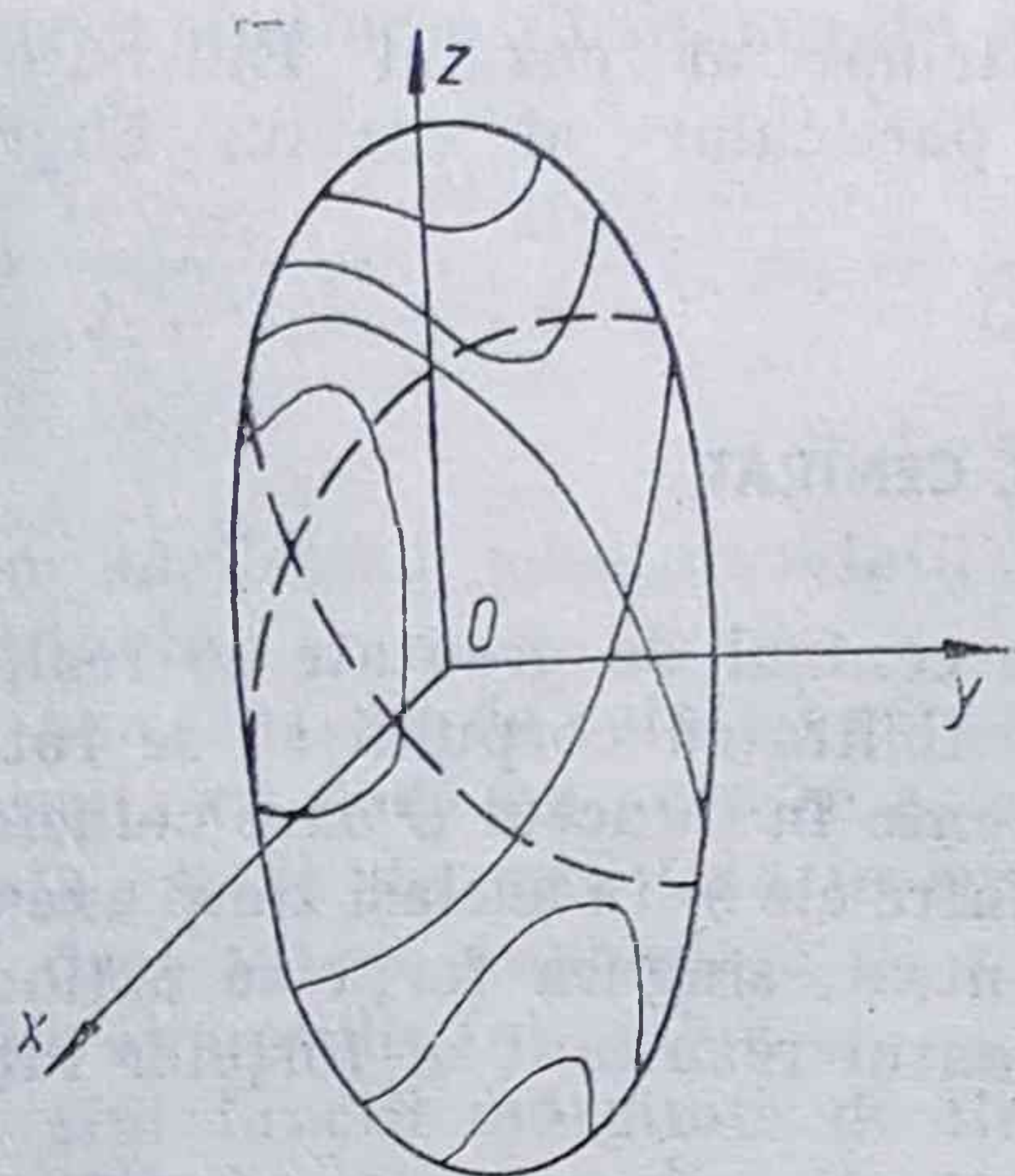
$$\frac{\bar{\omega} \cdot \bar{K}_0}{|\bar{K}_0|} = \frac{2E}{|\bar{K}_0|} = \text{const.} \quad (14.28, a)$$

Momentul cinetic \bar{K}_0 este constant atît ca mărime cît și ca direcție (fig. 14.2). Rezultă că vîrfurile A ale vectorului $\bar{\omega}$ se află într-un plan fix din spațiu, normal pe vectorul moment cinetic \bar{K}_0 . Distanța OB este dată de relația :

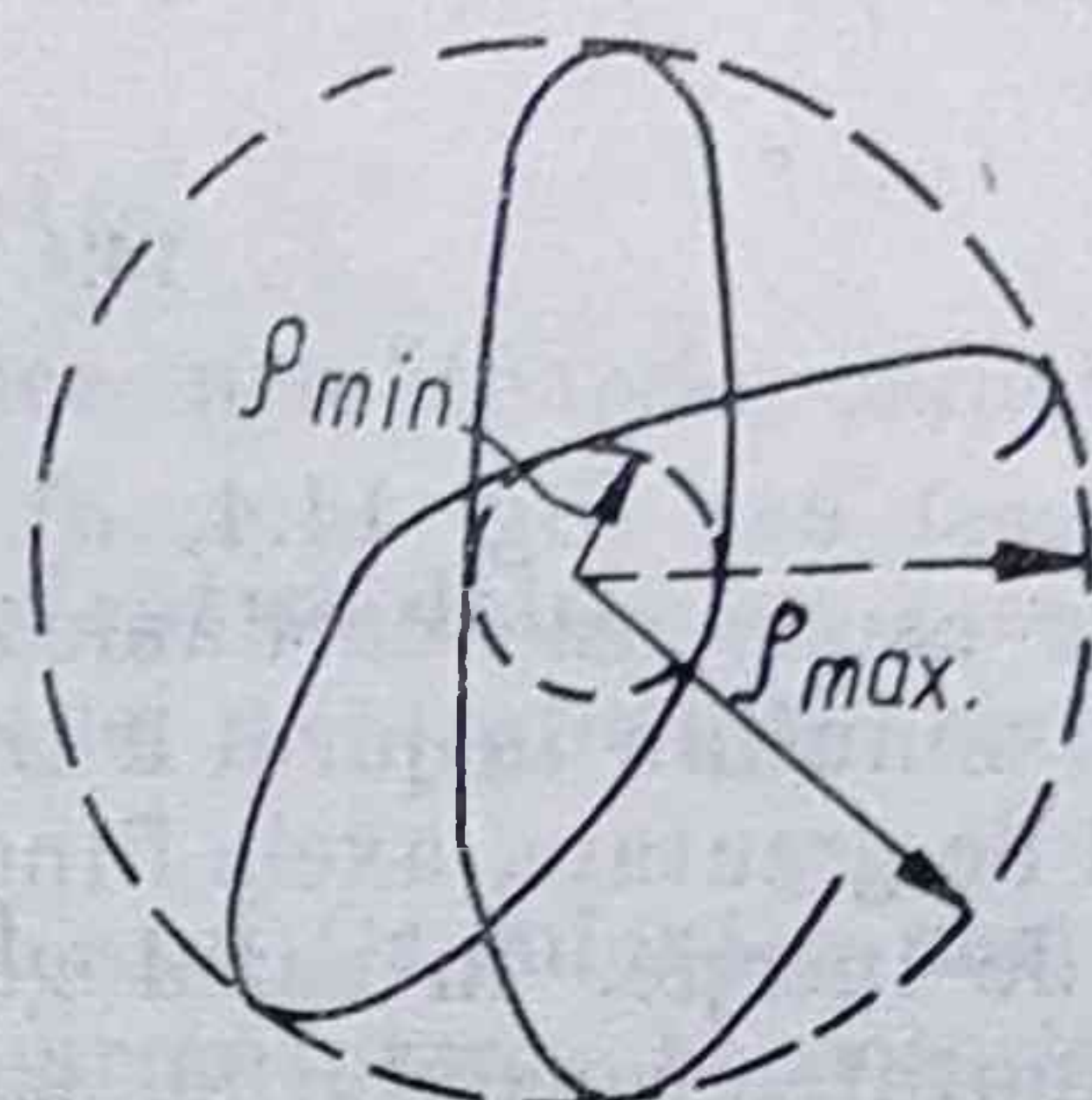
$$\text{pr}_{\bar{K}_0}(\bar{\omega}) = OB = \frac{\bar{K}_0 \cdot \bar{\omega}}{|\bar{K}_0|} = |\bar{\omega}| \cos \alpha = \frac{2E}{|\bar{K}_0|} = \text{const.} \quad (14.28, b)$$

Elipsoidul energetic al corpului se rostogolește fără alunecare pe un plan fix π în spațiu și pivotează în jurul axei de rotație $\bar{\omega}$. Vectorul \overline{OA} este tocmai vectorul viteză unghiulară.

Punctul A descrie pe elipsoid o curbă închisă care poartă numele de *polodie*; în același timp descrie pe planul fix π o altă curbă închisă ce poartă numele de *herpolodie*. Polodia rezultă din intersecția conului polodie cu elipsoidul (fig. 14.3, a), iar herpolodia rezultă din intersecția conului herpolodie cu planul fix (fig. 14.3, b).



a



b

Fig. 14.3

14.4. GIROSCOPUL

Este deosebit de interesant și mai ales util să se ia în considerație cazul solidului rigid de revoluție care are punctul fix chiar pe axa de simetrie (deci este suspendat într-un punct al axei sale de simetrie) și se rotește cu viteză unghiulară mare în jurul axei sale de simetrie. Aplicațiile tehnice ale giroscopului sînt multiple și deosebit de interesante prin utilitatea lor pentru aparate direcționale, de controlat și dirijat avioanele, vapoarele, rachetele etc.

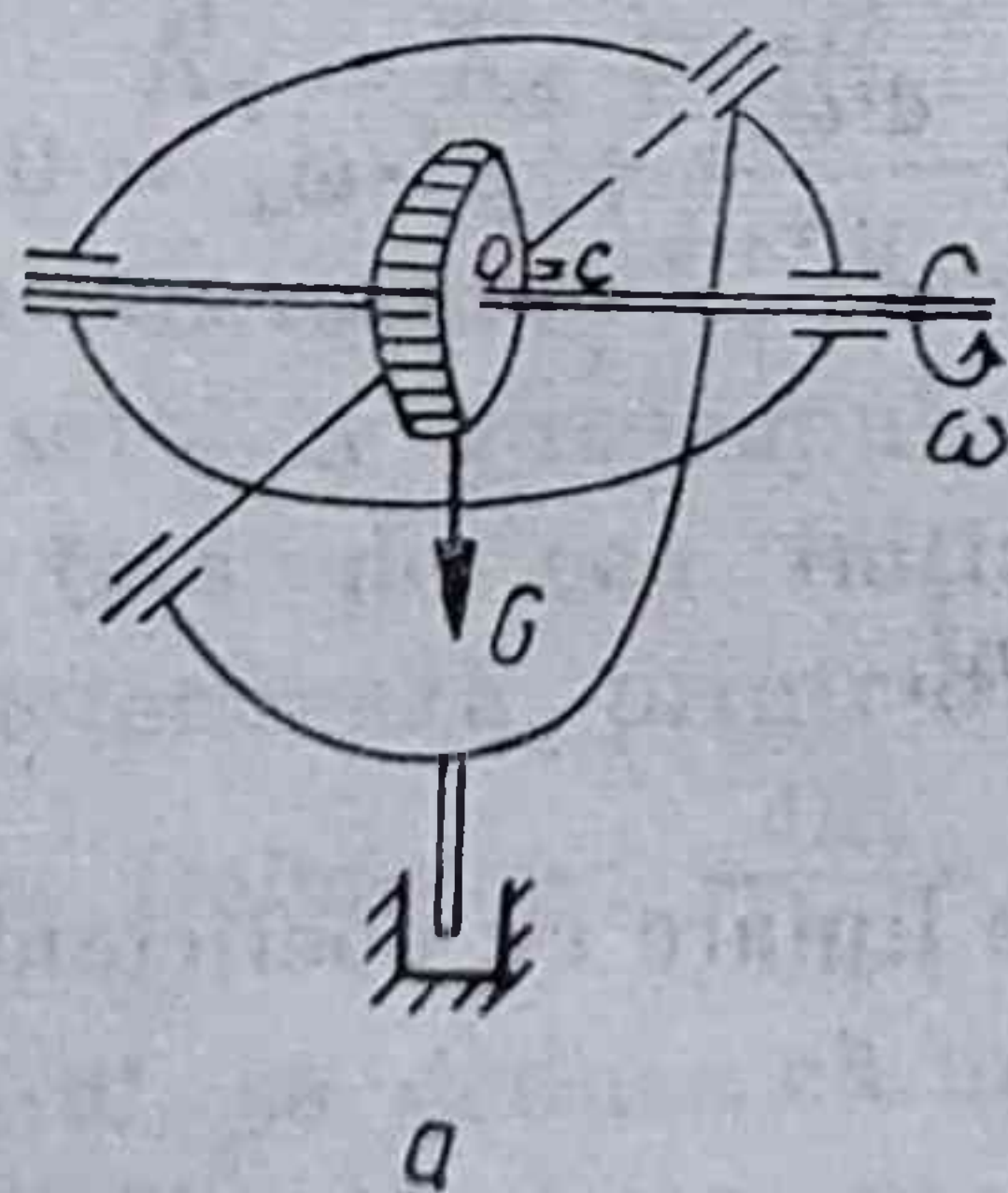
Deoarece rigidul este de revoluție, de obicei se consideră axa de simetrie drept axa Oz și rezultă că $J_x = J_y$ și $J_z > J_x$. Axele $Oxyz$ sînt și axe principale de inerție, astfel că J_x, J_y, J_z devin momente principale de inerție și se poate scrie :

$$J_1 = J_2; \quad J_3 > J_1.$$

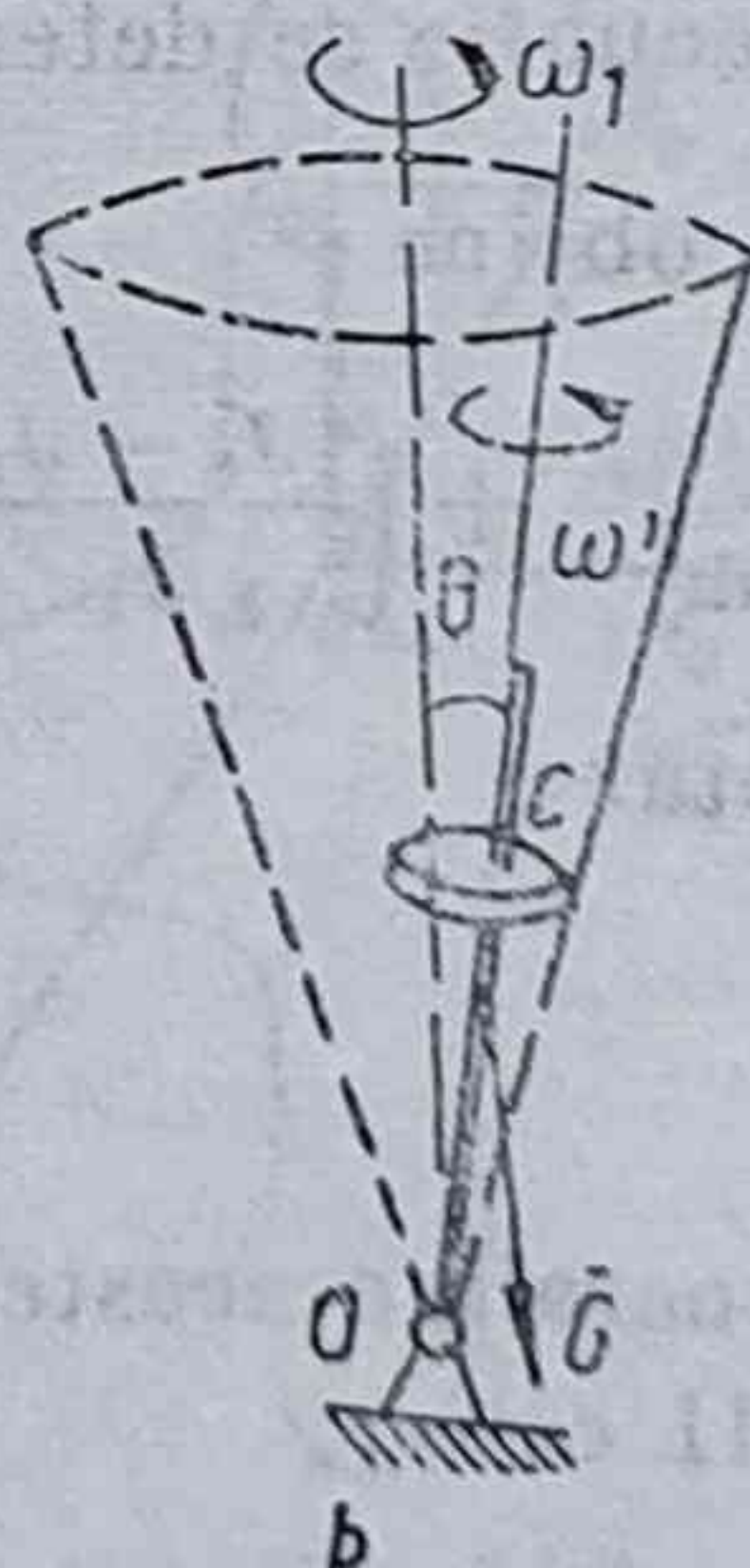
Se disting două categorii de giroscop, și anume :

— giroscop centrat, caracterizat prin faptul că punctul de suspensie coincide cu centrul de greutate (fig. 14.4, a);

— giroscopul necentrat — denumit și giroscop greu — caracterizat prin faptul că punctul fix O nu coincide cu centrul de greutate, dar se află pe axa de simetrie (fig. 14.4, b).



a



b

Fig. 14.4

Giroscopul centrat este un caz particular al cazului Euler-Poinsot, iar, giroscopul necentrat este un caz particular al cazului Lagrange-Poisson.

14.4.1. GIROSCOPUL CENTRAT

În acest caz (fig. 14.4, a), suspensia în centrul de greutate se realizează printr-o „suspensie cardanică” care dă posibilitatea corpului să se rotească chiar și simultan în jurul a trei axe concurente în punctul O care coincide cu centrul de greutate, axele fiind ortogonale între ele și în același timp axe principale de inerție. În cazul giroscopului centrat, singura forță ce acționează este greutatea corpului și, ca atare, momentul resultant al forțelor față de punctul fix este nul. Se poate deci scrie :

$$\begin{aligned} M_x &= M_y = M_z = 0 ; \\ J_1 &= J_2 \quad \text{și} \quad J_3 > J_1. \end{aligned}$$

Ecuatiile lui Euler devin :

$$\begin{aligned} J_1 \cdot \varepsilon_x + \omega_z \cdot \omega_y (J_3 - J_1) &= 0 ; \\ J_2 \cdot \varepsilon_y + \omega_z \cdot \omega_x (J_1 - J_3) &= 0 ; \\ J_3 \cdot \varepsilon_z + \omega_x \cdot \omega_y (J_1 - J_2) &= 0. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Observînd că $J_1 - J_2 = 0$, din a treia ecuație se obține :

$$\varepsilon_z = 0 \quad \text{și} \quad \text{deci} \quad \omega_z = \text{const.} = \omega_0.$$

Rezultă :

$$\frac{d\omega_x}{dt} + \frac{J_3 - J_1}{J_1} \omega_0 \cdot \omega_y = 0 \quad \text{și} \quad \frac{d\omega_y}{dt} + \frac{J_1 - J_3}{J_1} \omega_0 \cdot \omega_x = 0. \quad (14.9)$$

Din prima ecuație se obține :

$$\frac{d^2\omega_x}{dt^2} + \frac{J_3 - J_1}{J_1} \omega_0 \frac{d\omega_y}{dt} = 0 ; \quad (14.10)$$

din această ecuație se determină $\frac{d\omega_y}{dt}$ și se introduce în a doua ecuație a sistemului ; se obține :

$$\frac{d^2\omega_x}{dt^2} + \left(\frac{J_3 - J_1}{J_1} \right)^2 \omega_0^2 \cdot \omega_x = 0 \quad \text{sau} : \quad \frac{d^2\omega_x}{dt^2} + p^2 \cdot \omega_x = 0, \quad (14.11)$$

unde s-a notat :

$$\left(\frac{J_3 - J_1}{J_1} \omega_0 \right)^2 = p^2. \quad (14.12)$$

Soluția generală a acestei ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți de ordinul II este :

$$\omega_x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt.$$

Introducînd această valoare în prima ecuație a sistemului, se obține expresia lui ω_y :

$$\omega_y = \frac{J_1}{(J_1 - J_3)\omega_0} \cdot \frac{d\omega_x}{dt}; \quad \omega_y = \frac{J_1}{(J_1 - J_3)\omega_0} (-C_1 \cdot p \sin pt + C_2 \cdot p \cos pt) = -C_1 \sin pt + C_2 \cos pt. \quad (14.13)$$

Din analizarea acestor relații se pot deduce următoarele caracteristici importante :

— axa Oz (axa de rotație) este stabilă. Acest fapt se datorează proprietății cunoscute că dacă un corp se rotește în jurul unei axe principale de inerție, aceasta este o dreaptă fixă în spațiu ;

— dacă viteza unghiulară de rotație în jurul axei Oz suferă o perturbare, atunci expresiile funcțiilor ω_x și ω_y prezintă următoarele caracteristici :

sînt funcții mărginite de timp ;

sînt funcții periodice de timp, cu perioadă mică ; expresia perioadei este :

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \frac{J_1}{(J_3 - J_1)\omega_0}. \quad (14.14)$$

În cazul giroscopului ω_0 este foarte mare și $J_3 \gg J_1$; se poate deduce că valorile lui T rezultă a fi mici. Se poate deci constata că axa giroscopului păstrează o poziție stabilă, apropiată de poziția inițială.

14.4.1.1. Efectul giroscopic

Pentru a scoate în evidență acest fenomen, se consideră un giroscop centrat, care se rotește în jurul unei axe principale centrale, de inerție, care se consideră drept axa Oz (fig. 14.5).

Așa cum s-a arătat, mișcarea giroscopului are în acest caz un caracter de stabilitate mare astfel că vectorul moment cinetic în raport cu punctul O se păstrează constant ca mărime și direcție, axa Oz fiind o axă stabilă de rotație a giroscopului.

Dacă asupra giroscopului se acționează cu o forță \vec{F} pe o direcție paralelă cu axa Ox , se constată că giroscopul se înclină către axa Oy . În fapt, forța \vec{F} produce, în raport cu punctul fix O , un moment \vec{M}_0 care are direcția axei Oy . Acest moment produce o variație a momentului cinetic, care devine :

$$\vec{K}'_0 = \vec{K}_0 + d\vec{K}_0.$$

Suportul vectorului \vec{K}'_0 constituie noua axă de rotație a giroscopului, care este înclinată față de cea inițială cu $d\psi$, și se caracterizează printr-o accentuată stabilitate. Deoarece : $\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0$ sau :

$d\vec{K}_0 = \vec{M}_0 \cdot dt$, se deduce că momentul \vec{M}_0 are aceeași direcție și sens cu vectorul $d\vec{K}_0$

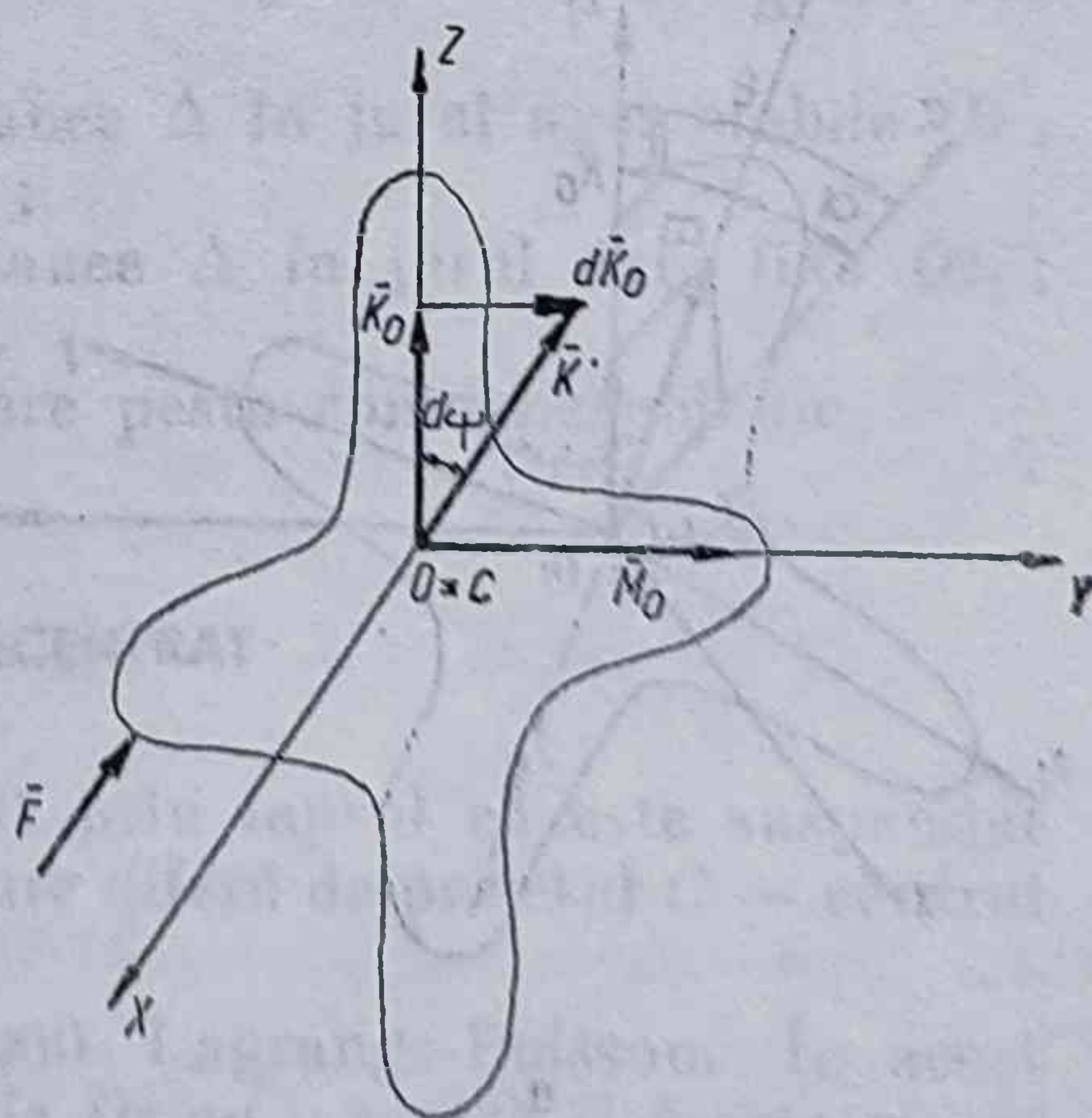


Fig. 14.5

care constituie variația momentului cinetic și exprimă deplasarea axei de rotație a giroscopului sub efectul acțiunii forței \vec{F} .

Rezultă că giroscopul nu se deplasează în sensul forței, își deplasează axa de rotație pe o direcție perpendiculară pe forță, și anume în sensul momentului \vec{M}_0 .

Apare deci ceea ce se numește *efectul giroscopic* sau, mai concret, *cuplul giroscopic*. În baza principiului acțiunii și reacțiunii, la acțiunea perturbatoare a momentului produs de forța \vec{F} giroscopul se opune cu un moment egal și de sens contrar care poartă numele de *cuplu giroscopic*.

Deci :

$$\vec{M}_g = -\vec{M}_0. \quad (14.15)$$

14.4.1.2. Mișcarea de precesie regulată

Această mișcare are loc întotdeauna în cazul Euler-Poinsot, când elipsoidul de inerție este de revoluție. Corpul solid rigid se rotește cu viteza unghiulară $\vec{\omega}'$ în jurul axei Oz care este axa sa de simetrie (fig. 14.6, a), iar axa Oz se rotește în același timp în jurul unei axe fixe Oz_1 , cu viteză unghiulară $\vec{\omega}_1$. O astfel de mișcare se numește mișcare de precesie, iar dacă ω' și ω_1 sînt constante, atunci avem o *mișcare de precesie regulată*.

Momentul cinetic \vec{K}_0 este un vector constant dirijat după axa fixă Oz_1 (fig. 14.6).

După direcția axei Oz vom avea :

$$K_z = K_0 \cdot \cos \theta, \quad (14.16)$$

și deoarece :

$$K_z = J_3 \cdot \omega_z = J_3 \cdot \omega_0,$$

rezultă că :

$$\cos \theta = \frac{J_3 \cdot \omega_0}{K_0} = \text{const.}$$

Se reține, ca o primă observație importantă, proprietatea că *unghiul de nutație θ este constant tot timpul mișcării*.

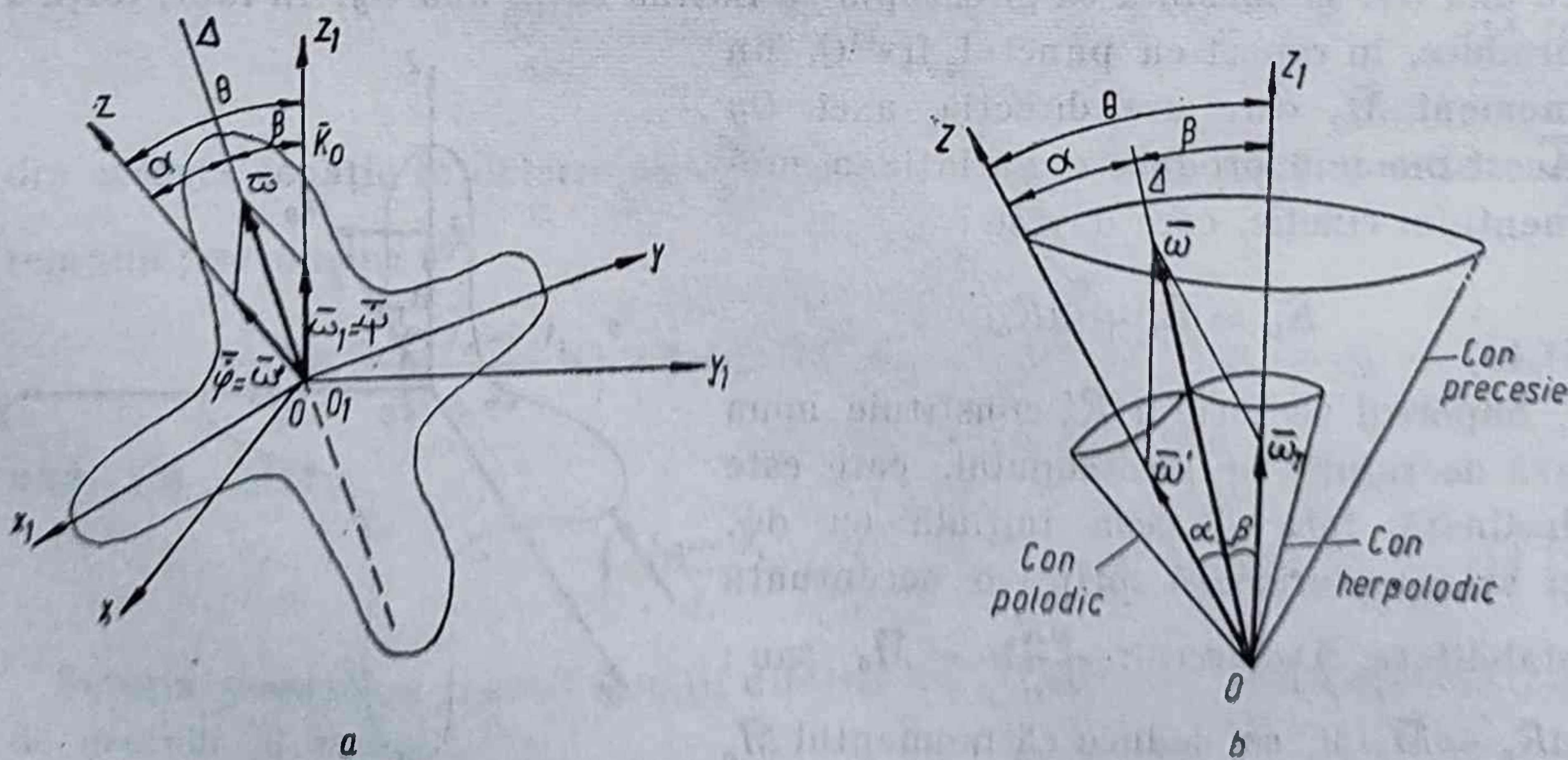


Fig. 14.6

Observînd că energia cinetică este constantă, adică :

$$E = \frac{1}{2} (J_1 \cdot \omega_x^2 + J_2 \cdot \omega_y^2 + J_3 \cdot \omega_z^2) = \frac{1}{2} J_1 (\omega_x^2 + \omega_y^2) + J_3 \cdot \omega_z^2 = \text{const.}, \quad (14.17)$$

rezultă :

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{const.}$$

și deci :

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \omega^2 = \text{const.} \quad (14.18)$$

Se reține o a doua proprietate importantă, și anume că : *viteza unghiulară este constantă în tot timpul mișcării.*

Observînd că $\omega_z = \omega \cdot \cos \alpha = \text{const.}$, rezultă : $\cos \alpha = \text{const.}$

De asemenea, se pot observa relațiile :

$K_0 = \text{const.}$; $\bar{K}_0 \cdot \bar{\omega} = \bar{\omega} \cdot K_0 \cdot \bar{u}_{oz1} = \text{const.} = K_0 \cdot \omega \cdot \cos \beta$ și deci : $\cos \beta = \text{const.}$, unde : \bar{u}_{oz1} este versorul direcției axei Oz_1 .

Rezultă o a treia proprietate importantă care trebuie reținută, și anume că, *unghiurile α și β au valori constante tot timpul mișcării.* Deci : $\theta = \alpha + \beta = \text{const.}$ și $\bar{\omega} = \dot{\varphi} + \dot{\psi} + \dot{\theta}$ și deci : $\dot{\theta} = 0$. Se mai poate scrie :

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi} \cdot \bar{u}_{oz} + \dot{\psi} \cdot \bar{u}_{oz1},$$

\bar{u}_{oz} și \bar{u}_{oz1} fiind versorii axelor Oz și Oz_1 . Deoarece avem :

$$\dot{\varphi} = \omega \cos \alpha \text{ și } \dot{\psi} = \omega \cos \beta,$$

rezultă :

$$\dot{\varphi} = \omega \cos \alpha = \omega' = \text{const.} ;$$

$$\dot{\psi} = \omega \cos \beta = \omega_1 = \text{const.} \quad (14.19)$$

Aceste relații arată că rotația proprie și precesia sînt mișcări uniforme.

O imagine a mișcării giroscopului se poate intui folosind figura 14.6, b. Se disting în figură trei conuri :

conul de precesie — descris de axa mobilă Oz în jurul axei fixe Oz_1 ; are unghiul la vîrf 2θ ;

conul polodic — descris de axa instantanee Δ în jurul axei mobile Oz ; are unghiul la vîrf 2α ;

conul herpolodic — descris de axa instantanee Δ în jurul axei fixe Oz_1 ; are unghiul la vîrf 2β .

Conul polodic se rostogolește fără alunecare peste conul herpolodic.

14.4.2. GIROSCOPUL NECENTRAT

Acesta se deosebește de giroscopul centrat prin faptul că este suspendat într-un punct O de pe axa sa de simetrie Oz care diferă de punctul C — centrul său de masă. Avem $OC = \xi$.

Giroscopul necentrat se încadrează în cazul Lagrange-Poisson. În acest caz, corpul se rotește în jurul axei de simetrie Oz cu o viteză $\bar{\omega}$ foarte mare, iar Oz se rotește cu viteza $\bar{\omega}_1$ mică în jurul axei Oz_1 . Avem deci $\omega \gg \omega_1$.

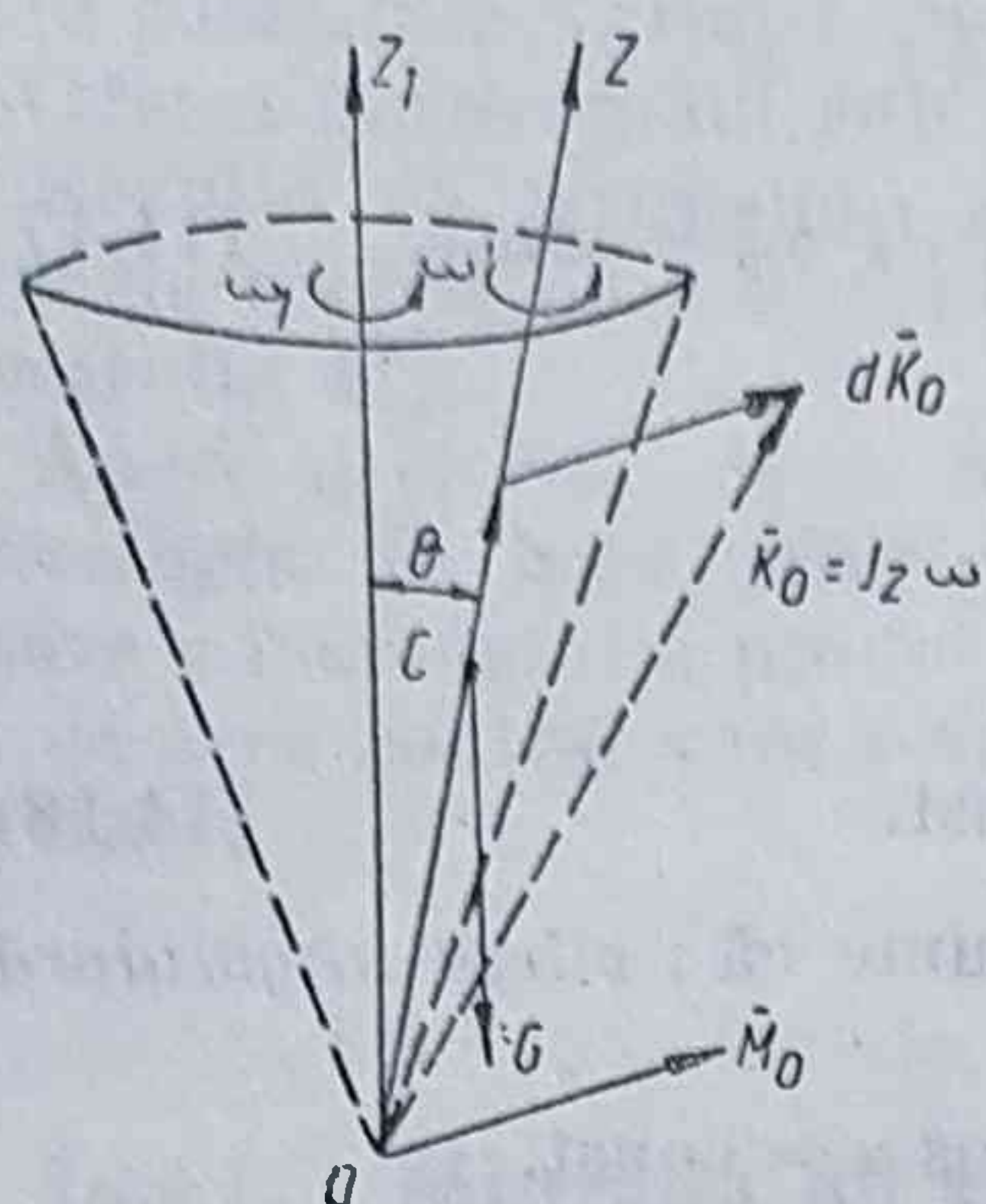


Fig. 14.7

Fenomenul giroscopic (cuplul giroscopic). Forța gravitațională G acționează în punctul C aflat pe axa de simetrie Oz care este și axă principală centrală de inerție față de care momentul de inerție este J_3 , și anume: $J_3 \geq J_1$. Momentul forței \bar{G} în raport cu punctul fix O este \bar{M}_0 (fig. 14.7) și produce o variație $d\bar{K}_0$ a momentului cinetic astfel că axa mobilă Oz se deplasează în sensul variației $d\bar{K}_0$. Se obțin relațiile:

$$\bar{K}_0 \approx J_3 \cdot \bar{\omega}' = J_z \cdot \bar{\omega}';$$

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{M}_0 = \bar{\omega}_1 \times \bar{K}_0 = \bar{\omega}_1 \times J_z \cdot \bar{\omega}',$$

$\bar{\omega}_1$ fiind viteza unghiulară cu care se rotește vectorul \bar{K}_0 în jurul axei Oz_1 .

Deci:

$$\bar{M}_0 \approx J_z \cdot \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}'. \quad (14.20)$$

Conform principiului acțiunii și reacțiunii rezultă că apare un cuplu giroscopic:

$$\bar{M}_g = -\bar{M}_0 \approx J_z \cdot \bar{\omega}' \times \bar{\omega}_1,$$

care acționează în O . Se observă că:

$$|\bar{M}_0| = J_z |\bar{\omega}_1| |\bar{\omega}'| \sin \theta = G \xi \sin \theta; \quad (14.21)$$

rezultă:

$$\omega_1 = \frac{G \xi}{J_z |\bar{\omega}'|}, \quad (14.22)$$

mărimea vitezei unghiulare de precesie este constantă, iar unghiul θ este de asemenea constant. Se poate reține concluzia că giroscopul necentrat, la care elipsoidul de inerție este de revoluție, are o mișcare de precesie regulată.

Mișcarea de precesie regulată. Constituie un caz particular de mișcare a giroscopului, deosebit de interesant, deoarece prezintă foarte multe aplicații în tehnică. Rigidul luat în considerare este de revoluție, astfel că se poate scrie $J_x = J_y$. Mișcarea în jurul unui punct fix se numește de precesie regulată dacă unghiurile lui Euler sînt exprimate sub forma:

$$\psi = \psi_0 + \omega_1 \cdot t; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega' \cdot t; \quad \theta = \theta_0, \text{ sau: } \dot{\psi} = \omega_1; \quad \dot{\varphi} = \omega'; \quad \dot{\theta} = 0.$$

Giroscopul efectuează o mișcare de precesie regulată, rotindu-se în același timp, cu $\omega = \text{const.}$ în jurul axei mobile Oz și cu $\omega_1 = \text{const.}$ în jurul axei fixe Oz_1 , și păstrînd unghiul de nutație θ constant (fig. 14.8).

Ecuatiile lui Euler capătă expresia:

$$J_1 \cdot \varepsilon_x + \omega_y \cdot \omega_z (J_3 - J_1) = M_x; \quad J_1 \cdot \varepsilon_y + \omega_z \cdot \omega_x (J_1 - J_3) = M_y; \quad J_3 \cdot \varepsilon_z = M_z. \quad (14.23)$$

Proiectînd vectorii $\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}'$ pe axele Ox , Oy , Oz se obțin proiecțiile vectorului $\bar{\omega}$ pe sistemul de axe mobil (fig. 14.9), care au expresiile:

$$\omega_x = \omega_1 \sin \theta \cdot \sin \varphi; \quad \omega_y = \omega_1 \sin \theta \cdot \cos \varphi; \quad \omega_z = \omega_1 \cos \theta + \omega'. \quad (14.24)$$

15.

MIȘCAREA GENERALĂ A RIGIDULUI

15.1. ECUAȚIILE DE MIȘCARE ÎN CAZUL UNUI CORP SOLID RIGID LIBER

Se consideră un corp solid rigid care are o mișcare generală, a cărei masă este M și care are drept axe principale centrale axele Gx, Gy, Gz în raport cu care se cunosc momentele de inerție principale centrale Jx, Jy, Jz .

Pentru studiul mișcării se utilizează un sistem de referință fix $O_1x_1y_1z_1$ față de care centrul de masă G este determinat prin vectorul de poziție OG . Punctul G are la un moment dat coordonatele x_G, y_G, z_G . Se folosește, de asemenea sistemul $Gx'y'z'$ ce are originea în G și axele mereu paralele cu axele sistemului fix O_1x_1, O_1y_1 și O_1z_1 . Poziția sistemului mobil $Gxyz$ față de $Gx'y'z'$ este precizată prin unghiurile lui Euler.

Considerînd că se cunosc forțele exterioare ce acționează asupra corpului solid rigid și condițiile inițiale, se studiază mișcarea corpului solid rigid. Pentru a efectua un studiu asupra mișcării generale, se procedează la descompunerea acestei mișcări în două mișcări componente simple, și anume:

— o mișcare de translație, cu viteza și accelerația centrului de masă G ca și cum toată masa corpului ar fi concentrată într-un punct în centrul de masă și asupra lui ar acționa rezultanta sistemului de forțe exterioare ce acționează asupra întregului corp;

— o mișcare de rotație în jurul unei axe mobile ce trece prin centrul de masă, ca și cum punctul G ar fi fix.

Conform teoremelor generale pentru prima mișcare, se poate scrie:

$$M \cdot \ddot{\vec{r}}_G = \sum \vec{F} \text{ sau: } M \cdot \ddot{x}_G = \sum X; \quad M \cdot \ddot{y}_G = \sum Y; \quad M \cdot \ddot{z}_G = \sum Z. \quad (15.1)$$

Aceste ecuații sînt raportate la sistemul fix. Pentru a doua mișcare se pot scrie relațiile:

$$\begin{aligned} J_x \cdot \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \cdot \omega_z &= \sum M_x; \\ J_y \cdot \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_z \cdot \omega_x &= \sum M_y; \\ J_z \cdot \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \cdot \omega_y &= \sum M_z; \end{aligned} \quad (15.2)$$

aceste ecuații sînt raportate la sistemul $Gxyz$ mobil.

Pentru studiul mișcării generale se dispune deci de un sistem de șase ecuații diferențiale, care integrate conduc la douăsprezece constante de integrare ce se pot determina dacă se cunosc 12 parametri corespunzători poziției corpului la un moment dat, de regulă corespunzători poziției inițiale.

Teoremele generale ale dinamicii aplicate în cazul solidului liber permit a se scrie relațiile:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \text{ și } \frac{d}{dt} \vec{K}_0 = \sum \vec{M}_{F_{ext}}. \quad (15.3, a)$$

Se obține un sistem de 6 ecuații diferențiale a căror soluționare duce la determinarea legilor de mișcare.

Aceste două teoreme pot fi scrise concentrat transformându-le în teorema tursorului. Se poate scrie :

$$\frac{d}{dt} \tau_c = \tau_{F ext} \quad (15.3, b)$$

unde :

τ_c este tursorul cinetic al solidului ;
 $\tau_{F ext}$ — tursorul forțelor exterioare.

15.2. ECUAȚIILE DE MIȘCARE ALE CORPULUI SOLID RIGID SUPUS LA LEGĂTURI

Un corp liber are șase grade de libertate.

Dacă se consideră un corp de forma unei sfere care se plasează pe un plan orizontal Oxy , atunci sfera va poseda cinci grade de libertate, astfel că poziția sa este determinată de coordonatele x, y și cele trei unghiuri ale lui Euler.

Dacă se consideră un corp solid rigid cu un punct fix, poziția sa este determinată prin cele trei unghiuri Euler și deci corpul are trei grade de libertate.

Asupra corpului supus la legături acționează un sistem de forțe format din forțele date (active) și forțele de legătură exterioare. Teoremele fundamentale ale mecanicii se pot scrie sub forma :

$$\tau_{f leg} + \tau_{f act} = \frac{d}{dt} \tau_c \quad (15.4)$$

care permite formarea a șase ecuații scalare și, dacă numărul de grade de libertate $n < 6$ se pot determina cei n parametri și cele $6-n$ mărimi ce caracterizează tursorul forțelor de legătură exterioare.

16.

CIOCNIRI

Ciocnirile sînt mișcări mecanice, denumite și mișcări impulsive, care se produc cu variația bruscă a vitezei, adică a impulsurilor. În cazul ciocnirilor, forțele acționează un timp foarte scurt cu intensitate foarte mare. Aceste forțe foarte mari poartă numele de forțe percutante. O noțiune importantă strict legată de fenomenul ciocnirii este *percuția*.

Percuția se exprimă prin relația

$$\bar{P} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} \cdot dt. \quad (16.1)$$

În această expresie, \bar{F} reprezintă rezultanta tuturor forțelor percutante care acționează în intervalul de timp (t_1, t_2) cît durează ciocnirea asupra corpului considerat.

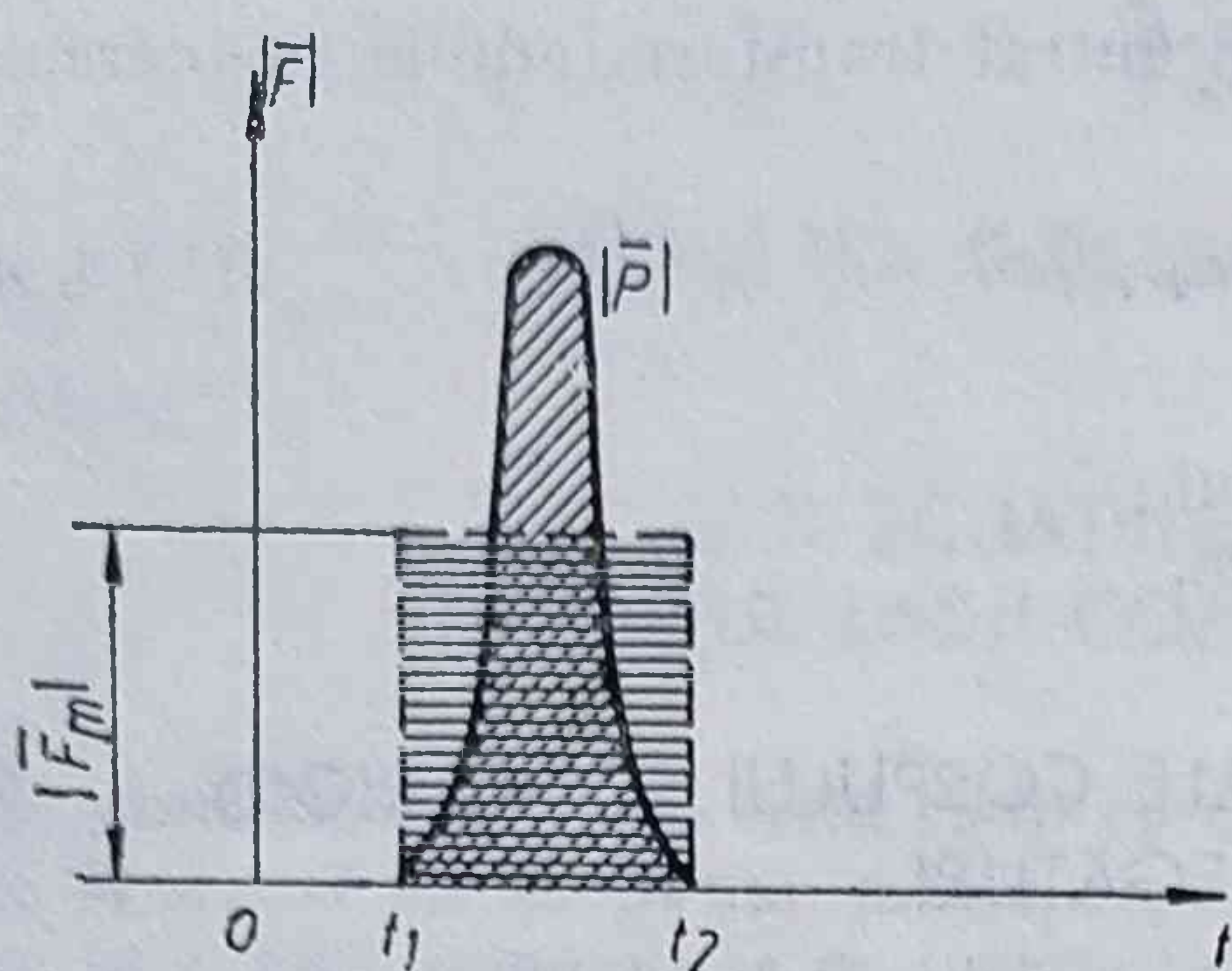


Fig. 16.1

În figura 16.1 este arătată interpretarea geometrică a acestei relații: aria cuprinsă sub curba ce reprezintă variația forței și aria cuprinsă sub acțiunea forței percutante medii sînt egale.

Ipotezele simplificatoare ale ciocnirii:

— fenomenul ciocnirii se petrece într-un timp foarte scurt, astfel încît corpurile care se ciocnesc se deplasează foarte puțin în timpul fenomenului de ciocnire; se poate considera că, în timpul ciocnirii, corpurile nu-și schimbă poziția. În acest mod se poate spune că ciocnirea este un fenomen local de repaos discontinuu, precedat și urmat de stări de mișcare continue;

— în timpul ciocnirii se consideră corpurile deformabile;

— timpul cît durează ciocnirea este foarte scurt;

— forțele percutante suferă variații foarte rapide dar ajung la valori foarte mari;

— forțele active obișnuite care acționează asupra corpului în tot cursul mișcării (greutatea, forța de frecare, etc.) au valori mici în comparație cu forțele percutante și, din acest motiv, pot fi neglijate;

— forțele de legătură devin percuții de legătură și, ca urmare, se poate aplica principiul acțiunii și reacțiunii.

16.1. TEOREMELE GENERALE APLICATE ÎN STUDIUL CIOCNIRII

16.1.1. TEOREMA IMPULSULUI

Se consideră un sistem de corpuri ce se ciocnesc în intervalul de timp t_1 și t_2 . Pentru o particulă materială se poate scrie relația:

$$\bar{H} = m \cdot \bar{v}_2 - m \cdot \bar{v}_1. \quad (16.3)$$

Pentru întregul sistem de puncte se poate scrie:

$$\sum m_i \cdot \bar{v}_2 - \sum m_i \cdot \bar{v}_1 = \sum \bar{P}, \quad (16.4)$$

unde:

$\sum m_i \cdot \bar{v}_2 = \bar{H}_2$ impulsul total final;

$\sum m_i \cdot \bar{v}_1 = \bar{H}_1$ impulsul total inițial.

Se poate scrie deci :

$$\bar{H}_2 - \bar{H}_1 = \sum \bar{P}, \quad (16.5)$$

care constituie *teorema impulsului* și se poate enunța astfel : *variația impulsului total în timpul ciocnirii este egală cu suma percuțiilor exterioare date și de legătură.*

16.1.2. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC

Pentru o particulă se poate scrie :

$$\bar{r} \times m \cdot \bar{v}_2 - \bar{r} \times m \bar{v}_1 = \bar{r} \times \bar{P}, \quad (16.6)$$

unde \bar{r} este vectorul de poziție al particulei față de reperul fix O .

Relația se mai poate scrie :

$$\bar{K}_2 - \bar{K}_1 = \bar{M}_0, \quad (16.7)$$

unde :

\bar{K}_1, \bar{K}_2 reprezintă momentul cinetic inițial și final ;

\bar{M}_0 — momentul percuțiilor.

Pentru întregul sistem de puncte materiale se poate scrie :

$$\sum \bar{r}_i \times m_i \cdot \bar{v}_{2i} - \sum \bar{r}_i \times m_i \cdot \bar{v}_{1i} = \sum \bar{r}_i \times \bar{P}_i,$$

sau

$$\bar{K}_2 - \bar{K}_1 = \sum \bar{r} \times \bar{P}, \quad (16.8)$$

care constituie *teorema momentului cinetic* și se poate enunța astfel : *variația momentului cinetic total în timpul unei ciocniri este egală cu suma momentelor percuțiilor exterioare date și de legătură.*

Cele două teoreme pot fi concentrate într-o singură teoremă, cunoscută sub numele de *teorema taylorului percuțiilor*.

Dacă \bar{H} și \bar{K} sînt elementele taylorului impulsurilor $\tau(\bar{H})$, iar $\sum \bar{P}$ și $\sum \bar{r} \times \bar{P}$ sînt elementele taylorului percuțiilor $\tau(\bar{P})$, se poate scrie concentrat :

$$\Delta \tau(\bar{H}) = \tau(\bar{P}), \quad (16.9)$$

care se poate enunța astfel : *variația taylorului impulsului total în timpul unei ciocniri este egal cu taylorul percuțiilor.*

16.1.3. TEOREMA VARIAȚIEI ENERGIEI CINETICE

Teorema impulsului pentru un punct M_i ce face parte dintr-un sistem de puncte materiale se poate scrie sub forma :

$$m_i \cdot \bar{v}_{i_2} - m_i \cdot \bar{v}_{i_1} = \bar{P}_i; \quad (16.10)$$

înmulțind scalar ambii membri ai acestei relații cu \bar{v}_{i_1} , se obține :

$$m_i(\bar{v}_{i_2} - \bar{v}_{i_1}) \cdot \bar{v}_{i_1} = \bar{P}_i \cdot \bar{v}_{i_1}.$$

Însumînd pentru toate punctele sistemului, se obține :

$$\sum m_i(\bar{v}_{i_2} - \bar{v}_{i_1}) \cdot \bar{v}_{i_1} = \sum \bar{P}_i \cdot \bar{v}_{i_1}. \quad (16.11)$$

Pentru a ajunge la o expresie convenabilă, se folosește expresia :

$$(\bar{v}_{i_2} - \bar{v}_{i_1}) \cdot \bar{v}_{i_2} = \frac{1}{2} (\bar{v}_{i_1} - \bar{v}_{i_2})^2 + \frac{1}{2} \bar{v}_{i_2}^2 - \frac{1}{2} \bar{v}_{i_1}^2,$$

și se obține :

$$\frac{1}{2} \sum m_i \cdot \bar{v}_{i_2}^2 - \frac{1}{2} \sum m_i \cdot \bar{v}_{i_1}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i (\bar{v}_{i_2} - \bar{v}_{i_1})^2 = \sum \bar{P}_i \cdot \bar{v}_{i_2}. \quad (16.12)$$

În această relație se poate observa că termenii au semnificații fizice bine determinate, și anume :

$+\frac{1}{2} \sum m_i \cdot \bar{v}_{i_1}^2 = E_1$ este energia cinetică a sistemului de puncte materiale în momentul inițial al ciocnirii ;

$+\frac{1}{2} \sum m_i \cdot \bar{v}_{i_2}^2 = E_2$ este energia cinetică a sistemului de puncte în momentul final al ciocnirii ;

$+\frac{1}{2} \sum m_i (\bar{v}_{i_2} - \bar{v}_{i_1})^2 = E'$ este energia cinetică pe care ar avea-o sistemul dacă orice punct din el ar avea viteza pierdută $(\bar{v}_{i_2} - \bar{v}_{i_1})$.

Folosind aceste notații, se poate scrie :

$$E_2 - E_1 + E' = \sum \bar{P}_i \cdot \bar{v}_{i_2}$$

sau :

$$E' - (E_1 - E_2) = \sum \bar{P}_i \cdot \bar{v}_{i_2}, \quad (16.13)$$

care constituie expresia *teoremei variației energiei cinetice* care se poate enunța astfel : diferența dintre energia cinetică corespunzătoare vitezelor pierdute (E_p) și dintre variația energiei cinetice din timpul ciocnirii punctelor din sistem ($E_1 - E_2 = \Delta E$) este echivalentă cu suma produselor scalare dintre percuțiile aplicate punctelor din sistem și vitezele lor finale.

Pentru înțelegerea corectă a relației de mai sus este util a se preciza semnificația simbolurilor și, în acest scop se menționează că prin suma percuțiilor $\sum \bar{P}_i$, în cazul unui sistem, se înțelege suma percuțiilor exterioare (active sau date și de legătură) și suma percuțiilor interioare :

$$\sum \bar{P}_i = \sum \bar{P}_{i \text{ ext}} + \sum \bar{P}_{i \text{ int}}. \quad (16.14)$$

În cazul corpului solid rigid $\sum \bar{P}_{i \text{ int}} = 0$ și rezultă :

$$\sum \bar{P}_i = \sum \bar{P}_{i \text{ ext}}. \quad (16.15)$$

Dacă se ia în considerare cazul particular, în care vitezele sînt perpendiculare pe direcția percuțiilor exterioare asupra unui corp solid rigid, atunci termenul : $\sum \bar{P}_i \cdot \bar{v}_{i_2} = 0$ și relația (16.13) devine :

$$E_1 - E_2 = E_p. \quad (16.16)$$

Această situație este posibilă în primul rînd în cazul sistemelor de corpuri netede, fără frecare. Relația (16.16) este cunoscută sub numele de *teorema lui Carnot* și se poate enunța după cum urmează : în cazul unui sistem de corpuri rigide între care nu se produc forțe de frecare, variația energiei cinetice din timpul ciocnirii este egală cu energia corespunzătoare vitezelor pierdute.

Observație. În timpul ciocnirii nu se poate aplica, în vederea studierii și determinării mișcării, teorema energiei cinetice, deoarece corpurile sînt deformabile și o parte din energia cinetică se transformă în alte forme de energie (calorică, de deformare etc.).

16.2. CIOCNIREA CENTRICĂ A DOUĂ SFERE

De regulă, în studiul ciocnirilor a două corpuri care au mișcări de translație, acestea se asimilează drept sfere.

În acest scop se consideră două corpuri sferice O_1 și O_2 (fig. 16.2, a) de mase m_1 și m_2 care se deplasează pe direcția ce unește centrele celor două sfere urmînd a se ciocni. Se presupune că se cunosc vitezele \vec{v}_1 și \vec{v}_2 ale celor două corpuri în momentul dinaintea începerii ciocnirii. Se presupune că $\vec{v}_1 > \vec{v}_2$.

Este necesar să se determine vitezele \vec{v}'_1 și \vec{v}'_2 ale celor două sfere după ciocnire.

Problema se poate rezolva aplicînd teorema impulsului mai întîi întregului sistem și apoi fiecărui corp în parte. Se observă că : suma percuțiilor exterioare aplicate sistemului format din cele două bile pe direcția O_1O_2 , ce unește linia centrelor, este nulă și că, prin urmare, impulsul sistemului pe această direcție este conservativ și deci :

$$\vec{H}_2 - \vec{H}_1 = 0.$$

Impulsul total al sistemului pe direcția O_1O_2 în momentul dinainte de ciocnire este egal cu impulsul total pe aceeași direcție în momentul ce urmează imediat după ciocnire, adică :

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2. \quad (16.17)$$

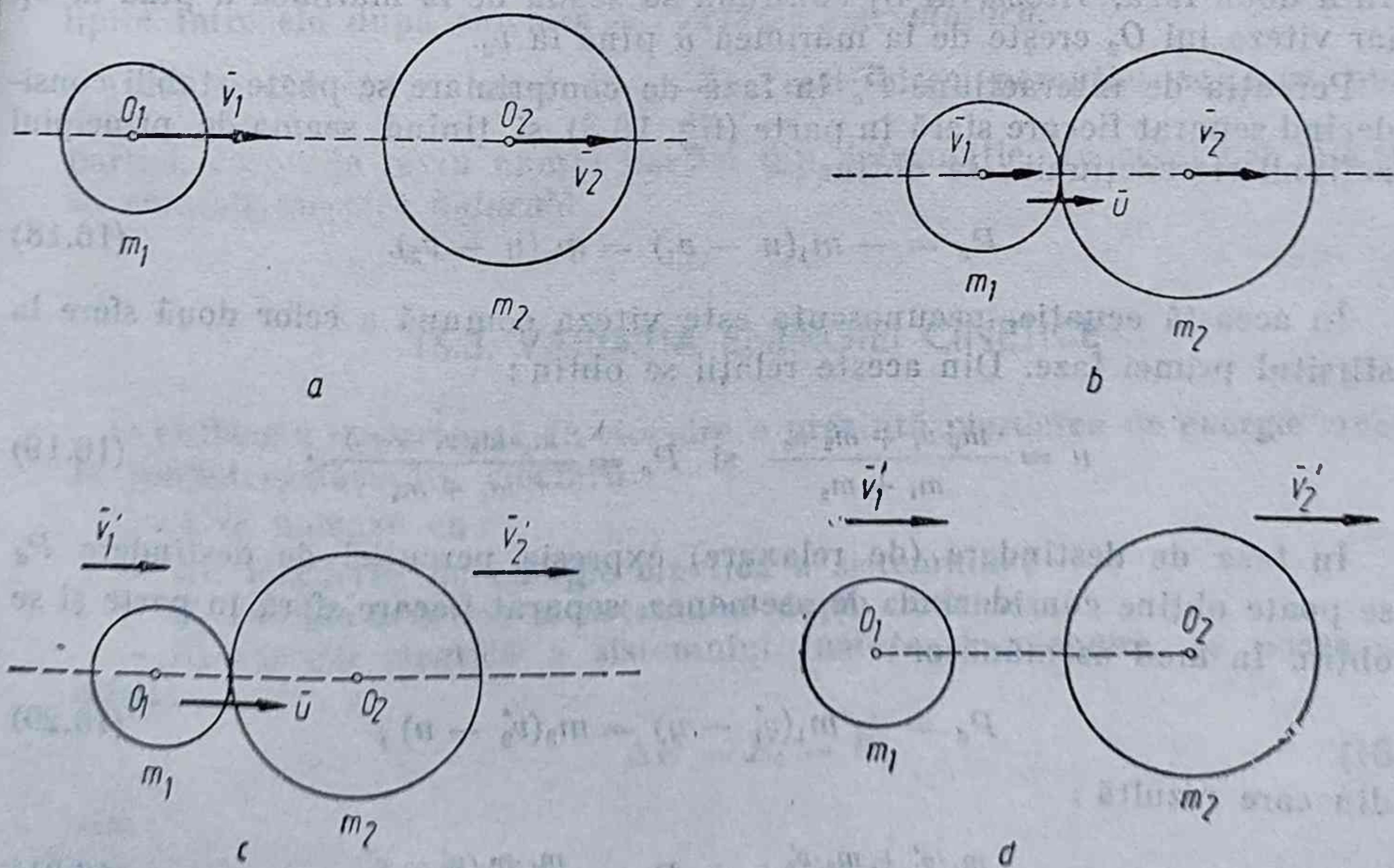


Fig. 16.2

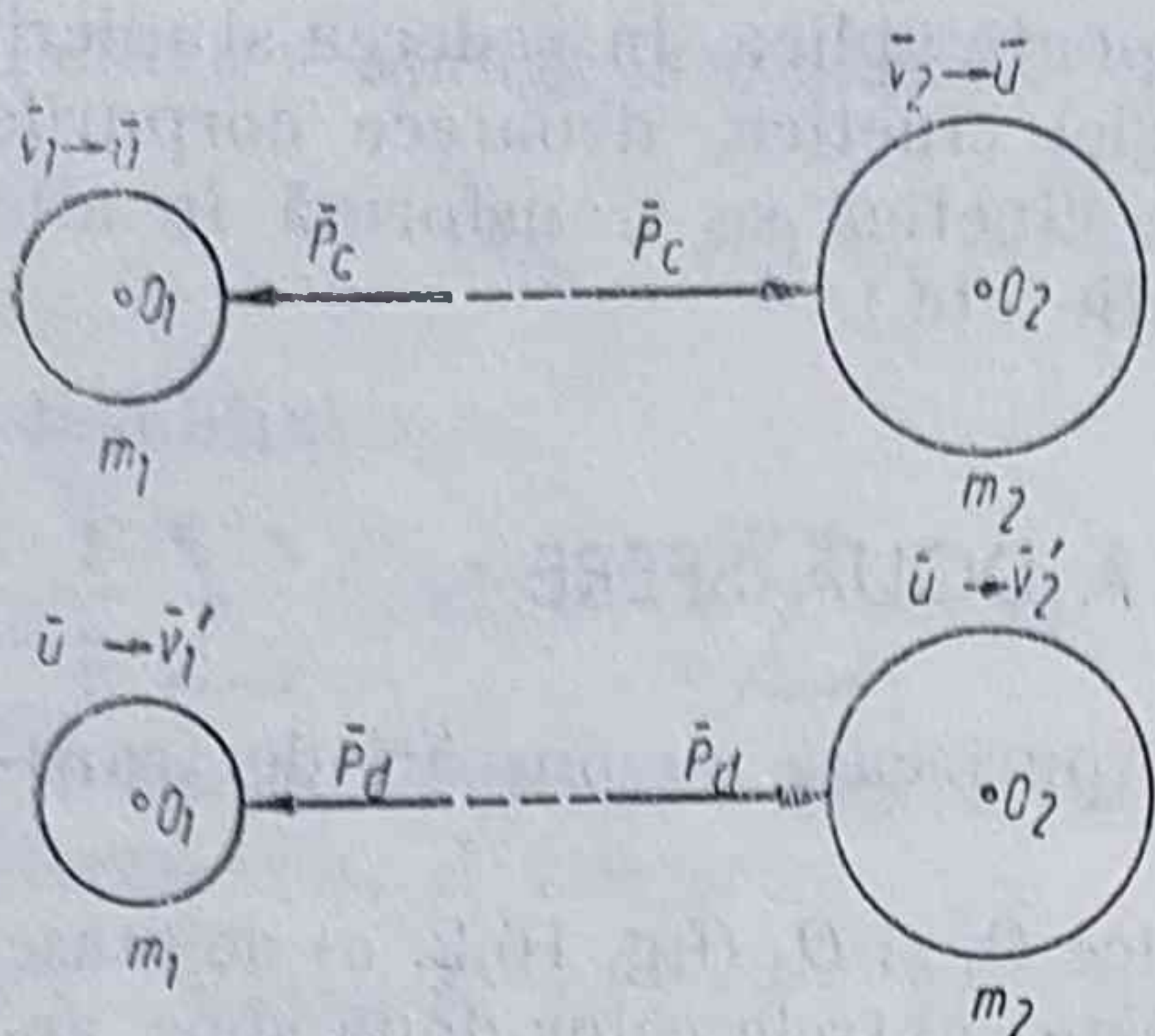


Fig. 16.3

Pentru a stabili o a doua ecuație necesară pentru determinarea necunoscutelor v_1' și v_2' , este necesar să se facă o analiză mai amănunțită a fenomenului ciocnirii. Din această analiză rezultă clar că este strict necesar să se renunțe la ipoteza simplificatoare enunțată încă la începutul cursului că avem în considerare corpuri solid rigide și să ținem seama de realitate, în sensul că în timpul ciocnirii corpurile se deformează sub acțiunea percuțiilor de interacțiune. Fenomenul de ciocnire se produce într-un timp foarte scurt care este logic și necesar să se împartă în două faze, și anume :

— o primă fază, denumită fază de comprimare, se caracterizează prin faptul că la început vitezele sînt diferite \vec{v}_1 și \vec{v}_2 și că în timpul acestei faze corpurile se comprimă pînă la sfîrșitul ei cînd amîndouă corpurile ajung la aceeași viteză comună \vec{u} . În prima fază, între cele două bile sferice acționează o percuție de interacțiune \vec{P}_c care produce mereu comprimarea celor două bile. Pentru simplificarea calculelor se poate admite că această percuție \vec{P}_c este constantă în tot timpul acestei faze ;

— o a doua fază, denumită fază de destindere, în care cele două corpuri au la început aceeași viteză și apoi ele se destind pînă în momentul în care se despart și au vitezele \vec{v}_1' și \vec{v}_2' . În tot timpul acestei faze percuția de legătură (de interacțiune) \vec{P}_d , numită percuția din faza de destindere, este considerată, pentru simplificare, constantă.

În prima fază sferele se comprimă atît timp cît viteza punctului O_1 va fi mai mare decît viteza punctului O_2 , adică pînă la egalarea celor două viteze. În a doua fază, viteza lui O_1 continuă să scadă de la mărimea \vec{u} pînă la \vec{v}_1' , iar viteza lui O_2 crește de la mărimea \vec{u} pînă la \vec{v}_2' .

Percuția de interacțiune \vec{P}_c în faza de comprimare se poate stabili considerînd separat fiecare sferă în parte (fig. 16.3) și ținînd seama de principiul acțiunii și reacțiunii ; se obține :

$$P_c = -m_1(u - v_1) = m_2(u - v_2). \quad (16.18)$$

În această ecuație, necunoscuta este viteza comună a celor două sfere la sfîrșitul primei faze. Din aceste relații se obțin :

$$u = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \quad \text{și} \quad P_c = \frac{m_1 \cdot m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \quad (16.19)$$

În faza de destindere (de relaxare) expresia percuției de destindere P_d se poate obține considerînd, de asemenea, separat fiecare sferă în parte și se obțin, în mod asemănător :

$$P_d = -m_1(v_1' - u) = m_2(v_2' - u); \quad (16.20)$$

din care rezultă :

$$u = \frac{m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'}{m_1 + m_2} \quad \text{și} \quad P_d = \frac{m_1 \cdot m_2 (v_2' - v_1')}{m_1 + m_2}. \quad (16.21)$$

Modul în care se desfășoară procesul de comprimare și de destindere al sferelor reflectă caracteristica deformării și ea este bine reprezentată prin raportul dintre mărimile percuțiilor, adică :

$$k = \frac{P_d}{P_c} = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} . \quad (16.22)$$

Acest raport poartă numele de *coeficient de restituire* sau de *coeficient de elasticitate*. Uneori se mai utilizează și denumirea de *coeficient de ciocnire*. Valoarea acestui coeficient de restituire poate fi determinată pe cale experimentală sau este considerată cunoscută.

Problema ciocnirii centrice a două sfere conduce astfel la rezolvarea a două ecuații :

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2 \text{ și } k = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} . \quad (16.23)$$

Rezolvînd sistemul, se obține :

$$v'_1 = v_1 - \frac{(v_1 - v_2)(1 + k)}{1 + \frac{m_1}{m_2}} ;$$

$$v'_2 = v_2 + \frac{(v_1 - v_2)(1 + k)}{1 + \frac{m_2}{m_1}} .$$

Valoarea coeficientului de restituire k este cuprinsă între 0 și 1. Dacă avem $k = 1$, atunci $P_c = P_d$; percuția din faza de comprimare este egală cu cea din faza de destindere și *ciocnirea este perfect elastică*.

Dacă avem $k = 0$, atunci rezultă $P_d = 0$; corpurile rămîn deformate și lipite între ele după ciocnire — *ciocnirea este plastică*.

Dacă $0 < k < 1$, atunci $k = \frac{P_d}{P_c}$; restituirea percuției se face numai parțial, corpurile revin numai parțial din deformație. În acest caz ciocnirea se numește *ciocnire naturală*.

16.3. VARIAȚIA ENERGIEI CINETICE

O problemă importantă în ciocnire o prezintă pierderea de energie cinetică în timpul desfășurării ciocnirii.

Dacă se notează cu :

- ΔE pierderea de energie cinetică a sistemului ;
- E_1 energia cinetică a sistemului după ciocnire ;
- E_0 energia cinetică a sistemului înainte de ciocnire, se poate scrie relația :

$$\Delta E = E_0 - E_1, \quad (16.25)$$

sau :

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_1 \cdot v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v'^2_2 \right) . \quad (16.26)$$

Folosind expresiile 16.24, expresia pierderii de energie cinetică prin ciocnire devine :

$$\Delta E = \frac{m_1 \cdot m_2}{2(m_1 + m_2)} (1 - k^2) (v_1 - v_2)^2. \quad (16.27)$$

Se poate remarca ușor, în cazul ciocnirii elastice, că atunci când $k = 1$, avem $\Delta E = 0$, deci nu avem pierderi de energie cinetică.

În cazul ciocnirii plastice, $k = 0$ deci avem pierdere de energie, și anume :

$$\Delta E = \frac{m_1 \cdot m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \quad (16.28)$$

În cazul ciocnirii naturale $0 < k < 1$ avem pierderi de energie și valoarea exactă se obține din relația (16.26).

În virtutea principiului conservării energiei, energia totală trebuie să rămână constantă și rezultă că energia cinetică pierdută trebuie să o regăsim transformată în altă energie. Se constată ușor că această energie se transformă în lucru mecanic de deformare a celor două corpuri ce se ciocnesc, în energie calorică sau electrică sau în alte forme de energie.

16.4. CIOCNIREA OBLICĂ

Se consideră cazul a două sfere O_1 și O_2 de mase m_1 și m_2 (fig. 16.4) care se ciocnesc după linia centrelor; în momentul ciocnirii au vitezele \vec{v}_1 și \vec{v}_2 ce fac unghiurile α_1 și α_2 cu linia O_1O_2 .

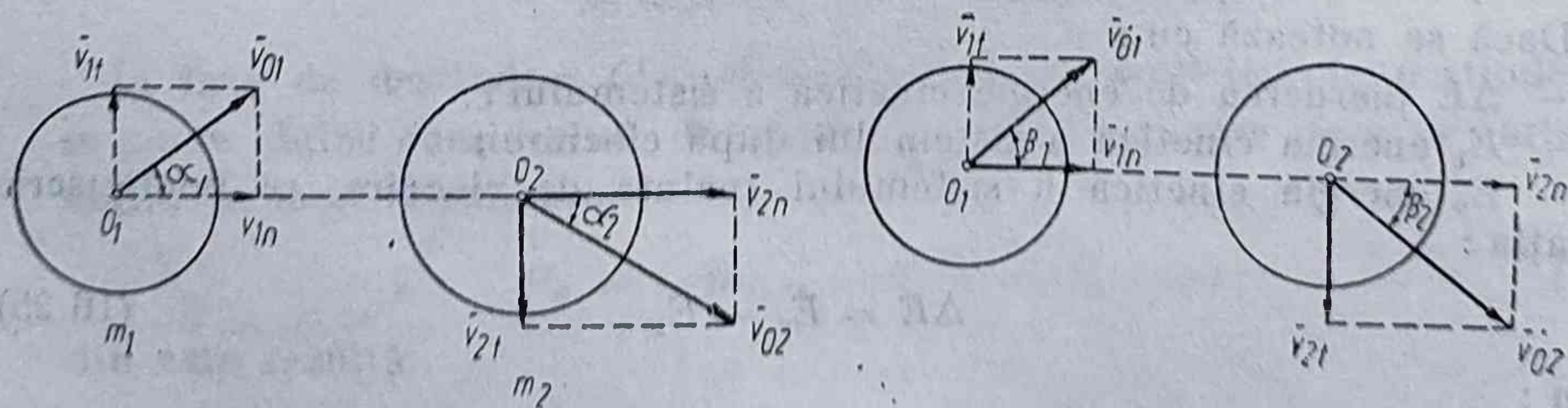
Pentru operativitate se poate admite că suprafețele celor două sfere sînt perfect netede și deci nu apar forțe de frecare.

Vitezele \vec{v}_{01} și \vec{v}_{02} se pot descompune în cîte două componente, după direcția normalei comune și după direcția tangentei comune la suprafețele aflate în contact. Deoarece se admite că nu apar forțe de frecare, componentele după tangenta comună \vec{v}_{1t} și \vec{v}_{2t} rămîn neschimbate după ciocnire. În acest fel se poate considera că ciocnirea se efectuează după direcția normalei comune, în baza relațiilor (16.23) care, în acest caz, capătă forma :

$$m_1 \cdot v_{1n} + m_2 \cdot v_{2n} = m_1 \cdot v'_{1n} + m_2 \cdot v'_{2n};$$

$$k = \frac{v'_{2n} - v'_{1n}}{v_{1n} - v_{2n}}. \quad (16.29)$$

Din rezolvarea acestui sistem se determină v'_{1n} și v'_{2n} care odată cunoscute ne permit calcularea vitezelor v'_1 și v'_2 .



Situația dinainte de ciocnire.

Situația de după ciocnire.

Fig. 16.4

16.5. CIOCNIREA UNEI SFERE CU UN CORP CE SE POATE ROTI ÎN JURUL UNEI AXE FIXE. PERCUȚII PE AXA FIXĂ. CENTRUL DE PERCUȚII

Se consideră un corp ce se poate roti în jurul unei axe O care are, față de această axă, momentul de inerție mecanic J_0 , iar masa corpului este M (fig. 16.5).

Corpul este ciocnit de un corp în formă de bilă sferică după o direcție perpendiculară pe axă și totodată după normala comună în punctul de contact.

Cunoscînd că bila are înainte de ciocnire viteza \bar{v} , iar după ciocnire \bar{v}' , corpul are înainte de ciocnire viteza unghiulară $\bar{\omega}$, iar după ciocnire $\bar{\omega}'$, problema care se pune este de a determina vitezele celor două corpuri după ciocnire.

Asupra sistemului format de bila sferică și corp acționează ca percuții exterioare numai cele de legătură în punctele de prindere în axa de rotație, care trec prin această axă. Este evident că suma momentului percuțiilor exterioare față de axa de rotație pentru întregul sistem este nulă și în baza teoremei variației momentului cinetic se poate scrie :

$$\bar{K} = \sum \bar{M}_{ext} = 0, \text{ sau } \bar{K}_1 - \bar{K}_0 = \sum \bar{M}_{ext} = 0, \text{ sau } \bar{K}_0 = \bar{K}_1 = 0, \\ \text{sau :}$$

$$J_0 \cdot \omega + m \cdot v \cdot l = J_0 \cdot \omega' + m \cdot v' \cdot l. \quad (16.30, a)$$

Această relație arată că momentul cinetic al sistemului față de punctul O , în jurul căruia se rotește, este același înainte și după producerea ciocnirii. Pentru a determina necunoscutele v' și ω' se poate utiliza relația ce determină valoarea coeficientului de restituire în punctul A în care se produce ciocnirea.

$$\text{Deci :} \quad k = \frac{\omega' \cdot l - v'}{v - \omega \cdot l}. \quad (16.30, b)$$

Rezolvînd sistemul 16.30, a și b se obține :

$$v' = v - \frac{(v - \omega \cdot l)(1 + k)}{1 + \frac{m \cdot l^2}{J_0}} ; \\ \omega' = \omega + \frac{(v - \omega \cdot l)(1 + k)}{l \left(1 + \frac{J_0}{m \cdot l^2} \right)}. \quad (16.31)$$

Determinarea percuțiilor pe axa fixă de rotație. Centrul de percuție. Se consideră un corp ce se poate roti în jurul axei fixe OO_1 avînd articulații în O și O_1 aflate la distanța $OO_1 = h$. Se alege un sistem de referință $Oxyz$ astfel încît axa Oz să fie axa de rotație fixă (fig. 16.6). Centrul de masă G

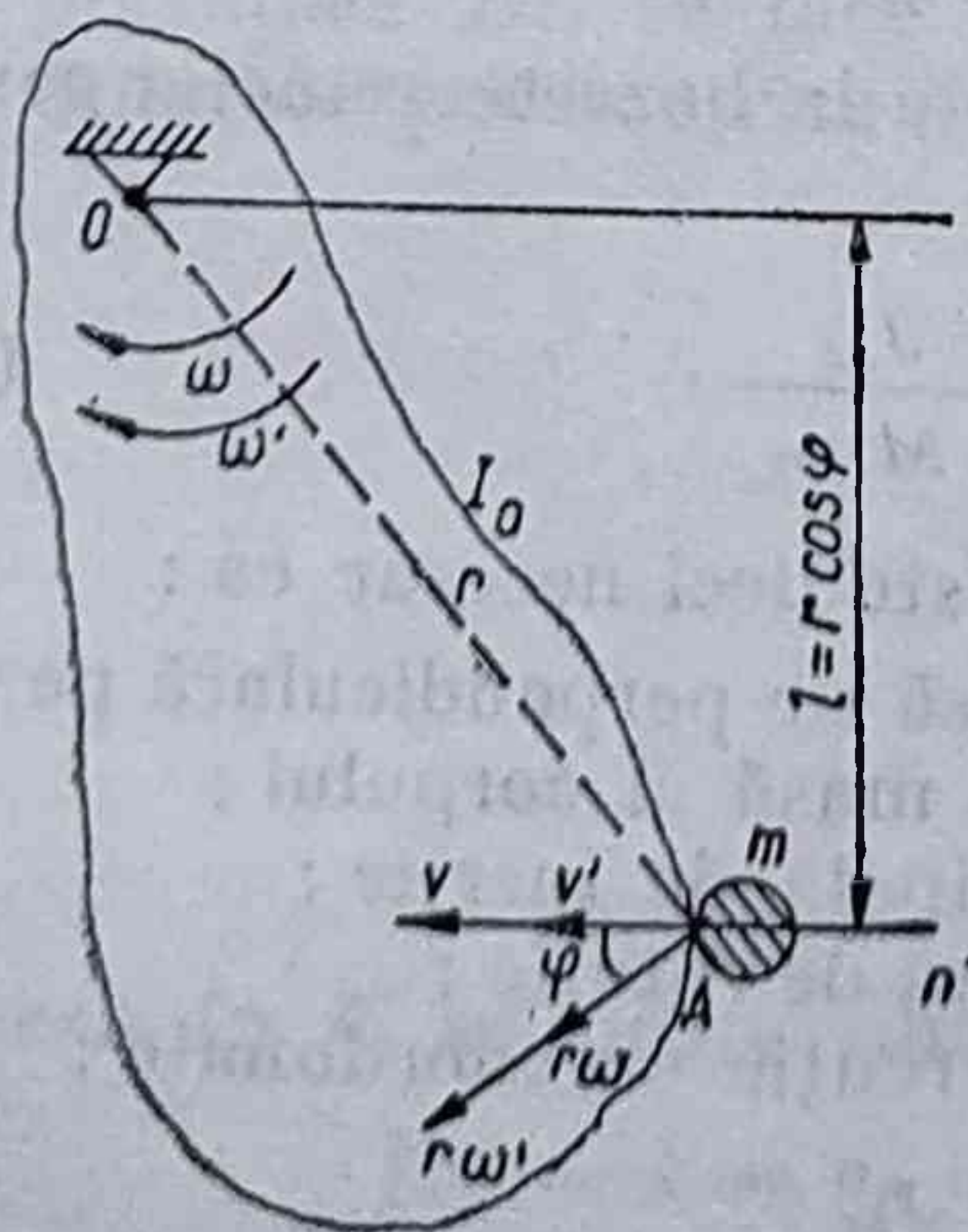


Fig. 16.5

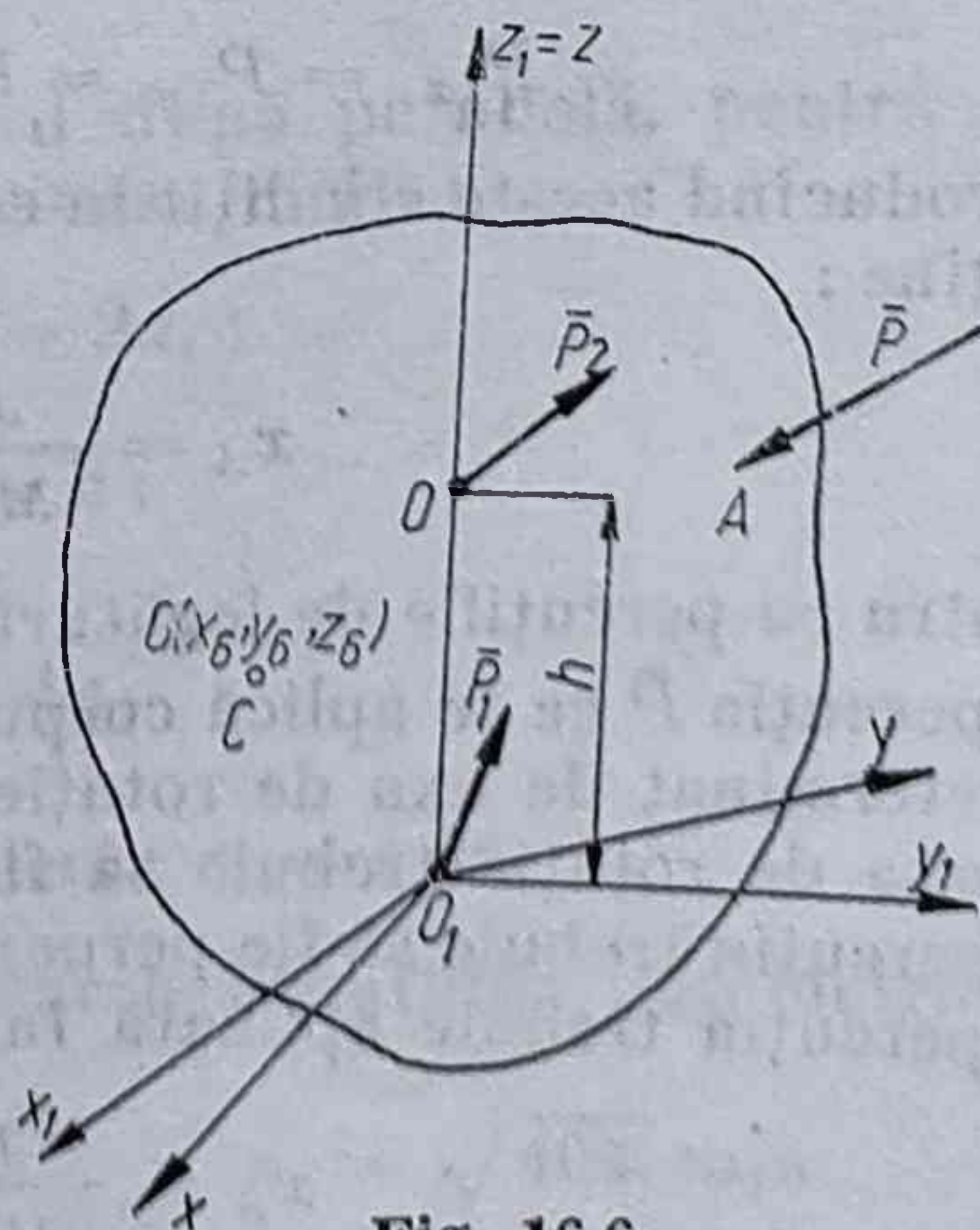


Fig. 16.6

se află în planul xOz și are coordonatele x_G, y_G, z_G . Asupra corpului C este aplicată o percuție exterioară \bar{P} în punctul A . Datorită acestei percuții în articulațiile din O și O_1 apar percuțiile de legătură \bar{P}_1 și \bar{P}_2 , iar corpul se va roti, după percuție, cu $\bar{\omega}_1$. Înainte de percuție corpul avea viteza unghiulară $\bar{\omega}$.

Aplicînd teoremele generale se poate scrie :

$$\begin{aligned}\Delta H_x &= P_x + P_{1x} + P_{2x} = -M(\omega_1 - \omega)y_G ; \\ \Delta H_y &= P_y + P_{1y} + P_{2y} = M \cdot x_G(\omega_1 - \omega) ; \\ \Delta H_z &= P_z + P_{1z} + P_{2z} = 0 ;\end{aligned}\tag{16.32}$$

$$\Delta \bar{K}_x = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = \bar{i}[y_A \cdot P_z - z_A \cdot P_y] + \bar{j}[z_A \cdot P_x - x_A \cdot P_z] +$$

$$+ \bar{k}[x_A \cdot P_y - y_A \cdot P_x] = -\bar{i}(\omega_1 - \omega)J_{xz} - \bar{j}(\omega_1 - \omega)J_{yz} + \bar{k}(\omega_1 - \omega)J_z,$$

unde J_{xz}, J_{yz}, J_z sînt momente de inerție.

Aceste ecuații reprezintă un sistem de șase ecuații scalare în care apar necunoscutele :

$$\omega_1 ; P_{1x} ; P_{1y} ; P_{1z} ; P_{2x} ; P_{2y} ; P_{2z}.$$

Din rezolvarea acestui sistem se poate obține :

$$\omega_1 = \omega + \frac{x_A \cdot P_y - y_A \cdot P_x}{J_z}.$$

Se observă că rămîn nedeterminate componentele percuțiilor de legătură după axa Oz : P_{1z} și P_{2z} . Această nedeterminare se poate elimina dacă se ține seama de elementele elastice ale axului OO_1 .

O problemă care interesează foarte mult în aplicațiile practice o constituie cazul în care aplicînd percuția \bar{P} într-un punct oarecare A , percuțiile de legătură sînt nule, adică :

$$\bar{P}_1 = 0 ; \bar{P}_2 = 0 ;$$

sau :

$$P_{1x} = P_{1y} = P_{1z} = P_{2x} = P_{2y} = P_{2z} = 0.$$

Introducînd aceste condiții în ecuațiile stabilite în baza teoremelor generale, se obține :

$$x_A = \frac{J_z}{M \cdot x_G} ; \quad z_A = \frac{J_{xz}}{M \cdot x_G} .\tag{16.33}$$

Pentru ca percuțiile de legătură să fie nule, este deci necesar ca :

- percuția \bar{P} ce se aplică corpului C trebuie să fie perpendiculară pe planul Oxz determinat de axa de rotație și centrul de masă al corpului ;
- axa de rotație trebuie să fie o axă principală de inerție ;
- percuția trebuie să fie perpendiculară pe axa de rotație ;
- percuția trebuie aplicată în centrul de percuție de coordonate :

$$x_A = \frac{J_z}{M \cdot x_G} ; \quad z_A = \frac{J_{xz}}{M \cdot x_G} .$$

APLICAȚIA 1

Corpul I de greutate G după ce străbate cu frecarea $\mu = \frac{1}{2}$ distanța $AB = 3,6$ m, ciocnește plastic, în B , corpul (II) de greutate $3G$ ce stătea în repaus.

Să se determine: 1) viteza comună după ciocnirea în B ; 2) unde atinge solul în cădere liberă, cunoscând pe $h = 20$ m; 3) viteza la atingerea solului; 4) viteza după ciocnirea solului, cu coeficient $k_1 = \frac{1}{4}$; 5) unde atinge a doua oară solul.

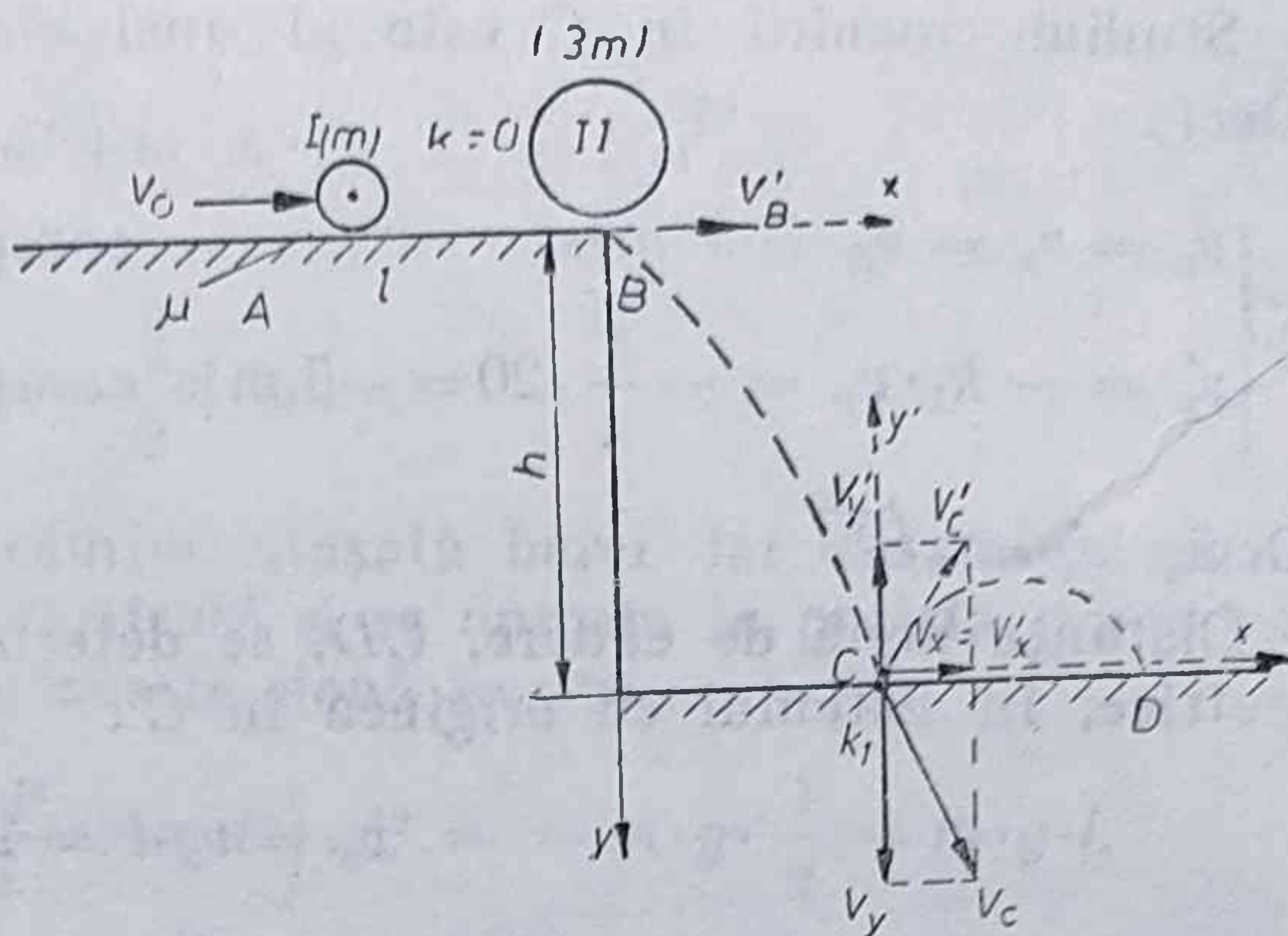


Fig. 16.7

Rezolvare

Pe porțiunea AB se aplică teorema energiei pentru sfera I:

$$E_B - E_A = L_{AB};$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = -\mu \cdot m \cdot g \cdot l.$$

Deci:

$$v_B^2 = v_0^2 - 2\mu \cdot g \cdot l.$$

Înlocuind în cifre (și luînd $g = 10$ m/s²), rezultă:

$$v_B = 8 \text{ m/s.}$$

În B este o ciocnire dreaptă între două sfere; scriind conservarea impulsului și relația coeficientului k , se obține:

$$\frac{G}{g} v_B = v'_B \left(\frac{G}{g} + \frac{3G}{g} \right)$$

de unde:

$$v_B = 4v'_B \text{ și } v'_B = \frac{v_B}{4} = 2 \text{ m/s.}$$

Pe porțiunea BC se face studiul mișcării după parabolă, pentru care se scriu ecuațiile parametrice (sistem cu originea în B):

$$x = v'_B \cdot t_c = 2 t_c;$$

$$y = \frac{g \cdot t_c^2}{2} = h;$$

$$t_c^2 = \frac{2h}{g} = 4;$$

$$t_c = 2'', \text{ deci: } x = 4 \text{ m.}$$

Viteza în C se poate obține prin derivarea ecuațiilor parametrice:

$$v_c \begin{cases} v_x = \dot{x} = v'_B = 2 \text{ m/s} \\ v_y = \dot{y} = g \cdot t_c = 10 \cdot 2 = 20 \text{ m/s} \end{cases} \quad v_c = \sqrt{404} \text{ m/s}$$

Studiul ciocnirii în C este al unei ciocniri oblice cu o suprafață fixă.
Deci :

$$v'_c \begin{cases} v'_x = v_x = v'_B = 2 \text{ m/s} & \text{componentă neinfluențată de ciocnire;} \\ v'_y = -k_1 \cdot v_y = -\frac{1}{4} \cdot 20 = -5 \text{ m/s} & \text{componentă influențată de ciocnire.} \end{cases}$$

Deci : $v'_c = \sqrt{29}$.

Distanța nouă de cădere, CD , se determină prin scrierea ecuațiilor parametriche, în sistemul cu originea în C :

$$x_c = v_x \cdot t = 2t;$$

$$y_c = v'_y \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = 0; \quad t_c = 1''$$

și deci :

$$x_c = CD = 2 \text{ m.}$$

APLICAȚIA 2

Să se determine viteza inițială v_0 cu care trebuie să pornească sfera de masă m , pentru ca după ce parcurge $AB = l$, cu frecare μ , $\alpha = 60^\circ$, ciocnind plastic în B bara verticală de masă m și de lungime l , ce stătea în repaus, ansamblul acestora să se oprească în poziție orizontală (fig. 16.8).

Rezolvare

Pe porțiunea AB se aplică teorema energiei cinetice pentru sferă :

$$\frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = - (m \cdot g \sin \alpha + \mu \cdot m \cdot g \cos \alpha) l.$$

Ciocnirea din B este între o sferă și un corp în rotație ; scriind teorema momentului cinetic față de O , se elimină percuțiile interioare din B și exterioare din O . Ciocnirea fiind oblică, participă componenta normală v_n .

Astfel, din relațiile :

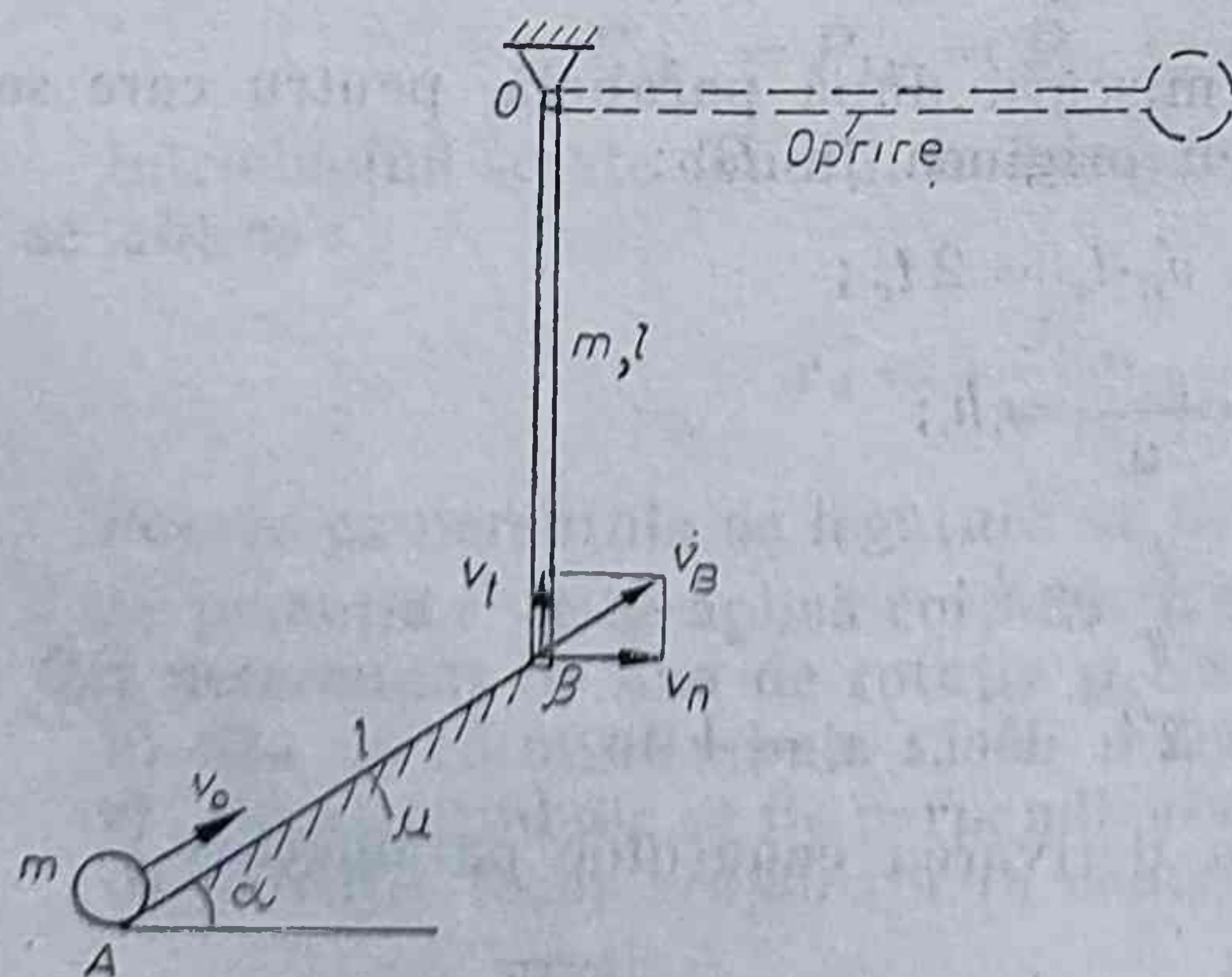


Fig. 16.8

$$I_0 \cdot \omega + m \cdot v_n \cdot OB =$$

$$= I_0 \cdot \omega' + m \cdot v'_n \cdot OB,$$

$$k = \frac{OB \cdot \omega' - v'_n}{v_n - OB \cdot \omega'}$$

— conservarea momentului cinetic

— legea coeficientului k ținînd seama că :

$$\omega = 0;$$

$$I_0 = \frac{m \cdot l^2}{3};$$

$$v_n = v_B \cdot \cos 60^\circ = \frac{v_B}{2} \text{ și } k = 0,$$

rezultă :

$$m \frac{v_B}{2} l = \frac{m \cdot l^2}{3} \omega' + m \cdot v_n \cdot l ; \quad v_n' = l \cdot \omega',$$

de unde :

$$v_B = \frac{8}{3} l \cdot \omega'.$$

După ciocnirea plastică sfera rămâne atașată barei, iar ansamblul pleacă cu viteza inițială ω' din poziția verticală și se oprește în poziția orizontală.

Se scrie teorema energiei între aceste două poziții :

$$E - E_0 = L_{ext} ; \quad -\frac{1}{2} \left(\frac{m \cdot l^2}{3} + m \cdot l^2 \right) \omega'^2 = -m \cdot g \cdot \frac{l}{2} - m \cdot g \cdot l,$$

de unde :

$$\omega' = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$v_B' \begin{cases} v_n' = l \cdot \omega' = \frac{3}{2} \sqrt{g \cdot l} \\ v_t' = v_t = v_B \sin 60^\circ = 2 \sqrt{3 g \cdot l} \end{cases}$$

Rezultă :

$$v_B = 4 \sqrt{g \cdot l} \text{ și } v_0 = g \cdot l (16 - \sqrt{3} - \mu).$$

17.

ELEMENTE DE MECANICĂ ANALITICĂ

17.1. GENERALITĂȚI

În mecanica newtoniană clasică s-a studiat mișcarea folosind metoda vectorială, condițiile de echilibru și de mișcare ale corpurilor materiale sub acțiunea sistemelor de forțe. La baza acestui studiu a stat ecuația fundamentală a mecanicii :

$$\vec{F} = m \cdot \ddot{\vec{r}}, \text{ respectiv } \frac{d}{dt} (m \cdot \dot{\vec{r}}) = \vec{F}, \quad (17.1.1)$$

completată, în cazul corpurilor ce au o mișcare de rotație în jurul unei axe, cu relația ce derivă de altfel din ecuația fundamentală :

$$\sum \vec{M}_0 = \sum \vec{r}_i \times m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i, \text{ respectiv } M_\Delta = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}. \quad (17.1.2)$$

Aceste ecuații diferențiale raportate la axe de coordonate (carteziene, polare etc.) în spațiul fizic euclidian reflectă, prin expresia lor matematică, fenomene fizice, reale. Metoda de calcul vectorial folosită, bazată pe ecuația fundamentală a mecanicii, respectiv pe teoremele generale ale dinamicii, nu prezintă un caracter de generalitate a problemei.

Marii matematicieni și fizicieni ai secolului al XVIII-lea și-au propus să determine criterii generale, pe cât posibil universale, care să ofere disciplinei mecanicii un caracter de știință universală.

Acest deziderat a fost expus ca sistem matematic unitar și eficient, de către J. L. Lagrange, în cartea sa „Mecanique analytique”.

Mecanica analitică prezintă avantajul că dă posibilitatea extinderii câmpului de investigație al fenomenelor, în afara fenomenelor mecanice la fenomene fizice care pot fi modelate după cele mecanice. Din punct de vedere matematic, metoda analitică este mai cuprinzătoare și mai uniformă, permițând o eficiență sporită în aplicarea sistemelor de ecuații diferențiale ale mecanicii și scoaterea în evidență a proprietăților deosebit de interesante și utile ale acestor ecuații sau sisteme de ecuații diferențiale.

Desigur, că la numele marelui matematician J. L. Lagrange trebuie să asociem toată pleiada de savanți care au pus temelia mecanicii analitice. Astfel, este cazul să se rețină numele marelui matematician W. R. Hamilton (1846) care a reușit să stabilească proprietăți analitice importante pentru integrarea sistemelor de ecuații diferențiale ale mecanicii.

De asemenea, P.L.N. de Maupertuis (1744) s-a consacrat în istoria științelor prin formularea unui principiu variațional care a permis ca apoi Louis de Broglie (1924) să creeze o nouă disciplină, și anume mecanica ondulatorie.

Desigur că în fruntea lucrărilor care au pus bazele disciplinei mecanicii analitice trebuie să avem în vedere pe cele elaborate de K. F. Gauss, H. Hertz, L. Euler, A. M. Liapunov, care au dezvoltat metodele de integrare ale ecuațiilor mecanicii, principiul variațional corespunzător etc.

În cadrul mecanicii analitice un loc de frunte îl ocupă principiul lui d'Alembert ce poartă numele marelui matematician francez care l-a enunțat.

17.1.1. COORDONATE GENERALIZATE

Coordonatele generalizate ale unui sistem mecanic sînt parametrii independenți q_1, q_2, \dots, q_n care determină complet configurația sistemului, adică poziția tuturor punctelor sale în raport cu sistemul de referință ales. Coordoatele generalizate posedă caracterul analitic, abstract al unor parametri generali și nu pe cel fizic al celor din geometria euclidiană.

În cele ce urmează se va considera numai cazul sistemelor materiale cu un număr finit de puncte materiale sau, mai precis, cu un număr finit de grade de libertate.

Dacă se consideră un sistem de puncte materiale format dintr-un număr mare N , dar finit de puncte materiale, acestea au într-un sistem de coordonate carteziane în spațiul euclidian coordonatele x_i, y_i, z_i și masele m_i . Poziția acestor puncte ar putea fi determinată și de un număr de parametri q_1, q_2, \dots, q_n , față de sistemul de referință.

Se admite că este posibil să avem $n = 3N$ parametri și că aceștia pot fi legați de coordonatele carteziane prin relații de forma :

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q^1, q^2, \dots, q^{3N}, t); \\ y_i &= y_i(q^1, q^2, \dots, q^{3N}, t); \quad (i = 1, 2, \dots, 3N) \\ z_i &= z_i(q^1, q^2, \dots, q^{3N}, t). \end{aligned} \quad (17.1.3)$$

Aceste funcții se presupun continue și derivabile și cu determinantul funcțional diferit de zero.

Accasta înseamnă că este posibil oricând să se inverseze sistemul, adică să se determine parametrii q^i în funcție de coordonatele x_i, y_i, z_i . Rezultă o corespondență biunivocă.

Parametrii q^r ($r = 1, 2, \dots, 3N$) ce permit stabilirea configurației sistemului, poartă numele de *coordoanate generalizate* sau *coordoanate lagrangeiene*. Ele sînt funcții continue și derivabile în raport cu timpul. Expresiile lor pot fi scrise sub forma :

$$q^1 = q^1(t); q^2 = q^2(t), \dots, q^{3N} = q^{3N}(t) \quad (17.1.4)$$

și reprezintă ecuațiile de mișcare ale unui punct în spațiul R_{3N} . Mărimile q pot fi considerate drept componente contravariante ale unui vector de poziție în spațiul R_{3N} .

Vitezele generalizate ale sistemului sînt derivatele totale în raport cu timpul ale coordonatelor generalizate ale sistemului. Ele au expresia :

$$\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}; (i = 1, 2, \dots, 3N). \quad (17.1.5)$$

Numărul gradelor de libertate ale unui sistem mecanic este numărul s de mișcări independente posibile ale sistemului.

Starea unui sistem dinamic este determinată prin poziția (configurația) și starea de mișcare în momentul trecerii prin poziția specificată și este exprimată printr-un element de forma :

$$(q^r, \dot{q}^r); (r = 1, \dots, 3N).$$

În felul acesta se poate imagina un spațiu fictiv care are $2 \times 3N$ dimensiuni și în care un punct figurativ să reprezinte în orice moment starea sistemului dinamic. Acest spațiu poartă numele de *spațiul stărilor* sau *spațiul fazelor* și are $6N$ dimensiuni; este un spațiu afin deoarece are diferite unități de măsură pentru diferiți parametri.

17.1.2. LEGĂTURI. DEPLASĂRI

Un sistem de puncte materiale este alcătuit, de regulă, dintr-un număr mare, dar finit de particule materiale între care pot exista anumite legături de interacțiune, dintre care unele pot fi de constrîngere datorită unor eventuale forțe de legătură.

Legăturile, din punct de vedere analitic, se împart în : a) *legături olonome*; b) *legături neolonome*.

În același timp se disting *legături reonome* și *legături scleronome*. Legăturile pot fi *fără frecare* sau *cu frecare*.

În mecanica analitică se iau în considerare numai legăturile fără frecare care se pot exprima cu ajutorul unor relații matematice. Se disting, de asemenea, *legături unilaterale* și *legături bilaterale*; primele impun restricția într-un singur sens, iar celelalte o impun în ambele sensuri.

Legăturile unilaterale se exprimă printr-o inecuație de forma :

$$\begin{aligned} f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) &\geq 0; \\ f(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) &\geq 0; \\ f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) &\leq 0; \\ f(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) &\leq 0, \end{aligned} \quad (17.1.6, a)$$

iar cele bilaterale prin :

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0 \text{ sau} \quad (17.1.6, b)$$

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = 0.$$

Pentru definirea legăturilor scleronome, reonome, olonome sau neolonome se ia în considerare numai cazul legăturilor bilaterale.

Legăturile scleronome se caracterizează prin faptul că nu depind explicit de timp și au deci forma :

$$f(x, y, z) = 0 ; f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0. \quad (17.1.7)$$

Ele constituie cazul suprafețelor sau curbelor fixe. Cuvîntul scleronom provine de la cuvîntul grecesc scleros care arată că este vorba de un corp dur imobil.

— Legăturile olonome se caracterizează prin faptul că în expresia lor matematică nu apar derivatele lui x, y, z adică componentele vitezei sau accelerației. Aceste legături au expresii de forma :

$$f(x, y, z) = 0 \text{ sau } f(x, y, z, t) = 0. \quad (17.1.9)$$

— Legăturile neolonome se caracterizează prin faptul că în expresia lor matematică apar componentele vitezei ($\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$) și accelerației ($\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$). Se disting :

● legături olonome de speța întâia, în care apar numai componentele vitezei, astfel că au expresia :

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0 ; \quad (17.1.10)$$

● legături olonome de speța a doua în care apar explicit și componentele accelerației, și au forma :

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, t) = 0 \quad (17.1.11)$$

O formă mai cuprinzătoare a expresiei legăturilor o constituie expresia matematică a legăturii denumită forma Pfaff :

$$\xi \cdot dx + \eta \cdot dy + \zeta \cdot dz + \tau \cdot dt = 0 ; \quad (17.1.12)$$

în această formă, componentele vitezei figurează liniar și omogen, coeficienții ξ, η, ζ, τ fiind funcții de x, y, z și t , iar dx, dy, dz reprezintă componentele deplasării reale $d\vec{r}$, iar dt timpul în care are loc această deplasare.

Dacă în relația ce exprimă forma Pfaff $\tau \neq 0$, atunci legătura este reonomă, iar dacă $\tau = 0$ atunci legătura este scleronomă.

Dacă pentru expresia Pfaff nu se găsește nici o combinație integrabilă, se spune că legătura este neolonomă.

Legătura este olonomă dacă forma Pfaff poate fi adusă sub forma unei diferențiale totale exacte sau dacă multiplicată cu un factor integrant devine o diferențială totală exactă, adică poate fi adusă la forma :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = 0, \quad (17.1.13)$$

care poate fi integrată și se obține :

$$\varphi(x, y, z, t) = 0. \quad (17.1.14)$$

Deplasări. Efectul de mișcare mecanică se reduce, în final, la deplasările punctelor materiale din care este constituit sistemul studiat. În desfășurarea mecanicii analitice se disting două feluri de deplasări: deplasări virtuale (închipuite) și deplasări reale (posibile).

— *Deplasările reale sau posibile* sînt în strictă conformitate cu legile dinamice ale mișcării, adică ele apar atunci cînd sistemul care are la timpul t_1 o anumită configurație, evoluează și se transformă pînă în momentul $t_2 = t_1 + dt$ într-o altă configurație.

În cazul punctului material liber, deplasarea elementară realizată în timpul elementar dt are componentele dx, dy, dz , arbitrare. În cazul punctului material supus la legături sau al sistemelor de puncte materiale, deplasările trebuie să satisfacă anumite restricții, deplasările posibile avînd componentele:

$$\begin{aligned} dx_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt; \\ dy_i &= \frac{\partial y_i}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial y_i}{\partial t} dt; \end{aligned} \quad (17.1.15)$$

$$dz_i = \frac{\partial z_i}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial z_i}{\partial t} dt \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

— *Deplasări virtuale.* O deplasare virtuală presupune transpunerea unui sistem de puncte materiale dintr-o anumită configurație într-o altă configurație infinitezimal vecină, fără a ține seama de timp. Punctele sistemului suferă o deplasare spontană independentă de timp. Pentru a deosebi deplasarea virtuală de cea reală, se folosește, pentru cea virtuală, notația:

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q^k} \delta q^k; \quad \delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial q^k} \delta q^k; \quad \delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial q^k} \delta q^k \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (17.1.16)$$

În acest mod, aceste relații subordonează deplasării $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ virtuale efectuate în spațiul euclidian, deplasarea $\delta q^1, \delta q^2, \dots, \delta q^{3N}$ efectuată în spațiul figurativ R_{3N} în mod univoc.

Numărul de grade de libertate al unui sistem mecanic este numărul s de mișcări independente posibile ale sistemului.

Teoremă. Pentru un sistem olonom, numărul minim al gradelor de libertate este egal cu numărul coordonatelor generalizate independente.

Se consideră un sistem de puncte materiale (x_i, y_i, z_i) , $(i = 1 \dots N)$ supus la m relații de legătură olonome exprimate prin relații de forma:

$$\Phi_r(x_i, y_i, z_i, t) = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, m), \quad (17.1.17)$$

ce au deplasări reale date de relații de forma:

$$\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i} dz_i + \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} dt = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (17.1.18)$$

și deplasări virtuale de forma:

$$\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i} \delta z_i = 0. \quad (17.1.19)$$

Aceste ecuații pot fi rezolvate și se pot exprima m din variabilele x_i, y_i, z_i în funcție de celelalte $3N - m = n$ variabile distincte. Se presupune că este posibil să cuprindem aceste n variabile distincte în n parametri q^1, q^2, \dots, q^n considerați drept coordonate generalizate, exprimați prin relații de forma :

$$x_i = x_i(q^1, q^2, \dots, q^{3N}, t);$$

$$y_i = y_i(q^r, t);$$

$$z_i = z_i(q^r, t) \quad (r = 1, 2, \dots, 3N) \quad (17.1.20)$$

În acest mod, problema studiului mișcării este rezolvată dacă se pot stabili și integra n ecuații diferențiale de ordinul al doilea din care să se obțină cele $q^1 \dots q^n$, în total n coordonate de forma :

$$q^r = q^r(t, c_1 \dots c_{2n}) \quad (r = 1, 2 \dots n), \quad (17.1.21)$$

adică funcții de timp și de constante ce rezultă din condițiile particulare (de regulă cele inițiale). Rezultă astfel că prin relațiile (17.1.4) se deduc, cunoscând n parametri q , valorile a n coordonate x, y, z și apoi, folosind cele m relații de mobilitate olonome în funcție de celelalte n variabile, se determină și cele $3N - n = m$ coordonate, astfel că se obține un sistem material perfect determinat.

Prin definiție, prin numărul de grade de libertate ale unui sistem mecanic se înțelege numărul posibil de mișcări independente ale sistemului.

În cazul sistemului olonom, numărul gradelor de libertate este tocmai cel al coordonatelor generalizate ale sistemului. În cazul sistemului neolonom se scade numărul de legături neolonome impuse sistemului.

În cele ce urmează se vor lua în considerare numai sisteme olonome. Dacă numărul de grade de libertate ale sistemului este $n = 1$, sistemul se denumește cu *legături complete*.

Relațiile de permutabilitate pentru deplasări. Se consideră un sistem olonom exprimat prin relații de forma :

$$q^r = q^r(t, c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Dacă se aplică acestui sistem o deplasare virtuală infinitezimală δq^r , se obține :

$$q_1^r = q^r(t) + \delta q^r \quad (r = 1, \dots, n).$$

Această relație exprimă reprezentarea unei curbe învecinate și apropiate de cea din care s-a plecat și constituie o traiectorie cinematic posibilă și compatibilă cu legăturile. Evident că la această variație a deplasărilor va corespunde și o variație a vitezelor generalizate :

$$\dot{q}_1^r - \dot{q}^r = \delta \dot{q}^r = \delta \frac{dq^r}{dt}.$$

Se poate remarca că se ajunge ușor la același rezultat dacă se derivează expresia deplasării virtuale infinitezimale, și anume :

$$\frac{d}{dt} (\delta q^r) = \delta \left(\frac{dq^r}{dt} \right),$$

și observînd că δ nu depinde de timp, rezultă :

$$d(\delta q^r) = \delta(dq^r) \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (17.1.22)$$

Rezultă că se poate enunța proprietatea după care pentru un sistem olo-nom variațiile d și δ sînt permutabile între ele. Se menționează că pentru sistemele neolonyme această proprietate nu mai este valabilă.

17.2. PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT (METODA CINETOSTATICĂ) FORȚE DE INERȚIE. CUPLU DE INERȚIE

Pentru a enunța principiul lui d'Alembert, este necesar ca în prealabil să se precizeze unele idei asupra noțiunii de forță de inerție. Dacă se con-sideră un punct material de masă m care se află într-o stare inerțială, adică de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă, pentru a-i imprima o accele-rație a este necesar ca un alt corp, pe care să-l numim agent extern, să acționeze asupra sa cu o forță $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Rezultă, în baza principiului acțiunii și reacțiunii, că punctul material reacționează, la rîndul său, asupra agentului extern cu o forță egală și de sens contrar, care poartă numele de forță de inerție :

$$\vec{F}_i = -m \cdot \vec{a}.$$

Este deci, clar, că forța de inerție acționează asupra agentului extern ca o forță reală și se exercită în consecință în legături. Dacă se consideră numai punctul material, rezultă că forța de inerție nu acționează asupra lui și deci pentru punct nu reprezintă o forță reală.

În cazul sistemelor de puncte materiale sau a unui rigid se observă că se obține un sistem de forțe de inerție. Prin reducerea acestui sistem de forțe de inerție în raport cu un punct se ajunge la un torsor al forțelor de inerție aplicat în punctul față de care se efectuează reducerea. Acest torsor este for-mat din rezultanta forțelor de inerție \vec{F}_i și din momentul resultant al for-țelor de inerție, denumit și cuplul resultant al forțelor de inerție \vec{M}_i .

$$\begin{aligned}\vec{F}_i &= \sum \vec{F}_{ik} = \sum (-m_k \cdot \vec{a}_k); \\ \vec{M}_i &= \sum \vec{r}_k \times \vec{F}_{ik} = \sum \vec{r}_k \times (-m_k \cdot \vec{a}_k).\end{aligned}\quad (17.2.1)$$

Forța resultantă se mai poate scrie și sub forma :

$$\vec{F}_i = \sum \vec{F}_{ik} = \sum (-m_k \cdot \vec{a}_k) = \sum (-m_k \cdot \ddot{\vec{r}}_k) = -M \cdot \ddot{\vec{a}}_G,$$

$\ddot{\vec{a}}_G$ — fiind accelerația centrului maselor.

Momentul resultant al forțelor de inerție (cuplul de inerție) rezultă din expresia :

$$\vec{M}_i = \sum \vec{r}_k \times (-m_k \cdot \vec{a}_k) = - \sum \vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = - \frac{d}{dt} \sum \vec{r}_k \times m_k \cdot \vec{v}_k.$$

Se observă că forța de inerție resultantă se calculează ca și cum toată masa sistemului ar fi concentrată într-un punct, în centrul maselor, și s-ar mișca cu accelerația acestui centru fără să intereseze cum se mișcă întregul sistem de puncte.

Se poate observa, de asemenea, că momentul resultant al forțelor de inerție (cuplul de inerție) depinde de felul mișcării sistemului de puncte materiale sau al rigidului.

Principiul lui d'Alembert. În mecanica newtoniană, pentru a studia mișcarea unui punct material supus la legături se aplică axioma legăturilor și, ca atare, se introduc forțele de legătură alături de forțele active și se consideră punctul material liber.

În mecanica analitică, d'Alembert arată că numai o parte din forțele active produc accelerația punctului, iar cealaltă parte se pierde din cauza legăturilor la care este supus punctul material. Partea care se pierde poartă numele de *forță pierdută* și mai este denumită și *vectorul lui d'Alembert* și se notează cu $\bar{\Phi}$. Forțele pierdute și forțele de legătură formează un sistem în echilibru, adică :

$$\sum \bar{F}_{leg} + \bar{\Phi} = 0.$$

Se mai poate scrie că :

$$\sum \bar{F}_a = m \cdot \bar{a} + \bar{\Phi},$$

sau $\bar{\Phi} = \sum \bar{F}_a - m \cdot \bar{a}$, dar :

$$-m \cdot \bar{a} = \bar{F}_i,$$

și se obține :

$$\sum \bar{F}_a + \sum \bar{F}_{leg} + \sum \bar{F}_i = 0.$$

Principiul lui d'Alembert poate fi deci enunțat după cum urmează : suma forțelor active (date, direct aplicate) de legătură și de inerție își fac un echilibru fictiv. Echilibrul este fictiv deoarece expresia matematică de mai sus se egalează cu zero. În realitate, punctul material se mișcă.

În mod asemănător se poate reface raționamentul pentru un sistem de puncte materiale sau pentru un corp sau sistem de corpuri. În acest caz, se obțin expresiile :

$$\begin{aligned} \sum \bar{F}_a + \sum \bar{F}_{leg} + \sum \bar{F}_i &= 0 ; \\ \sum \bar{M}_{Fa} + \sum \bar{M}_{Fleg} + \sum \bar{C}_i &= 0. \end{aligned} \quad (17.2.2)$$

Pe baza principiului lui d'Alembert se poate stabili o metodă practică de rezolvare a aplicațiilor practice, care prezintă avantajul de a fi practică și cu multă asemănare față de metodele de studiu din statică.

Proiecțiile acestor ecuații vectoriale pe cele trei axe de referință formează un sistem de șase ecuații scalare.

Pentru rezolvarea unei probleme prin această metodă se procedează după cum urmează :

- se face o analiză cinematică stabilindu-se relațiile cinematice între mișcările diferitelor elemente ale sistemului ;
- se izolează fiecare corp în parte (ca în statică) ;
- se introduc forțele de inerție și cuplurile de inerție ;
- se aplică forțele date și de legătură ;
- se aplică principiul lui d'Alembert scriind ecuațiile de echilibru fictiv pentru corp, ținând seama că asupra lui acționează un sistem de forțe format din forțele active, forțele de legătură și forțele de inerție. Se obține astfel un sistem de ecuații în care necunoscute sînt accelerațiile și reacțiunile dinamice.

17.3. PRINCIPIUL DEPLASĂRILOR VIRTUALE

Acest principiu poate fi enunțat în felul următor: lucrul mecanic elementar al forțelor care solicită un sistem dinamic este nul pentru o deplasare virtuală; la rezolvarea problemelor practice cu acest principiu este necesar să se scoată în evidență faptul că anumite forțe nu produc lucru mecanic. Astfel:

a) reacțiunile unei suprafețe, când nu este frecare, nu dau lucru mecanic dacă deplasarea este compatibilă cu legătura, adică punctul material sau corpul rămîne mereu în contact cu suprafața de legătură;

b) în cazul mișcării de rostogolire fără alunecare a unui corp, reacțiunea suprafeței este de asemenea mereu normală pe deplasare, astfel că lucrul mecanic este nul;

c) forțele de interacțiune dintre două particule nu dau lucru mecanic, deoarece distanța între ele rămîne invariabilă.

Expresia lucrului mecanic virtual este:

$$\delta L = \sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum F_i \cdot \delta r_i \cdot \cos \alpha_i. \quad (17.3.1, a)$$

În cazul efectuării lucrului mecanic de către un cuplu, expresia lucrului mecanic virtual este:

$$\delta L = \sum \bar{M}_i \cdot \delta \bar{\theta}_i = \sum (M_x \cdot \delta \theta_x + M_y \delta \theta_y + M_z \delta \theta_z). \quad (17.3.1, b)$$

17.3.1. FORȚA GENERALIZATĂ

Dacă se derivează expresia lucrului mecanic virtual în raport cu deplasarea virtuală, se obține:

$$\frac{\delta L}{\delta r_i} = F_i$$

sau

$$\frac{\delta L}{\delta \theta_i} = M_i.$$

Se observă că derivata lucrului mecanic virtual în raport cu parametrul ce reprezintă deplasarea are, în primul caz, caracterul unei forțe, iar în al doilea, are pe cel al unui moment. În mecanica analitică ele sînt cuprinse într-o singură denumire, și anume, cea de *forță generalizată*.

În cazul utilizării coordonatelor generalizate, expresia lucrului mecanic virtual se scrie sub forma:

$$\delta L = \sum_1^n Q_r(q^1, q^2, \dots, q^n, t) \cdot \delta q^r. \quad (17.3.2)$$

În această relație $Q_r(q^k, t)$ are caracterul unei componente a forței generalizate în spațiul configurației respective în care efectuează deplasarea virtuală δq^r .

În cazul unui sistem aflat în echilibru static, pentru orice deplasări compatibile cu legăturile sau incompatibile cu legăturile, dar în echilibru, suma lucrurilor mecanice elementare virtuale corespunzătoare forțelor în echilibru este nulă și se poate scrie:

$$\delta L = \sum \bar{F} \cdot \delta \bar{r} + \sum \bar{M} \cdot \delta \bar{\theta} = 0 \quad (17.3.3)$$

sau analitic :

$$\delta L = \sum (X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z) + \sum (M_x \cdot \delta \theta_x + M_y \cdot \delta \theta_y + M_z \cdot \delta \theta_z) = 0.$$

În cazul dinamic cînd sistemul se află în mișcare se poate considera că echilibrul este dinamic.

Pornind de la teoremele generale, se poate scrie :

$$m \cdot \bar{a} = \sum \bar{F} = \sum \bar{F}_a + \sum \bar{F}_{leg}$$

sau

$$\sum \bar{F}_a + \sum \bar{F}_{leg} + \sum \bar{F}_i = 0.$$

În mod asemănător :

$$\sum \bar{M}_{F_a} + \sum \bar{M}_{F_{leg}} + \sum \bar{C}_i = 0,$$

unde :

$-J \cdot \varepsilon = \sum C_i$ reprezintă suma cuplurilor forțelor de inerție.

Lucrul mecanic elementar virtual este :

$$\begin{aligned} \sum \bar{F}_a \cdot \delta \bar{r}_e + \sum \bar{F}_{leg} \cdot \delta \bar{r}_e + \sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_e &= \sum \bar{F}_a \cdot \delta \bar{r}_e + \\ &+ \sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_e = \sum (\bar{F}_a - m \cdot \bar{a}) \cdot \delta \bar{r}_e = 0. \end{aligned} \quad (17.3.4)$$

În concluzie, principiul lucrului mecanic virtual în cazul echilibrului dinamic, adică al unui sistem aflat în mișcare, se poate scrie sub forma

$$\delta L = \sum (\bar{F}_a - m \cdot \bar{a}) \cdot \delta \bar{r} = 0 ;$$

în această relație intervin forțele active \bar{F}_a (sau forțe exterioare) și forțele de inerție. În mod general se poate scrie :

$$\delta L = \sum (\bar{F}_a - m \cdot \bar{a}) \cdot \delta \bar{r} + \sum (\bar{M}_{F_a} - \bar{C}_i) \cdot \delta \bar{\theta} = 0. \quad (17.3.5)$$

17.3.2. PRINCIPIUL VITEZELOR VIRTUALE

Conform principiului lucrului mecanic virtual se poate scrie :

$$\delta L = \sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0.$$

Dacă se face ipoteza că toate deplasările se efectuează în același interval de timp Δt , atunci :

$$\delta \bar{r}_i = \bar{v}_i \cdot \Delta t.$$

Se poate scrie :

$$\sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum \bar{F}_i \cdot \bar{v}_i \cdot \Delta t = \Delta t \sum_i^n \bar{F}_i \cdot \bar{v}_i = 0. \quad (17.3.6)$$

Deoarece $\Delta t \neq 0$, se obține :

$$\sum \bar{F}_i \cdot \bar{v}_i = 0.$$

Pentru rezolvarea aplicațiilor practice se consideră sistemul în mișcare compatibilă cu legăturile, imprimîndu-se o mișcare arbitrară unui element motor care antrenează întregul sistem și se aplică relația dată de principiul deplasărilor virtuale.

17.3.3. PRINCIPIUL LUI TORRICELLI

Acest principiu se aplică în cazul sistemelor acționate numai de greutatea proprie și cu legături fără frecare.

Dacă se alege un sistem de referință $Oxyz$ cu axa Oz verticală și se aplică principiul deplasărilor virtuale, se obține a relație de forma :

$$\delta L = (X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z) = g \sum m \cdot \delta z = 0. \quad (17.3.7)$$

Folosind expresia momentului static se poate scrie :

$$\delta L = g \sum m \cdot \delta z = g \cdot M \cdot \delta z_c = 0, \text{ sau } \delta z_c = 0. \quad (17.3.8)$$

Aceasta se poate exprima astfel : în cazul echilibrului unui sistem, centrul de greutate al acestuia ocupă o poziție extremă (cea mai de sus în cazul echilibrului instabil și cea mai de jos în cazul echilibrului stabil). Dacă cota centrului de greutate este o constantă, echilibrul este indiferent.

17.4. ECUAȚIILE LUI LAGRANGE

Se consideră mișcarea unui sistem de n puncte materiale cu h grade de libertate. Aceasta înseamnă că configurația generală a sistemului este determinată la un moment dat de h coordonate generalizate q_1, q_2, \dots, q_h . Se consideră, de asemenea, cazul legăturii reonome și olonome, ceea ce implică faptul că q_1, q_2, \dots, q_h sînt independente. Poziția unui punct s al sistemului este dată de vectorul de poziție :

$$\bar{r}_s = \bar{r}_s(q_1, q_2, \dots, q_h, t),$$

unde :

$$(s = 1, 2, \dots, n). \quad (17.4.1)$$

Deplasarea virtuală a acestui punct (considerînd $t = \text{const.}$) este :

$$\delta \bar{r}_s = \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_h} \delta q_h = \sum_{k=1}^h \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (17.4.2. a)$$

Expresia vitezei se obține derivînd vectorul de poziție \bar{r}_s în raport cu timpul, prin intermediul coordonatelor generalizate, astfel că se obține :

$$\bar{v}_s = \dot{\bar{r}}_s = \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial t}. \quad (17.4.2. b)$$

Din combinarea principiului lui d'Alembert cu principiul deplasărilor virtuale a rezultat expresia :

$$\sum_{s=1}^n (\bar{F}_s - m_s \cdot \bar{a}_s) \delta \bar{r}_s = 0.$$

Introducînd expresia deplasărilor virtuale $\delta \bar{r}_s$ de mai sus, se obține :

$$\sum_{s=1}^n (\bar{F}_s - m_s \cdot \bar{a}_s) \sum_{k=1}^h \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k} \delta q_k = 0. \quad (17.4.3)$$

Dacă se dă factor comun δq_k se poate inversa ordinea de însumare și se poate scrie :

$$\sum_{k=1}^h \delta q_k \sum_{s=1}^n (\bar{F}_s - m_s \cdot \bar{a}_s) \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k} = 0. \quad (17.4.4)$$

Această expresie se poate scrie desfășurat astfel :

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n (\bar{F}_s - m_s \cdot \bar{a}_s) \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_1} \delta q_1 + \sum_{s=1}^n (\bar{F}_s - m_s \cdot \bar{a}_s) \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_2} \delta q_2 + \\ + \sum_{s=1}^n (\bar{F}_s - m_s \cdot \bar{a}_s) \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k} \delta q_k = 0. \end{aligned}$$

În această expresie q_1, q_2, \dots, q_h sînt diferite de zero și independente între ele. Se deduce că este necesar și suficient ca, coeficienții (parantezele) să fie egali cu zero. Rezultă un sistem de h ecuații. de forma :

$$\sum_{s=1}^n (\bar{F}_s - m_s \cdot \bar{a}_s) \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k} = 0, \text{ unde } (k = 1, 2, \dots, h). \quad (17.4.5)$$

Această relație poate fi scrisă și sub forma :

$$\sum_{s=1}^n m_s \cdot \bar{a}_s \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k} = \sum_{s=1}^n \bar{F}_s \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k} \text{ (unde } k = 1 \dots h). \quad (17.4.6)$$

Partea din dreapta egalității de mai sus reprezintă tocmai forța generalizată Q_k :

$$Q_k = \sum_{s=1}^n \bar{F}_s \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k}. \quad (17.4.7)$$

Se poate scrie, ca urmare :

$$\sum_{s=1}^n m_s \cdot \bar{a}_s \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k} = Q_k, \text{ unde } (k = 1, 2, \dots, h).$$

Aceste ecuații sînt cunoscute sub numele de *ecuațiile lui Lagrange de speța I*.

Partea din stînga se poate transforma convenabil, după cum urmează :

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n m_s \cdot \bar{a}_s \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k} &= \sum_{s=1}^n m_s \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k} \cdot \frac{d\bar{v}_s}{dt} = \sum_{s=1}^n \frac{d}{dt} \left(m_s \cdot \bar{v}_s \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k} \right) - \\ &- \sum_{s=1}^n \bar{v}_s \frac{d}{dt} \left(m_s \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^n m_s \cdot \bar{v}_s \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k} - \sum_{s=1}^n \bar{v}_s \cdot m_s \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k} \right). \end{aligned}$$

Această relație se poate transforma dacă se observă că :

$$\frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k} = \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial \dot{q}_k},$$

deoarece q_k și \dot{q}_k sînt independente între ele.

De asemenea, se poate observa că :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial q_k}.$$

Folosind aceste observații, se obține :

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n m_s \cdot \bar{a}_s \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^n m_s \cdot \bar{v}_s \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial \dot{q}_k} - \sum_{s=1}^n m_s \cdot \bar{v}_s \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial q_k} = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^n m_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{v_s^2}{2} \right) - \sum_{s=1}^n m_s \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{v_s^2}{2} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{s=1}^n \frac{m_s \cdot v_s^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{s=1}^n \frac{m_s \cdot v_s^2}{2} \right) = Q_k. \end{aligned}$$

Ținînd seama de expresia energiei cinetice :

$$E = \sum_{s=1}^n \frac{m_s \cdot v_s^2}{2}.$$

Se obține :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = Q_k \quad (\text{unde: } k = 1, \dots, h) \quad (17.4.8)$$

Acest sistem format din h ecuații diferențiale sînt cunoscute sub numele de *ecuațiile lui Lagrange de speța a II-a*.

Un caz deosebit de interesant apare dacă forța generalizată Q_k derivă dintr-o funcție de forța U dată de o expresie de forma :

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_h, t). \quad (17.4.9)$$

O astfel de funcție se numește și pseudofuncție de forță :

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}. \quad (17.4.10)$$

Forța generalizată se numește, în acest caz, conservativă. Ecuațiile lui Lagrange se pot scrie :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (\text{unde: } k = 1, 2, \dots, h),$$

sau :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} (E + U) = 0. \quad (17.4.11)$$

Se notează $E + U = L$ și se numește funcția obținută drept funcția lui Lagrange sau potențial cinetic.

Energia cinetică este de forma :

$$E = E(q_1, q_2, \dots, q_h, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_h, t),$$

iar funcția de forță U este de forma :

$$U = U(q_1, \dots, q_h, t).$$

Rezultă că funcția lui Lagrange depinde de coordonatele generalizate q_k , de vitezele generalizate \dot{q}_k și de timpul t :

$$L = L(q_1 \dots q_h, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_h, t).$$

Se observă că :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k}$$

astfel că ecuațiile lui Lagrange devin :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (\text{unde } k = 1, 2, \dots, h). \quad (17.4.12)$$

Ecuațiile lui Lagrange reprezintă un sistem de h ecuații diferențiale de ordinul II în raport cu funcțiile q_k (coordoanatele generalizate) și prin rezolvarea acestui sistem de ecuații se ajunge la soluții unice avîndu-se în vedere condițiile particulare (inițiale) referitoare la pozițiile (q_k) și vitezele (\dot{q}_k).

17.5. ECUAȚIILE LUI HAMILTON. IMPULS GENERALIZAT

Pentru stabilirea ecuațiilor lui Lagrange a fost necesară introducerea noțiunilor de coordonate generalizate, viteze generalizate și forță generalizată. În categoria coordonatelor generalizate intră coordonatele unui punct în spațiu măsurate în unități de lungime, la rînd cu unghiuri măsurate în radiani.

În categoria vitezelor generalizate sînt puse pe aceeași treaptă vitezele liniare, măsurate în metri pe secundă, cu vitezele unghiulare măsurate în radiani pe secundă.

În mod asemănător, în categoria forțelor generalizate sînt considerate cu același tratament atît forțele propriu-zise măsurate în Newtoni, cît și momentele cuplurilor măsurate în Newton·metru.

Ecuațiile măsurării analitice au condus la încă o noțiune importantă de acest gen, și anume la noțiunea de impuls generalizat.

Pornind de la ecuațiile lui Lagrange, în cazul în care există o funcție de forță :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (\text{unde } k = 1, 2, 3, \dots, h)$$

funcția lui Lagrange este de forma :

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_h, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_h, t), \quad (17.5.1)$$

și este definită de relația : $L = E + U$, care arată că este o funcție de potențial cinetic.

Dacă :

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

se poate obține ușor o integrală primă ; ecuația lui Lagrange devine :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0$$

și se obține integrala primă :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = C = \text{constantă.} \quad (17.5.1, b)$$

Se obține așadar o mărime fizică ce se conservă :

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \quad (17.5.2)$$

Semnificația acestei mărimi fizice este deosebit de interesantă. Pentru a scoate în evidență această semnificație fizică este convenabil a se lua în considerare, în coordonate polare, mișcarea unui punct în plan. În acest caz, expresia vitezei este :

$$\vec{v} = \dot{r} \cdot \vec{\rho} + \vec{\eta} \cdot r \cdot \dot{\theta},$$

iar mărimea vitezei este

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\theta}^2}. \quad (17.5.3)$$

Energia cinetică a punctului este dată de expresia :

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\theta}^2). \quad (17.5.4)$$

Se observă că, în acest caz, coordonatele generalizate sînt r și θ , iar funcția lui Lagrange este :

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\theta}^2) + U(r, \theta, t). \quad (17.5.5)$$

Luînd în considerare mărimea arătată, se obține :

$$P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \cdot \dot{r} \text{ și } P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta}. \quad (17.5.6)$$

Prima expresie $P_r = m \cdot \dot{r}$ este impulsul punctului, iar a doua $P_\theta = m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta}$ este momentul cinetic în raport cu originea 0.

Mărimea :

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

poartă numele de impuls generalizat și poate fi un impuls, un moment cinetic sau o mărime mai generală fără a se face o distincție între ele.

Ecuațiile :

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

se mai pot pune și sub forma :

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \text{ (unde : } k = 1, 2, \dots, h), \quad (17.5.7)$$

și reprezintă un sistem de h ecuații diferențiale de ordinul doi.

Integrala energiei. Funcția lui Hamilton. În cele de mai sus s-a considerat cazul particular în care impulsul generalizat se conservă. Ca și în mecanica newtoniană se poate arăta că și în mecanica analitică, energia cinetică se conservă.

Pornind de la ecuațiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (\text{unde: } k = 1, 2, \dots, h),$$

și înmulțind respectiv cu $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_h$ și adunând, se obține :

$$\sum_{k=1}^h \dot{q}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \sum_{k=1}^h \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \quad (17.5.8)$$

Se observă că în baza relației de derivare a unui produs $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$ se poate scrie :

$$\sum_{k=1}^h \dot{q}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_{k=1}^h \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \sum_{k=1}^h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k, \quad (17.5.9)$$

de unde rezultă :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \cdot \dot{q}_k - \sum_{k=1}^h \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) - \sum_{k=1}^h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k = 0. \quad (17.5.10)$$

Funcția L a lui Lagrange de forma :

$$L(q_1, \dots, q_h; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_h; t)$$

depinde de coordonatele generalizate, de vitezele generalizate și de timpul t .

Derivata totală a acestei funcții în raport cu timpul este :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^h \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (17.5.11)$$

Rezultă că relația (17.5.10) se mai poate scrie sub forma :

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \frac{dL}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

dar :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = P_k \quad (17.5.12)$$

astfel că se mai poate scrie :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^h P_k \dot{q}_k - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (17.5.13)$$

Dacă $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, relația (17.5.13) devine :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^h P_k \dot{q}_k - L \right) = 0 \quad (17.5.14)$$

și rezultă :

$$\sum_{k=1}^n P_k \cdot \dot{q}_k - L = H = C^{ta}. \quad (17.5.15)$$

Funcția H este o integrală primă și este egală cu o constantă. Această funcție poartă numele de *funcția lui Hamilton*.

În cazul legăturilor scleronome, funcția lui Hamilton reprezintă energia mecanică totală a sistemului.

În cazul legăturilor scleronome, energia cinetică este o formă pătratică în viteze generalizate \dot{q}_k . Se poate observa că :

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k}, \quad (17.5.16)$$

deoarece :

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0,$$

fiindcă U nu depinde de vitezele generalizate \dot{q}_k .

Reluând relațiile (17.5.12) și (17.5.15), se poate scrie :

$$\sum_{k=1}^h P_k \cdot \dot{q}_k = \sum_{k=1}^h \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2E, \quad (17.5.17)$$

de unde rezultă o altă formă a expresiei (17.5.15) funcției lui Hamilton :

$$H = 2E - L = 2E - (E_k + U) = E - U = E + V = C^{ta}. \quad (17.5.18)$$

Rezultă că funcția H a lui Hamilton este egală cu o constantă și este egală cu suma dintre energia cinetică și energia potențială, adică energia mecanică totală a sistemului de puncte materiale.

Ecuatiile canonice ale lui Hamilton. Ecuatiile lui Lagrange constituie un sistem de h ecuații diferențiale de ordinul II care reprezintă mișcarea unui sistem de n puncte materiale supuse unor legături olonome și reonome cu h grade de libertate.

Deoarece uneori rezolvarea unui astfel de sistem de ecuații diferențiale reprezintă dificultăți, Hamilton a imaginat un procedeu de reducere a ordinului acestor ecuații diferențiale, adică de formare a unui sistem echivalent de $2h$ ecuații diferențiale de ordinul I care, evident, este mult mai ușor de rezolvat.

Pornind de la expresiile definite pentru impulsurile generalizate :

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \text{ (unde } k = 1, 2, \dots, h),$$

care reprezintă un sistem de h ecuații diferențiale în variabilele P_k și \dot{q}_k , și introducându-le în ecuațiile lui Lagrange, se obține :

$$\frac{dP_k}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \text{ (unde } k = 1, 2, \dots, h). \quad (17.5.19)$$

Rezultă un sistem de $2h$ ecuații diferențiale de ordinul întâi dat de relațiile :

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}; \quad \dot{P}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \text{ (unde } k = 1, 2, \dots, h). \quad (17.5.20)$$

În realitate și acest sistem de $2h$ ecuații diferențiale de ordinul I prezintă dificultăți de rezolvare. Hamilton a imaginat un mod de a obține un sistem mai simplu de ecuații diferențiale cunoscute sub numele de *ecuațiile canonice*

ale lui Hamilton. Pentru aceasta, în funcția lui Hamilton a înlocuit vitezele generalizate $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_h)$ în funcție de coordonatele generalizate (q_1, q_2, \dots, q_h) , de impulsurile generalizate (P_1, P_2, \dots, P_h) și de timpul t .

În acest mod funcția lui Hamilton devine o funcție de coordonate generalizate și de timpul t . În acest scop se rezolvă sistemul :

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \text{ (unde } k = 1, 2, \dots, h)$$

și se deduce :

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k(q_1, q_2, \dots, q_h, P_1, \dots, P_h, t). \quad (17.5.21)$$

Ecuatiile canonice ale lui Hamilton sînt de două tipuri :

Primul tip de ecuații canonice se obține derivînd parțial funcția H în raport cu cîte unul din impulsurile generalizate P_i . Se obține :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial P_i} &= \frac{\partial}{\partial P_i} \left[\sum_{k=1}^h P_k \dot{q}_k - L(q_1, \dots, q_h, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_h, t) \right] = \\ &= \dot{q}_i + \sum_{k=1}^h P_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial P_i} - \sum_{k=1}^h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \cdot \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial P_i}. \end{aligned}$$

Se observă că :

$$\sum_{k=1}^h P_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial P_i} = \sum_{k=1}^h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial P_i},$$

și se obține :

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \dot{q}_i \text{ (unde } i = 1, 2, \dots, h). \quad (17.5.22)$$

Al doilea tip de ecuații diferențiale se poate obține derivînd parțial funcția H în raport cu una din coordonatele generalizate q_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_i} &= \sum_{k=1}^h P_k \dot{q}_k - L(q_1, \dots, q_h, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_h, t) = \\ &= \sum_{k=1}^h P_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Se observă că :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = P_k$$

și deci :

$$\sum_{k=1}^h P_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} = 0.$$

Astfel că se obține al doilea tip de ecuații :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -P_i \text{ (unde } i = 1, 2, \dots, h). \quad (17.5.23)$$

Pentru obținerea celor două tipuri de ecuații s-a considerat că variabilele P_k și q_k sînt independente, iar \dot{q}_k este o funcție de forma :

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k (q_1 \dots q_h, P_1 \dots, P_h, t).$$

Ecuațiile canonice ale lui Hamilton formează un sistem de $2h$ ecuații diferențiale de ordinul 1 cu $2h$ variabile ce se pot scrie concentrat sub forma :

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \dot{q}_i; \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{P}_i. \quad (17.5.24)$$

În acest sistem de ecuații derivatele \dot{P}_i și \dot{q}_i apar ca funcții explicite de $P_1 \dots P_h, q_1 \dots q_h$ și t .

Spațiul configurațiilor și spațiul fazelor. Noțiunile introduse în mecanica analitică permit efectuarea unor reprezentări a configurației sistemului din spațiul euclidian cu trei dimensiuni la determinarea poziției unui punct figurativ P în spațiul coordonatelor generalizate q_h cu h dimensiuni, denumit spațiul figurativ sau spațiul configurațiilor. În acest mod, mișcarea sistemului format din puncte materiale în spațiul euclidian t_3 este reprezentată de mișcarea punctului fictiv P în spațiul configurațiilor.

În acest spațiu, poziția punctului fictiv P ne dă o informație despre configurația sistemului de puncte materiale la un moment dat, dar nu și despre mișcarea sistemului.

Folosind variabilele $p_1, \dots, p_h, q_1, \dots, q_h$, se poate lua în considerare un alt spațiu tot cu $2h$ dimensiuni care poartă numele de spațiul fazelor. Coordonatele p_k și q_k se numesc coordonate canonice și pot fi considerate drept coordonatele unui punct într-un spațiu cu $2h$ dimensiuni.

Cu ajutorul coordonatelor canonice p_k și q_k se determină starea dinamică a sistemului.

Prin aceste reprezentări se obține o imagine a legăturii dintre poziția punctului și impulsul său (care în cazul punctului de masă constantă reprezintă la scară chiar viteza punctului).

În cazul sistemelor cu un singur grad de libertate se obține un plan al fazelor de coordonate q și p .

Acest plan al fazelor este folosit în mod deosebit la studiul anumitor probleme de vibrații, stabilitate, permițînd obținerea unor concluzii clare asupra mișcării.

APLICAȚIA 1

Se consideră sistemul de corpuri din figura 17.1, cu elementele geometrice date. Să se studieze mișcarea și să se determine reacțiunile dinamice.

Rezolvare

Se izolează corpurile ; se figurează forțele date, de legătură și elementele corespunzătoare de inerție.

Se observă că discul de greutate P are o mișcare de transport de translație (a) în sus și totodată o mișcare relativă plan-paralelă, în jos (a_r, ε_2).

Aplicînd principiul lui d'Alembert rezultă :

$$\begin{aligned} \text{Corpul (1)} \quad & \left(\sum Y_i = 0 \right); \quad \frac{P}{2} - \frac{P}{2g} a - T_1 = 0, \\ & \left(\sum M_{i_0} = 0 \right); \quad T_1 \cdot R - T_2 \cdot R - I_0 \cdot \varepsilon_1 = 0. \end{aligned}$$

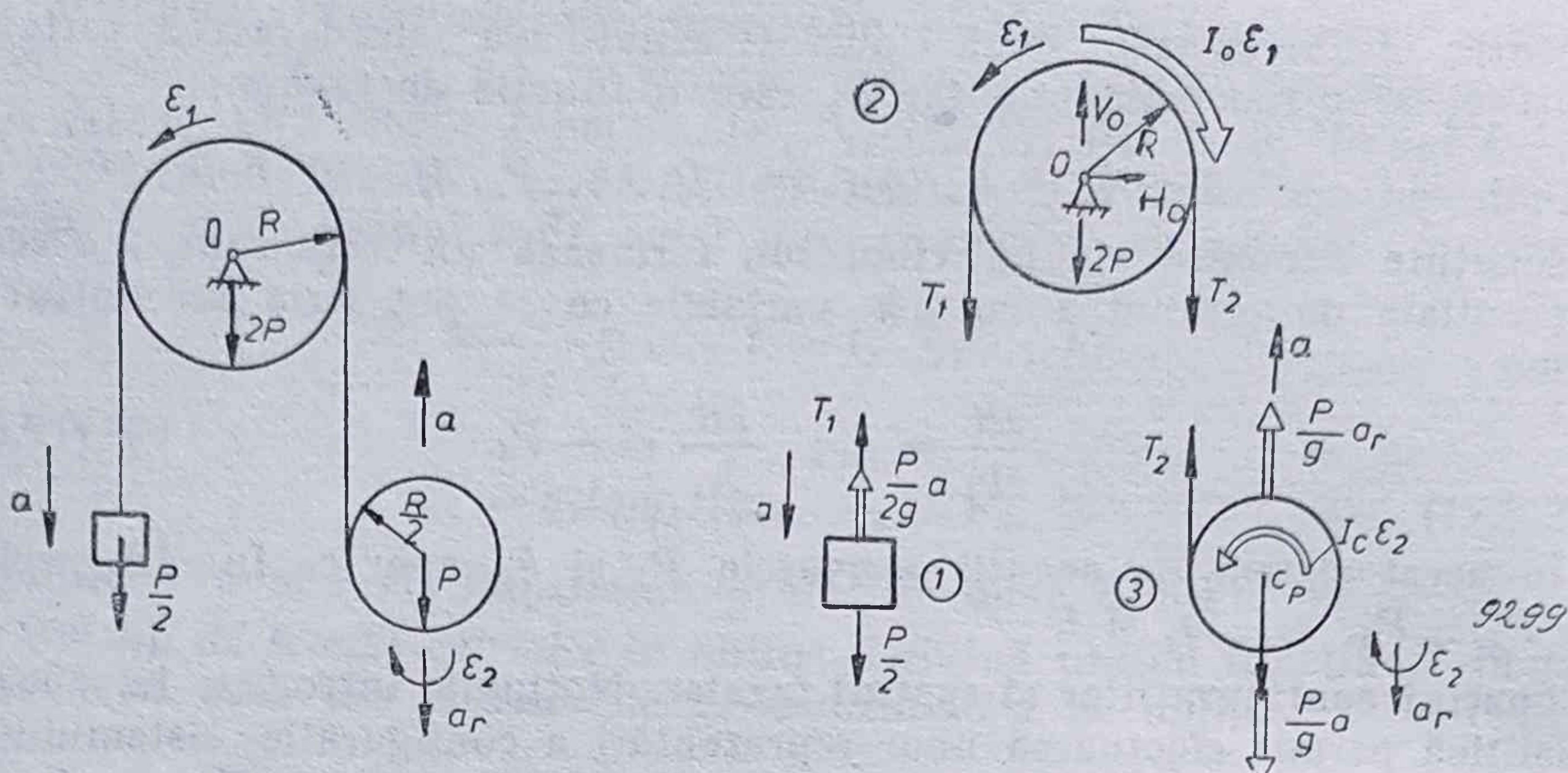


Fig. 17.1

Corpul (2) $(\sum X_i = 0) ; H_0 = 0 ;$
 $(\sum Y_i = 0) ; V_0 - T_1 + T_2 + 2P = 0.$

Corpul (3) $(\sum Y_i = 0) ; T_2 + \frac{P}{g} a_r - \frac{P}{g} a - P = 0$
 $(\sum M_{i_c} = 0) ; T_2 \frac{R}{2} - I_c \cdot \epsilon_2 = 0.$

Se adaugă relațiile de legătură cinematică :

$$a = R \cdot \epsilon_1 \text{ și } a_r = \frac{R}{2} \cdot \epsilon_2.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, se obține :

$$a = \frac{g}{11} ; T_1 = \frac{5}{11} P ; T_2 = \frac{4}{11} P ; H_0 = 0 ; V_0 = \frac{31}{11} P ; a_r = \frac{8}{11} g.$$

APLICAȚIA 2

Să se determine, cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual, mărimea tensiunii din firul BD , pentru echilibrul sistemului de bare (fig. 17.2).

Rezolvare

Se desface legătura prin fir, constatînd că participă la lucrul mecanic doar tensiunea din B și greutatea G din C .

Se va lucra cu axe pe direcțiile respectivelor forțe, deci Dy pentru G și Ds pentru T . Ecuația de lucru mecanic virtual va fi :

$$\delta L = G \cdot \delta y_c - T \cdot \delta s_B = 0 ;$$

$$y_c = \frac{l}{2} \sin \theta ; \delta y_c = \frac{l}{2} \cdot \cos \theta \cdot \delta \theta ;$$

$$s_B = 2l \cdot \sin \frac{\theta}{2} ; \delta s_B = l \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \delta \theta.$$

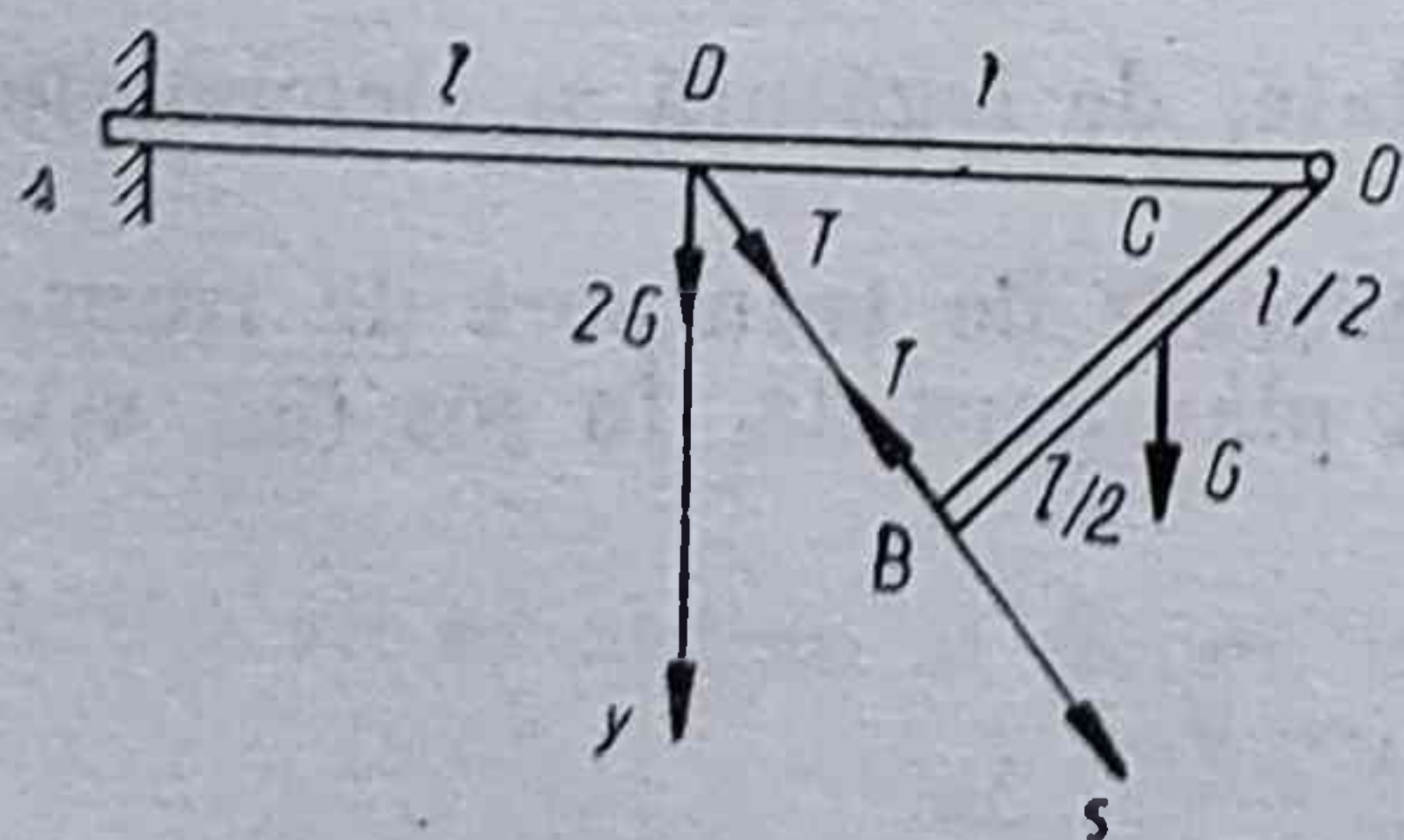


Fig. 17.2

Substituind în ecuație valorile găsite, se obține :

$$G \frac{l}{2} \cos \theta \cdot \delta \theta - T \cdot l \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \delta \theta = 0.$$

Cum $\delta \theta \neq 0$, rezultă că :

$$T = \frac{G \cos \theta}{2 \cos \frac{\theta}{2}}.$$

APLICAȚIA 3

Să se studieze mișcarea sistemului din figura 17.3, în care sînt specificate elementele mecanice și geometrice respective, cu principiul lucrului mecanic virtual.

Rezolvare

Pe lîngă forțele și cuplurile date și de legătură, se aplică elementele de inerție corespunzătoare mișcărilor corpurilor.

Se aplică principiul lucrului mecanic virtual sub forma :

$$\begin{aligned} \delta L = M_0 \cdot \delta \theta_2 - I_0 \cdot \varepsilon_2 \cdot \delta \theta_2 - \frac{P}{g} a_c \cdot \delta x_c - I_c \cdot \varepsilon_1 \cdot \delta \theta_1 - M_r \cdot \delta \theta_1 - \\ - Q \cdot \delta x - \frac{Q}{g} a \cdot \delta x = 0. \end{aligned}$$

Forța de frecare $F_f \leq \mu \cdot N$ nu dă lucru mecanic fiind aplicată în centrul instantaneu de rotație.

Relațiile de legătură între variabile sînt date în funcție de a :

$$a_1 = \frac{3}{4} a; \quad a_c = \frac{a}{2}; \quad \varepsilon_1 = \frac{a}{4r}; \quad \varepsilon_2 = \frac{3}{4} \frac{a}{R}.$$

$$\delta x_c = \frac{\delta x}{2}; \quad \delta \theta_1 = \frac{1}{4r} \delta x; \quad \delta \theta_2 = \frac{3}{4R} \delta x.$$

Astfel, lucrul mecanic virtual devine :

$$\delta L = \left[\frac{3}{4} \frac{M_0}{R} - \frac{9}{16} I_0 \frac{a}{R^2} - \frac{P}{4} \frac{a}{g} - \frac{I_c \cdot a}{16r^2} - \frac{s \cdot P}{4r} - Q - \frac{Q}{g} a \right] \delta x = 0.$$

Cum $\delta x \neq 0$, se obține o ecuație de gradul I în a , care are soluția :

$$a = \frac{\frac{3}{4} \frac{M_0}{R} - \frac{P}{4} \frac{s}{r} - Q}{\frac{9}{32} G + \frac{P}{4} + \frac{I_c}{16r^2} g + Q} \cdot g.$$

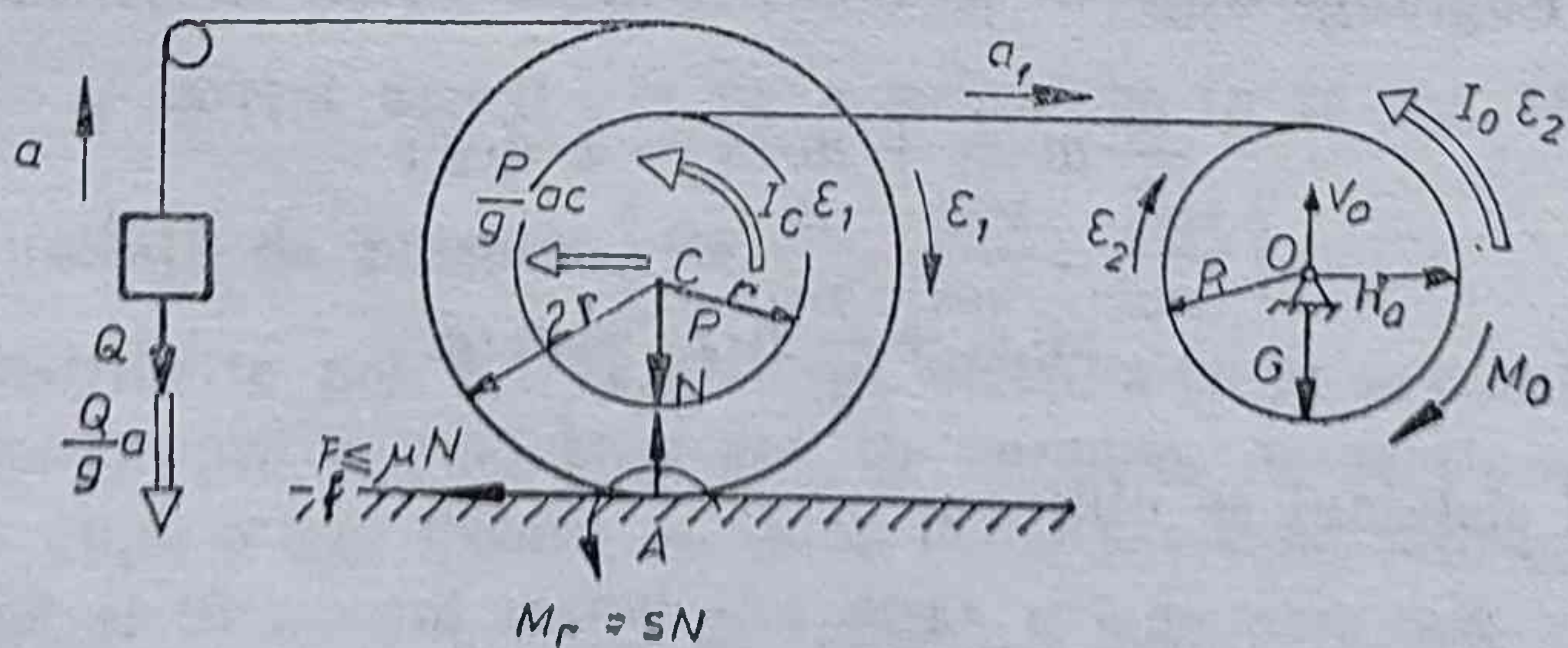


Fig. 17.3

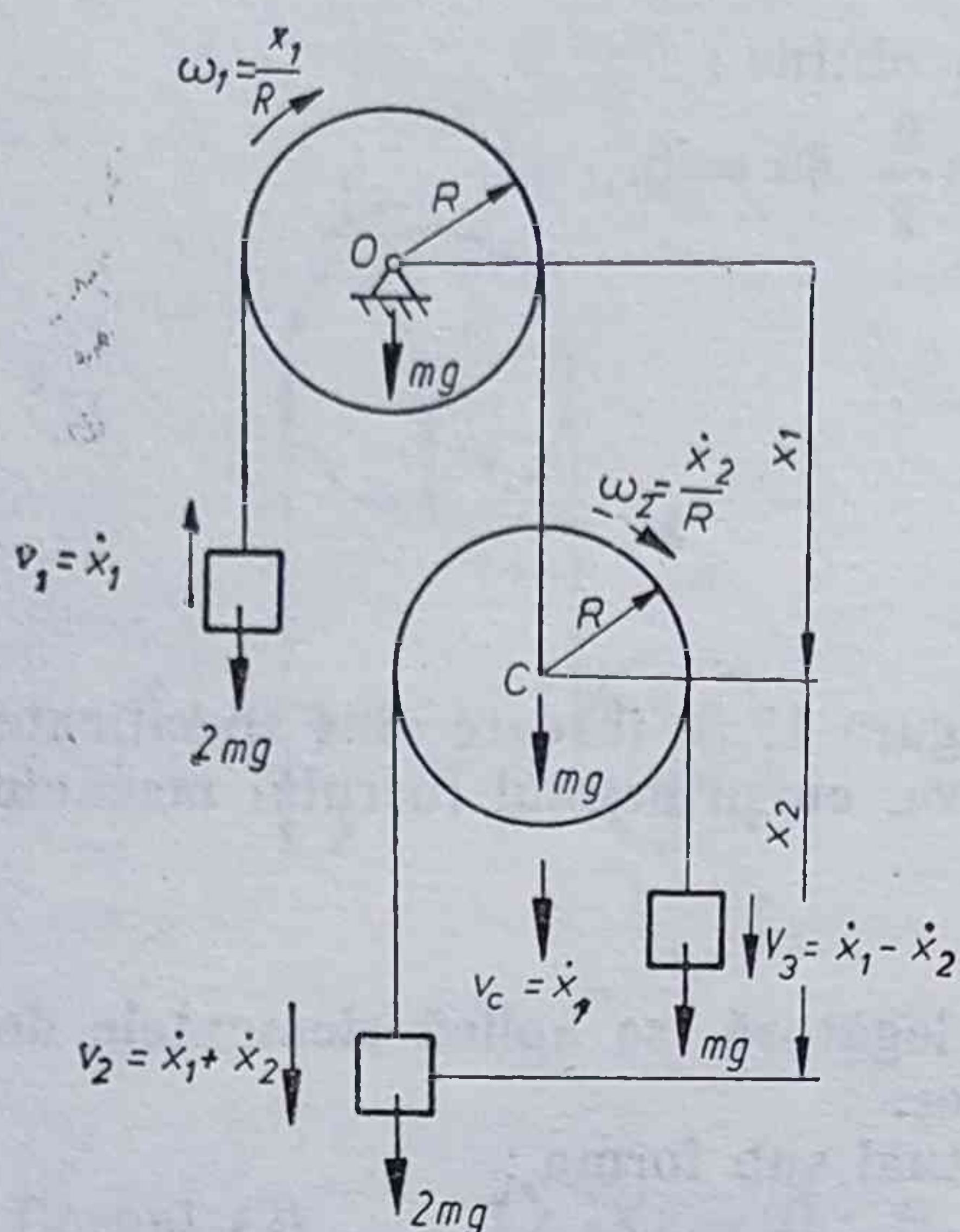


Fig. 17.4

APLICAȚIA 4

Se dă sistemul din figura 17.4. Se cer accelerațiile greutăților $2m \cdot g$ și $m \cdot g$ de la scripetele mobil.

Rezolvare

Sistemul are două grade de libertate; se vor alege două coordonate generalizate x_1 și x_2 , ultima fiind coordonată relativă.

Energia cinetică a sistemului este :

$$E = \frac{1}{2} 2m \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m \cdot R^2}{2} \left(\frac{\dot{x}_1}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} 2m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m \cdot R^2}{2} \left(\frac{\dot{x}_2}{R} \right)^2.$$

Grupînd termenii, rezultă :

$$E = \frac{13}{4} m \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{7}{4} m \cdot \dot{x}_2^2 + m \cdot \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2.$$

Pentru calculul termenului Q_k se folosește formula $Q_k = \frac{\delta L_k}{\delta q_k}$.

Astfel :

$$Q_{x_1} = \frac{\delta L_{x_1}}{\delta x_1} = \frac{(2m \cdot g + m \cdot g + m \cdot g - 2m \cdot g) \delta x_1}{\delta x_1} = 2m \cdot g;$$

$$Q_{x_2} = \frac{\delta L_{x_2}}{\delta x_2} = \frac{(2m \cdot g - m \cdot g) \delta x_2}{\delta x_2} = m \cdot g.$$

Se calculează termenii ecuațiilor lui Lagrange :

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = \frac{\partial E}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{x}_1} = \frac{13}{2} m \cdot \dot{x}_1 + m \cdot \dot{x}_2,$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_2} = \frac{7}{2} m \cdot \dot{x}_2 + m \cdot \dot{x}_1.$$

Ecuațiile Lagrange sînt :

$$\frac{13}{2} m \cdot \ddot{x}_1 + m \cdot \ddot{x}_2 = 2m \cdot g;$$

$$m \cdot \ddot{x}_1 + \frac{7}{2} m \cdot \ddot{x}_2 = m \cdot g.$$

Rezolvînd sistemul se obține :

$$\ddot{x}_1 = \frac{8}{29} g; \quad \ddot{x}_2 = \frac{6}{29} g.$$

REZISTENȚA MATERIALELOR

18.

IPOTEZE ȘI CONCEPTE FUNDAMENTALE ALE REZISTENȚEI MATERIALELOR

18.1. MODELAREA CORPURILOR DEFORMABILE

Materialele utilizate în practica inginerescă sînt *deformabile*. Sub acțiunea sarcinilor exterioare, particulele care le compun își modifică poziția relativă, ceea ce duce la modificarea formei și dimensiunilor pieselor și structurilor.

Rezistența materialelor urmărește stabilirea unor relații între sarcinile exterioare aplicate corpurilor reale deformabile, pe de o parte, și eforturile interioare și deformațiile produse de acestea, pe de altă parte. Pe baza acestor relații, se poate face dimensionarea organelor de mașini și a elementelor de construcții, astfel încît să reziste în bune condiții sarcinilor la care sînt supuse în timpul funcționării.

În rezolvarea problemelor, structura reală este înlocuită printr-un model mecanic simplificat. În acest scop, se adoptă ipoteze simplificatoare privind : 1) caracterul și distribuția sarcinilor aplicate ; 2) forma și dimensiunile elementelor componente ; 3) proprietățile fizico-mecanice ale materialelor.

Clasificarea sarcinilor. Sarcinile exterioare aplicate corpurilor sînt rezultatul interacțiunii mecanice sau al acțiunii unor cîmpuri (magnetic, gravitațional etc.). Se disting :

— *forțe concentrate* (P în fig. 18.1), care se măsoară în unități de forță (N, daN) ;

— *sarcini distribuite* pe un element liniar (q în fig. 18.1), care se măsoară în $\frac{N}{m}$ sau $\frac{daN}{cm}$ și sarcini distribuite pe o suprafață (p în fig. 18.1), care se

măsoară în unități de presiune $\left(Pa, \frac{N}{m^2}, \frac{daN}{cm^2}, \frac{daN}{mm^2} \right)$.

Sarcinile distribuite pot fi : 1) uniform distribuite ($q = \text{const.}$) — ca în cazul greutatei proprii a unei bare sau fir omogen, de secțiune constantă, 2) distribuite după o lege liniară — ca în cazul presiunii hidrostatice pe un perete vertical și 3) sarcini distribuite după o lege oarecare, ca presiunea vîntului pe o structură etc.

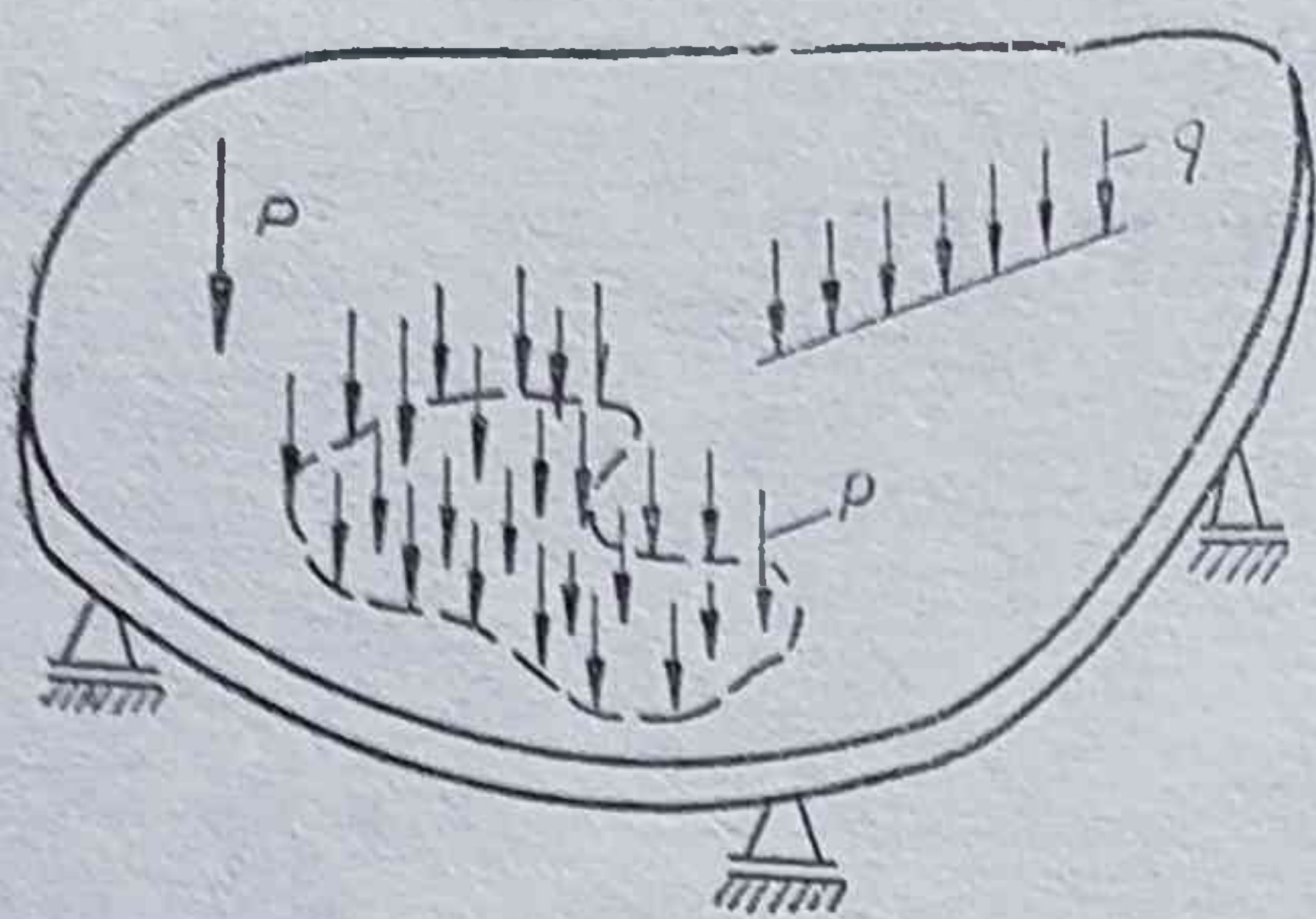


Fig. 18.1

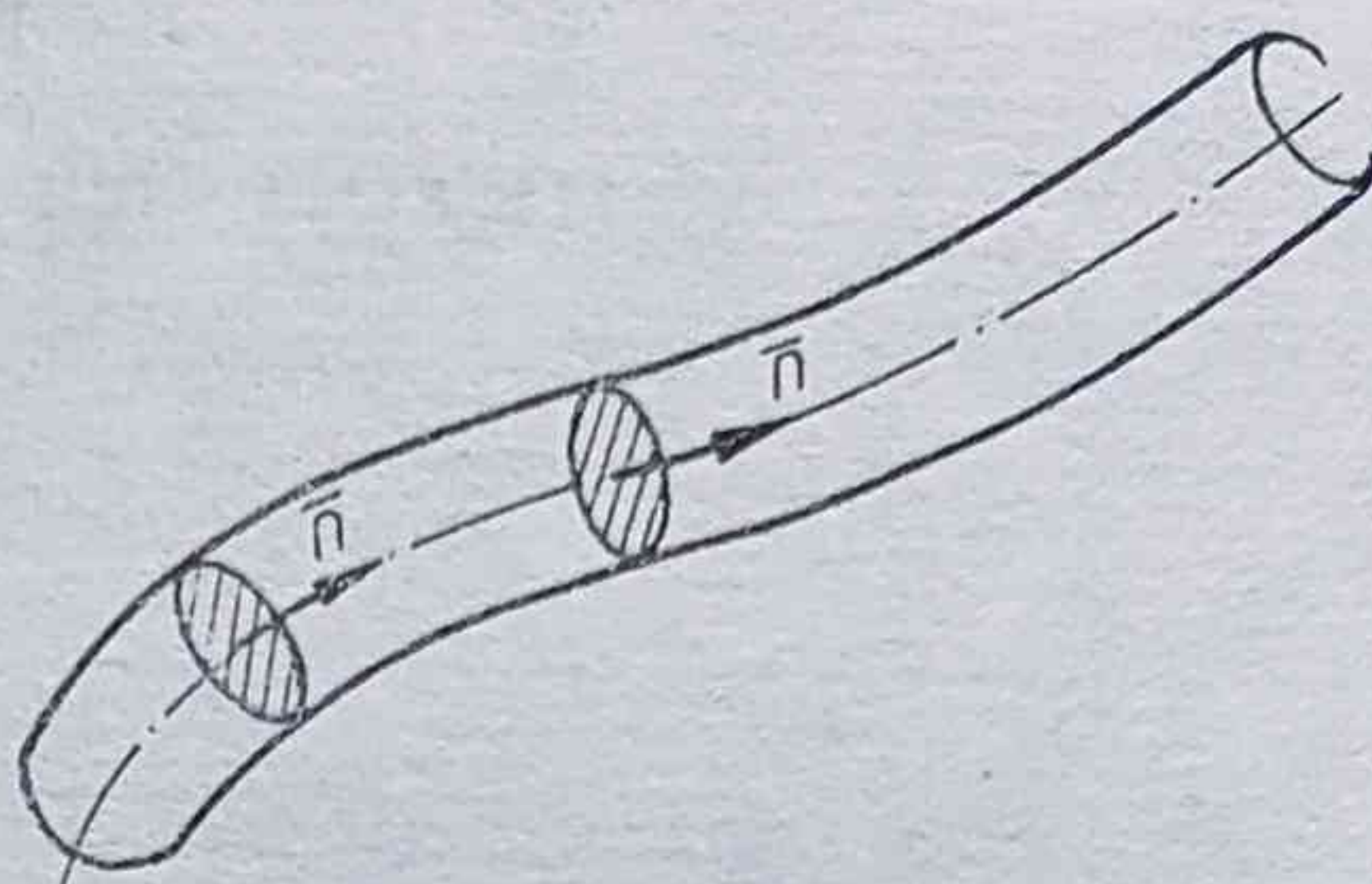


Fig. 18.2

În funcție de locul de aplicare, se deosebesc :

- *sarcini de suprafață*, aplicate la suprafața corpului, care rezultă de obicei din interacțiunea mecanică între corpuri ;
- *forțe masice* (de volum), aplicate în toată masa corpului, care rezultă din acțiunea unui câmp (gravitațional, magnetic, centrifugal etc.).

În funcție de modul de variație în timp, se pot considera :

- *forțe aplicate static*, a căror intensitate crește monoton, de la zero la valoarea nominală, într-un timp foarte lung, pe măsura deformării corpului, rămânând apoi constante ;
- *forțe aplicate dinamic*, care ating valoarea nominală într-un timp relativ scurt, comparabil cu perioada proprie de oscilație a elementului sau structurii solicitate.

Schematizarea corpurilor. În funcție de forma și caracteristicile geometrice, în rezistența materialelor se studiază următoarele tipuri de corpuri :

1. *Barele și firele*, la care o dimensiune — lungimea — este predominantă în raport cu celelalte două. O bară este generată prin deplasarea unei suprafețe plane, de secțiune constantă sau variabilă, în lungul unei curbe (fig. 18.2), astfel încât normala la suprafață, în centrul ei de greutate, să rămână mereu tangentă la curbă.

Axa barei este linia care unește centrele de greutate ale secțiunilor transversale. Secțiunea transversală este perpendiculară pe axa barei. Barele pot fi drepte sau curbe, de secțiune constantă sau variabilă.

Firele au aceleași caracteristici geometrice, dar sînt flexibile, adică nu au rigiditate la încovoiere.

2. *Plăcile*, la care o dimensiune — grosimea — este mult mai mică în raport cu celelalte două. Elementele geometrice caracteristice ale plăcilor sînt suprafața mediană (plană sau curbă) și grosimea — măsurată pe o normală la suprafața mediană.

3. *Corpurile masive*, la care cele trei dimensiuni au același ordin de mărime (de exemplu, blocurile de fundație, bilele și rolele rulmenților).

Ipoteze privind proprietățile materialelor. În vederea simplificării relațiilor de calcul, în rezistența materialelor se adoptă următoarele ipoteze privind proprietățile materialelor :

1. *Ipoteza mediului continuu*, prin care se admite că tot volumul unui corp este ocupat de substanță.

2. *Ipoteza mediului omogen*, în baza căreia proprietățile fizice (de exemplu, densitatea de masă) se consideră constante în orice punct al unui corp.

3. *Ipoteza mediului izotrop*, potrivit căreia în orice punct al corpului proprietățile mecanice nu depind de direcție (în particular, de direcția de aplicare a solicitării).

4. *Ipoteza mediului elastic*. Sub acțiunea solicitării exterioare un corp elastic se deformează instantaneu, iar la îndepărtarea sarcinii revine instantaneu la dimensiunile inițiale. De asemenea, acțiunea unei forțe într-un punct oarecare se transmite instantaneu în tot corpul.

Alte ipoteze ale rezistenței materialelor. În afara celor patru ipoteze menționate mai sus, privind *continuitatea, omogenitatea, izotropia și elasticitatea* materialelor, în rezistența materialelor se admit și următoarele simplificări:

5. *Ipoteza liniarității* relațiilor cauză-efect. În particular, se admit relații liniare între forțe și deformații. La sisteme liniare se poate aplica *principiul suprapunerii efectelor*. Ca urmare, ordinea aplicării sarcinilor exterioare nu influențează starea finală a sistemului.

6. *Ipoteza micilor deformații* conform căreia se consideră că deformațiile corpurilor elastice sînt mici în comparație cu dimensiunile acestora. Prin această ipoteză se exclud *neliniaritățile geometrice*, adică cele determinate de forma organelor de mașini, precum și *neliniaritățile fizice*, menținînd solicitările la valori reduse, la care relațiile între eforturi și deformații sînt liniare. Se consideră că deformațiile mici ale corpurilor nu afectează acțiunea forțelor și sînt neglijabile în calculul solicitărilor. Ca urmare, la calculul reacțiunilor din reazeme, se consideră corpurile nedeformate, aplicînd ecuațiile de echilibru din statică, la fel ca la corpurile rigide.

7. *Principiul lui Saint-Venant*. Dacă asupra unui corp elastic acționează două sisteme de sarcini exterioare, echivalente din punct de vedere static, atunci la distanță mare de zona de aplicare a acestora efectul lor este același.

De exemplu, sarcina distribuită q și forța P din figura 18.3, echivalente din punct de vedere static, produc local efecte diferite, dar la distanță, de exemplu în încastrare, efectul lor este același.

8. *Ipoteza secțiunii plane* (Ipoteza lui Bernoulli). O secțiune plană și perpendiculară pe axa unei bare nesolicitate, rămîne plană și perpendiculară pe axa barei și după aplicarea sarcinilor exterioare.

De exemplu, secțiunea $B-B$, perpendiculară pe axa nedeformată a barei din figura 18.4, a , rămîne plană și perpendiculară pe axa deformată a barei (fig. 18.4, b) și după aplicarea forței P .

Primele șapte ipoteze sînt comune rezistenței materialelor și teoriei elasticității. Ipoteza lui Bernoulli este specifică rezistenței materialelor.

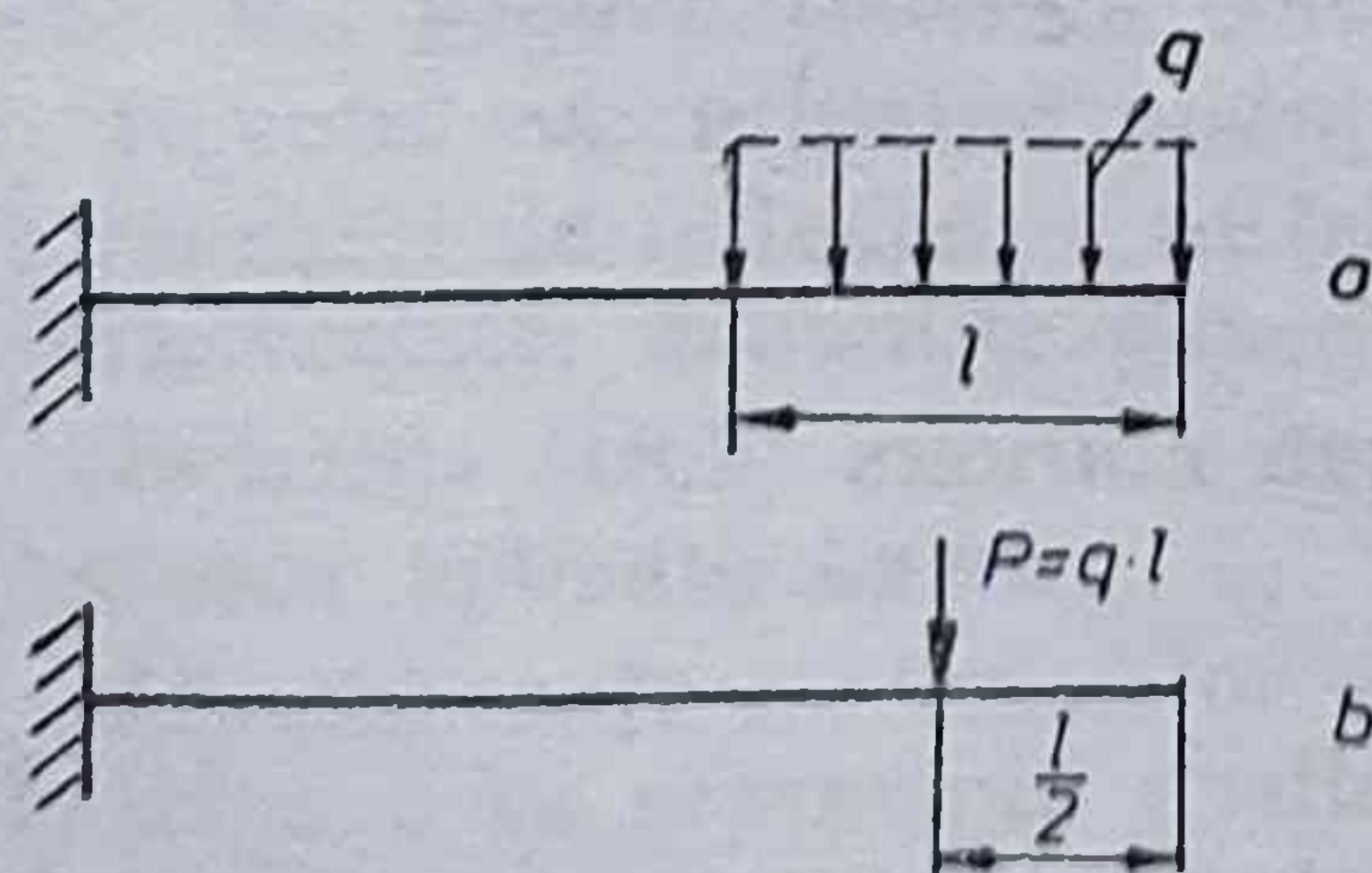


Fig. 18.3

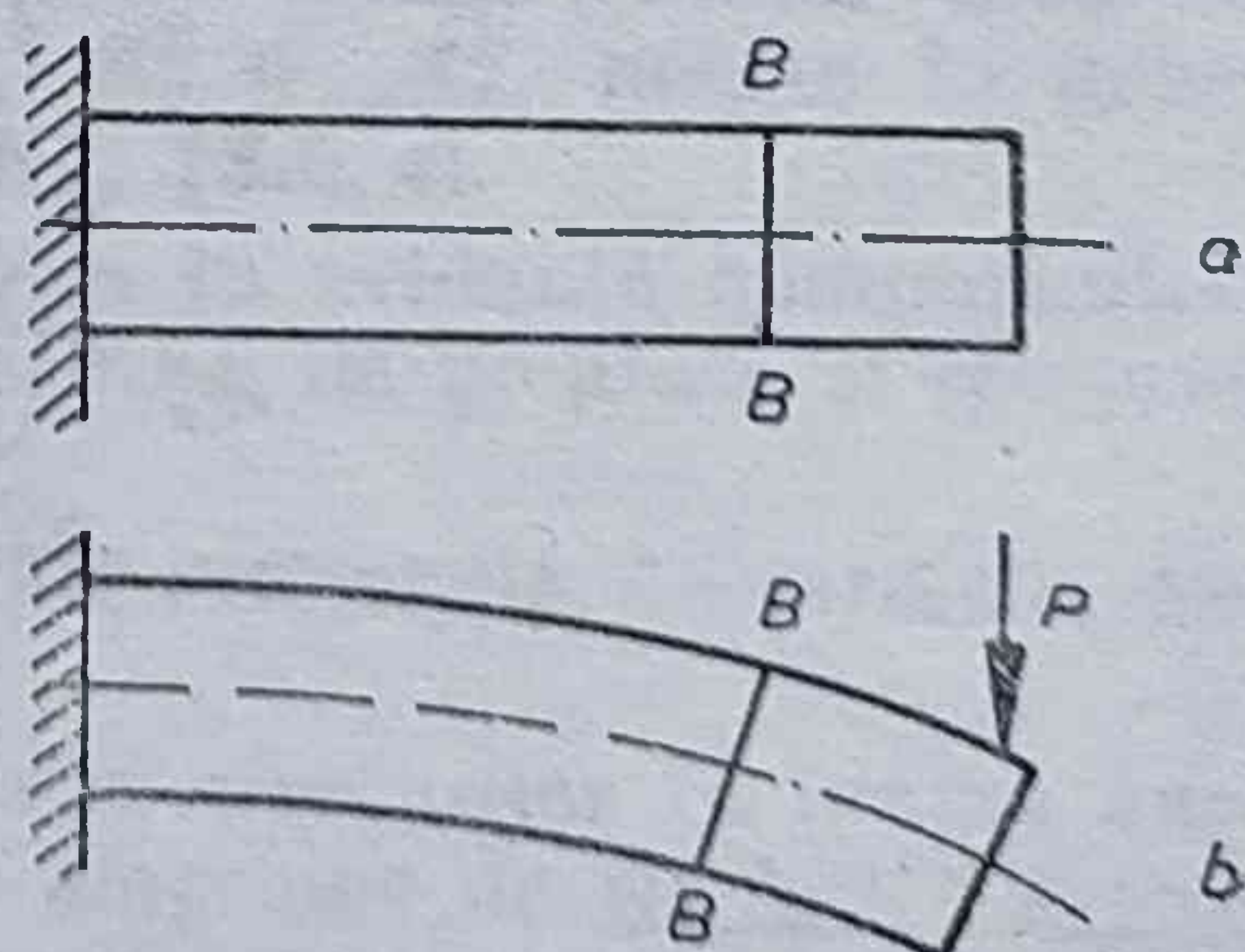


Fig. 18.4

18.2. EFORTURI ÎN BARE

Fie o bară elastică, în echilibru sub acțiunea sarcinilor exterioare P_1, P_2, q, \dots, P_4 și a reacțiunilor din reazeme R_1, R_2, R_3 (fig. 18.5, a). Se pune problema evaluării forțelor interioare care acționează într-o secțiune oarecare $B-B$. Pentru aceasta se aplică metoda secțiunilor: se secționează bara (imaginar) prin planul $B-B$, se separă cele două părți, se transformă forțele interioare din secțiunea $B-B$ în forțe exterioare și se scriu condițiile de echilibru static pentru fiecare parte de bară.

Forțele din secțiune ce acționează asupra părții din dreapta se reduc în centrul de greutate al feței drepte a secțiunii, la un torsesor format din forța rezultantă R^D și cuplul rezultat, de moment M^D (fig. 18.5, b). Acestea reprezintă acțiunea părții din stânga a barei, asupra celei din dreapta.

Se notează R_x^D, R_y^D, R_z^D componentele rezultantei forțelor R^D și cu M_x^D, M_y^D, M_z^D componentele momentului rezultat M^D în raport cu triedrul $Oxyz^*$, avînd originea în centrul de greutate al secțiunii, axa Ox ca axă longitudinală a barei, iar axele Oy și Oz situate în planul secțiunii transversale a barei (fig. 18.5, c).

Conform principiului acțiunii și reacțiunii, în centrul de greutate al suprafeței secțiunii părții din stînga a barei acționează forța $R^S(R_x^S, R_y^S, R_z^S)$ și momentul $M^S(M_x^S, M_y^S, M_z^S)$, egale și de sens contrar cu cele ce acționează asupra părții din dreapta.

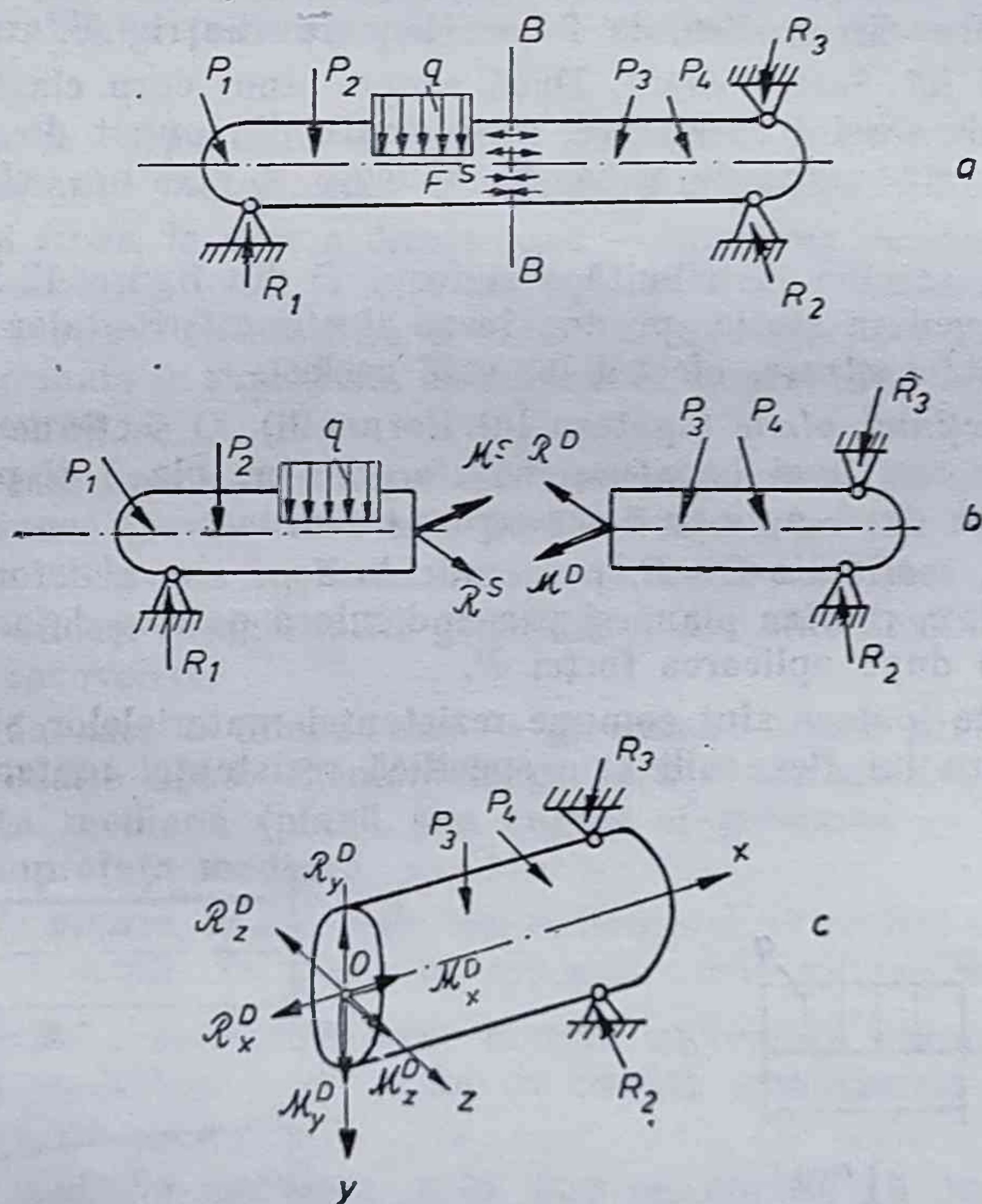


Fig. 18.5

* În partea de rezistența materialelor a lucrării se va folosi sistemul de referință tri-ortogonal sting.

Cele șase ecuații scalare de echilibru static al părții din stînga a barei se scriu sub forma:

$$\begin{aligned}\Sigma X^S + \mathcal{R}_x^S &= 0; & \Sigma M_x^S + \mathcal{M}_x^S &= 0; \\ \Sigma Y^S + \mathcal{R}_y^S &= 0; & \Sigma M_y^S + \mathcal{M}_y^S &= 0; \\ \Sigma Z^S + \mathcal{R}_z^S &= 0; & \Sigma M_z^S + \mathcal{M}_z^S &= 0.\end{aligned}\quad (18.1)$$

Conform principiului acțiunii și reacțiunii se poate scrie:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_x^D &= -\mathcal{R}_x^S; & \mathcal{M}_x^D &= -\mathcal{M}_x^S; \\ \mathcal{R}_y^D &= -\mathcal{R}_y^S; & \mathcal{M}_y^D &= -\mathcal{M}_y^S; \\ \mathcal{R}_z^D &= -\mathcal{R}_z^S; & \mathcal{M}_z^D &= -\mathcal{M}_z^S.\end{aligned}\quad (18.2)$$

Din relațiile (18.1) și (18.2) rezultă:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_x^D &= \Sigma X^S = N; & \mathcal{M}_x^D &= \Sigma M_x^S = M_t; \\ \mathcal{R}_y^D &= \Sigma Y^S = T_y; & \mathcal{M}_y^D &= \Sigma M_y^S = M_{iy}; \\ \mathcal{R}_z^D &= \Sigma Z^S = T_z; & \mathcal{M}_z^D &= \Sigma M_z^S = M_{iz}.\end{aligned}\quad (18.3)$$

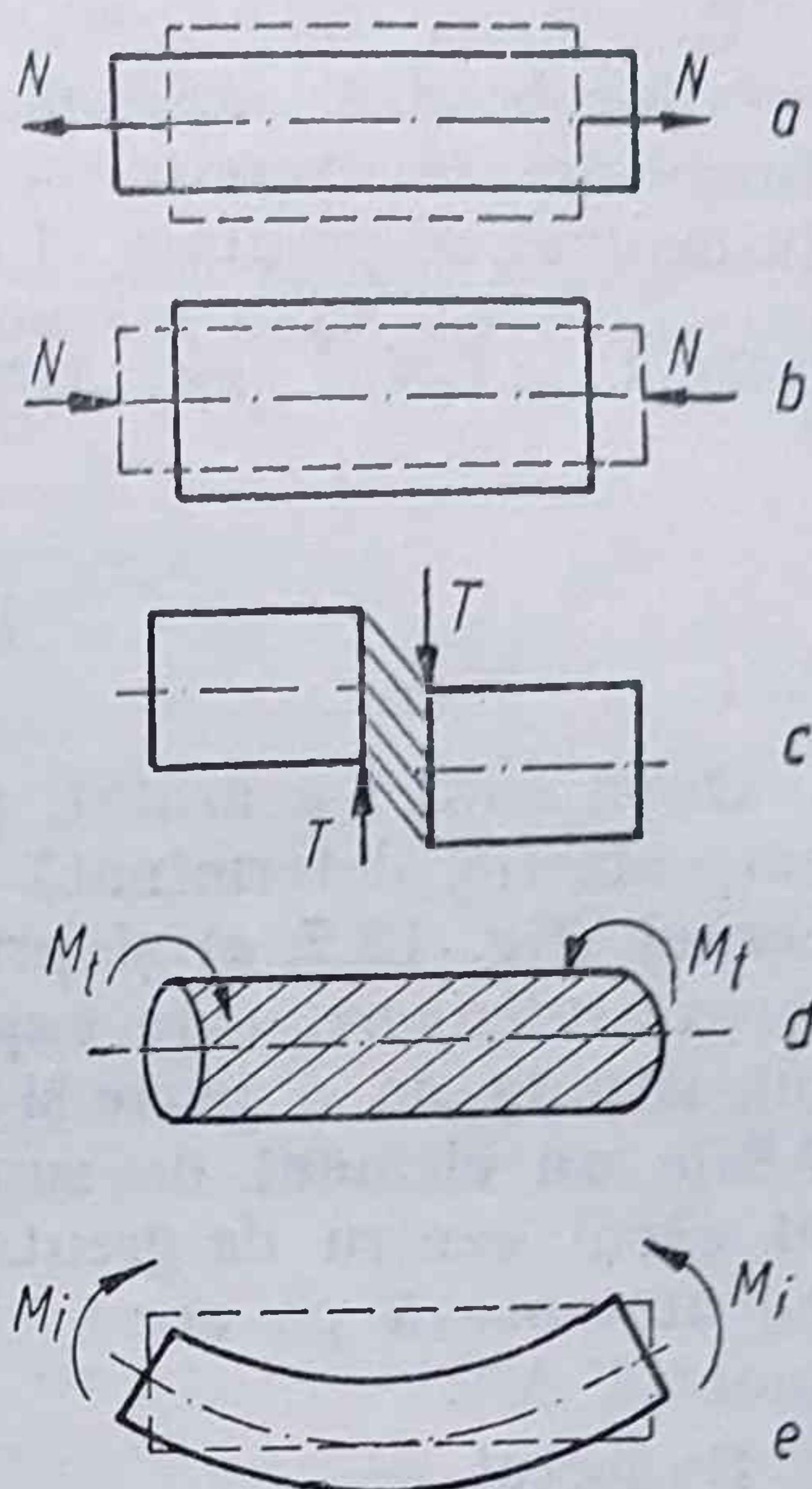


Fig. 18.6

Componenta pe axa Ox a rezultantei forțelor interioare se numește *forță axială* și se notează N . Ea este egală cu suma proiecțiilor pe axa Ox a forțelor exterioare care acționează asupra părții din bară situate în stînga secțiunii (sau a celor situate în dreapta secțiunii, cu semn schimbat). Forța axială N produce întinderea sau comprimarea barei (fig. 18.6, *a* și *b*).

Componenta pe axa Oy a rezultantei \mathcal{R}^D se numește *forță tăietoare* și se notează T_y . Ea este egală cu suma proiecțiilor pe axa Oy a forțelor ce acționează asupra părții de bară situate la stînga secțiunii (sau a celor din dreapta, cu semn schimbat). La fel pentru componenta $\mathcal{R}_z^D = T_z$. Forțele tăietoare produc forfecare (tăiere) (fig. 18.6, *c*).

Componenta pe axa Ox a cuplului \mathcal{M}^D se numește *moment de torsiune* și se notează M_t . Ea este egală cu suma momentelor forțelor și a cuplurilor ce acționează asupra părții din stînga a barei, calculate în raport cu axa Ox (sau a celor din dreapta, cu semn schimbat). Momentul M_t produce răsucirea barei (fig. 18.6, *d*).

Componenta pe axa Oy a cuplului \mathcal{M}^D se numește *moment încovoietor* și se notează M_{iy} . (La fel $\mathcal{M}_z^D = M_{iz}$). Ea este egală cu suma momentelor forțelor și a cuplurilor ce acționează asupra părții din stînga a barei, calculate în raport cu axa Oy (respectiv Oz). Momentele \mathcal{M}_y^D și \mathcal{M}_z^D , notate în general M_i , produc îndoirea (încovoierea) barei (fig. 18.6, *e*).

Rezultă că, utilizînd *metoda secțiunilor*, se pun în evidență componentele torsorului de reducere a forțelor interioare în centrul de greutate al secțiunii transversale, denumite generic *eforturi*.

Relațiile (18.3) exprimă dependența eforturilor secționale de sarcinile exterioare aplicate barei.

În rezistența materialelor se calculează variația eforturilor în lungul axei barelor și se reprezintă grafic sub forma unor *diagrame de eforturi*. La bare de secțiune constantă, acestea permit stabilirea *secțiunii periculoase*, adică a secțiunii în care solicitarea este maximă.

Desigur, trebuie avut în vedere că *eforturile* secționale sînt mărimi convenționale, introduse pentru simplificarea calculelor. În realitate, forțele interioare se exercită pe toată suprafața secțiunii transversale, nu numai în centrul de greutate al acesteia, fiind distribuite continuu, ceea ce impune introducerea altor mărimi fizice care să caracterizeze interacțiunea dintre particulele unui corp deformabil solicitat mecanic.

18.3. EFORTURI UNITARE

După cum s-a arătat, pentru a caracteriza solicitarea din interiorul unui corp elastic, determinată de aplicarea unor sarcini exterioare, se secționează corpul (fig. 18.7, a) și prin separarea celor două părți, se pun în evidență *forțele interioare*, care exprimă legătura între particulele din interiorul corpului, situate de o parte și de cealaltă a planului de secționare (fig. 18.7, b).

Fie un element de suprafață ΔA , din planul secțiunii (fig. 18.7, c), în al cărui centru de greutate se aplică forța $\Delta \bar{F}$, rezultanta forțelor interioare ce acționează pe acest element, care în general este oblică față de elementul ΔA .

Raportul

$$\bar{p}_m = \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta A} \quad (18.4)$$

se numește *efort unitar mediu*, reprezentînd valoarea medie a forțelor interioare ce acționează pe unitatea de suprafață a secțiunii.

La limită, cînd $\Delta A \rightarrow 0$, se obține :

$$\bar{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta A} = \frac{d\bar{F}}{dA}, \quad (18.5)$$

care reprezintă valoarea *efortului unitar* într-un punct.

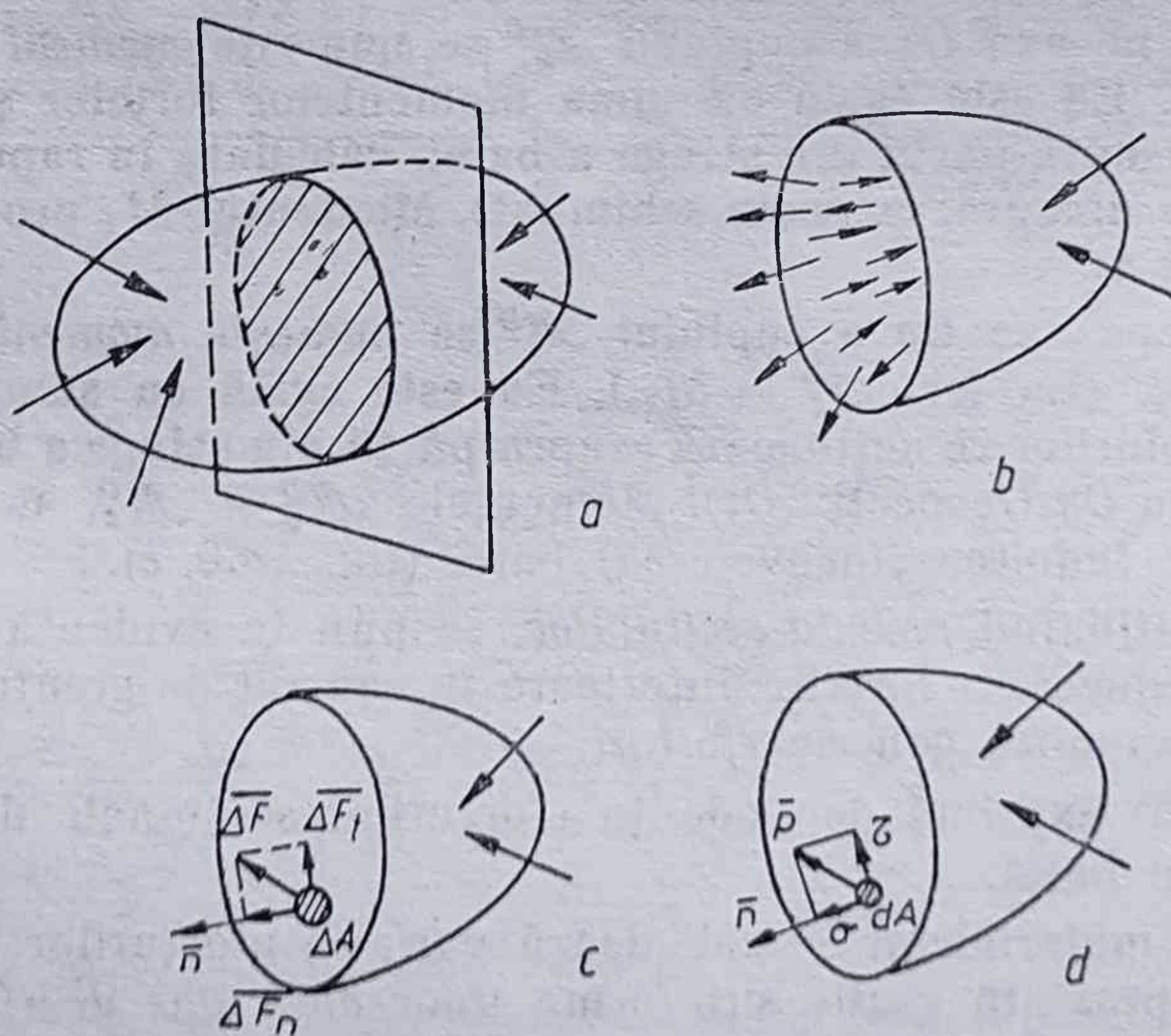


Fig. 18.7

Eforturile unitare, denumite și *tensiuni*, sînt mărimi tensoriale, depinzînd atît de valoarea forței elementare $d\vec{F}$, cît și de orientarea normalei \vec{n} la suprafața dA .

Se descompune $\Delta\vec{F}$ în două componente, $\Delta\vec{F}_n$ — de-a lungul normalei la suprafață și $\Delta\vec{F}_t$ — în planul suprafeței. Se definesc două tipuri de eforturi unitare, și anume:

— eforturi unitare normale :

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} = \frac{dF_n}{dA}; \quad (18.6)$$

perpendiculare pe planul secțiunii transversale ;

— eforturi unitare tangențiale :

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A} = \frac{dF_t}{dA}, \quad (18.7)$$

situate în planul secțiunii transversale (fig. 18.7, d).

Este evidentă relația $p^2 = \sigma^2 + \tau^2$.

Eforturile unitare se măsoară în $\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$, $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, Pa sau $\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}$. Eforturile unitare normale σ pot fi comparate cu presiunea de la fluide, iar cele tangențiale τ — cu frecările ce apar, în cazul mișcării relative a două corpuri, în planul de separație.

O problemă centrală a rezistenței materialelor este *stabilirea legii de distribuție a eforturilor unitare pe secțiunea transversală* a unei bare și determinarea valorii acestora în funcție de sarcinile exterioare aplicate barei.

Se pot stabili relații de legătură între *eforturile unitare* ce acționează pe o secțiune și *eforturile secționale*.

Se consideră un element de suprafață infinitezimal dA . Într-un punct M , situat pe dA , acționează efortul unitar normal σ_x și efortul unitar tangențial τ care se descompune în componentele τ_{yx} și τ_{zx}^* paralele cu axele de coordonate (fig. 18.8). Pe elementul de suprafață dA acționează forțele elementare $\sigma_x \cdot dA$, $\tau_{zx} \cdot dA$ și $\tau_{yx} \cdot dA$. Astfel de forțe elementare sînt distribuite pe toată suprafața secțiunii. Reducîndu-le în centrul de greutate al acesteia se obțin relațiile de echivalență între *eforturi* și *eforturi unitare*:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x \cdot dA; & M_{iy} &= \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA; \\ T_y &= \int_A \tau_{yx} \cdot dA; & M_{iz} &= \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA; \\ T_z &= \int_A \tau_{zx} \cdot dA; & M_t &= \int_A (\tau_{zx} \cdot y - \tau_{yx} \cdot z) dA. \end{aligned} \quad (18.8)$$

* Indicele efortului unitar normal σ corespunde axei după care acesta este dirijat; primul indice al efortului unitar tangențial τ corespunde axei cu care acesta este paralel, iar al doilea indice, axei normale la secțiune.

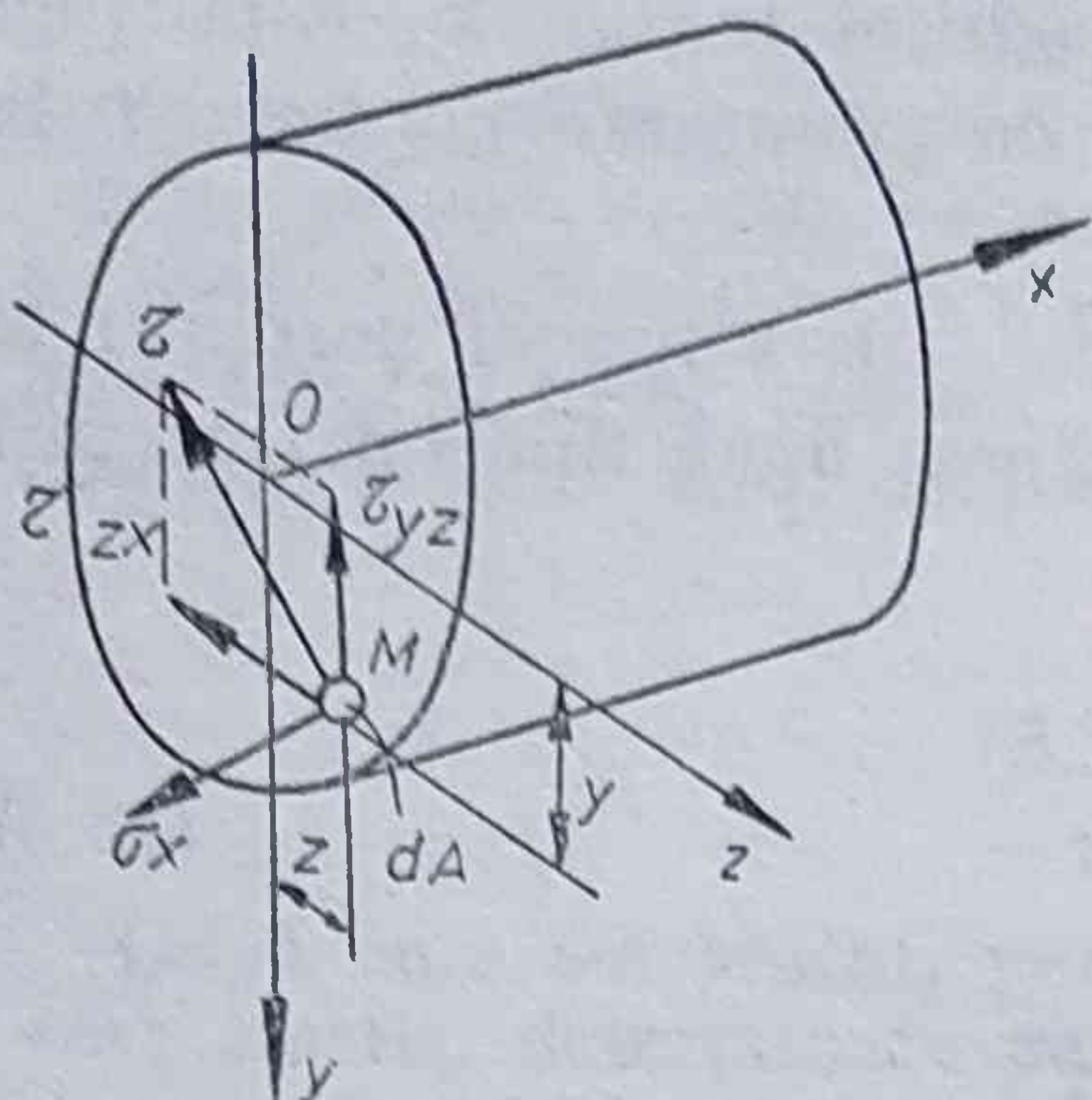


Fig. 18.8

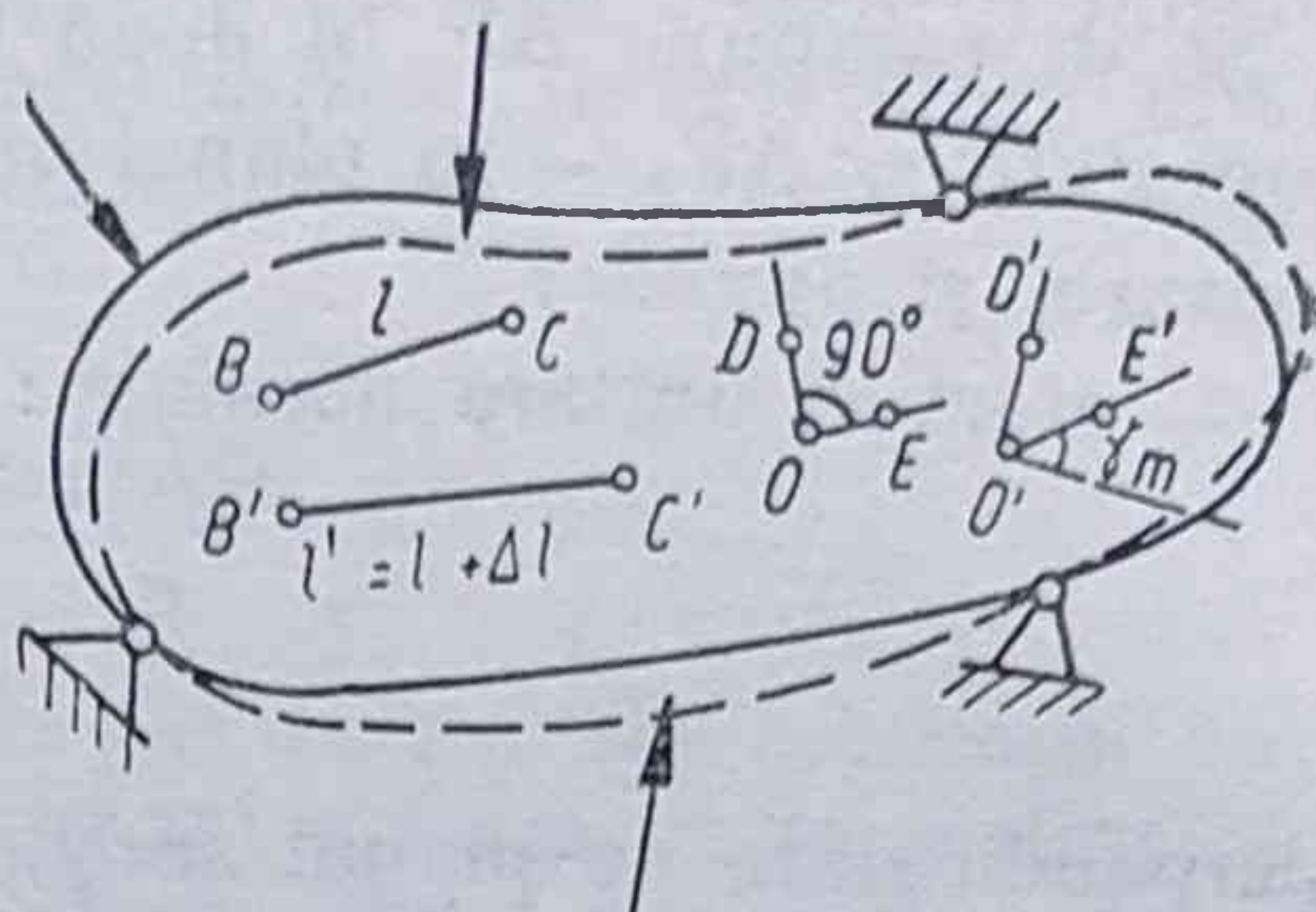


Fig. 18.9

18.4. DEFORMAȚII SPECIFICE

Se consideră un corp deformabil, rezemat astfel încît să nu se poată deplasa ca un corp rigid (fig. 18.9). În acest caz, *deplasările* punctelor materiale din corp vor fi provocate numai de deformațiile ce apar sub efectul sarcinilor exterioare aplicate.

a) *Lungirea specifică*. Fie punctele B și C , situate la distanța l în corpul elastic nedeformat (fig. 18.9). După aplicarea sarcinilor exterioare, corpul se deformează, punctul B deplasîndu-se în B' , iar C în C' ; distanța între cele două puncte devine l' .

Diferența între lungimea finală l' și cea inițială l a segmentului considerat se numește *lungire*:

$$\Delta l = l' - l.$$

Raportul dintre lungirea Δl și lungimea inițială l se numește *lungire specifică medie*:

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta l}{l}. \quad (18.9)$$

La limită, cînd $l \rightarrow 0$, se obține lungirea în punctul B , pe direcția BC :

$$\varepsilon_{BC} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{l}. \quad (18.10)$$

În general, lungirea în punctul B , pe altă direcție, este diferită.

Lungirile sînt produse de eforturile unitare normale σ și determină modificarea volumului corpului.

b) *Lunecarea specifică*. Fie unghiul drept format de segmentele \overline{OD} și \overline{OE} în corpul elastic nedeformat (fig. 18.9). După aplicarea sarcinilor exterioare,

punctele se deplasează iar unghiul considerat devine $\widehat{D'O'E'}$.

Unghiul γ_m , care măsoară variația unghiului de 90° în urma deformației corpului, se numește *lunecare medie*:

$$\gamma_m = \widehat{DOE} - \widehat{D'O'E'}. \quad (18.11)$$

La limită, cînd segmentele $\overline{OD} \rightarrow 0$; $\overline{OE} \rightarrow 0$, se obține (unghiul de) *lunecarea specifică* în punctul O , în planul DOE ;

$$\gamma_{DOE} = \lim_{\substack{\overline{OD} \rightarrow 0 \\ \overline{OE} \rightarrow 0}} (\widehat{DOE} - \widehat{D'O'E'}). \quad (18.12)$$

Lunecările sînt produse de eforturile unitare tangențiale și determină modificarea formei corpului.

18.5. RELAȚIA ÎNTRE EFORTURI UNITARE ȘI DEFORMAȚII SPECIFICE

Între cele două tipuri de mărimi fizice fundamentale ale rezistenței materialelor — eforturile unitare și deformațiile specifice — există relații „cauză-efect” care se determină experimental, prin încercarea materialelor la diferite solicitări.

Pentru stabilirea relației între eforturile unitare normale σ și lungirile specifice ϵ , se face *încercarea la tracțiune* (conform STAS 200-75). Se utilizează o epruvetă, avînd forma din figura 18.10, la care se cunoaște aria secțiunii transversale A_0 în porțiunea centrală și pe care se marchează două repere la distanța L_0 .

Epruveta se montează într-o mașină de încercat la tracțiune, cu ajutorul căreia se aplică pe direcția axei longitudinale o forță de întindere F , care crește continuu pînă se produce ruperea epruvetei. Concomitent se măsoară distanța între repere L , respectiv lungirea epruvetei $\Delta L = L - L_0$.

Dacă se reprezintă grafic variația lungirii ΔL în funcție de forța de întindere F , se obține o diagramă care depinde însă de dimensiunile epruvetei, deci nu caracterizează materialul.

Dacă se reprezintă grafic dependența între efortul unitar normal $\sigma = \frac{F}{A}$ și lungirea specifică $\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$, se obține *curba caracteristică a materialului*.

Pentru un oțel moale, cu conținut redus de carbon, aceasta are forma din figura 18.11. Se disting cîteva puncte importante ale căror ordonate definesc unele caracteristici mecanice ale materialului.

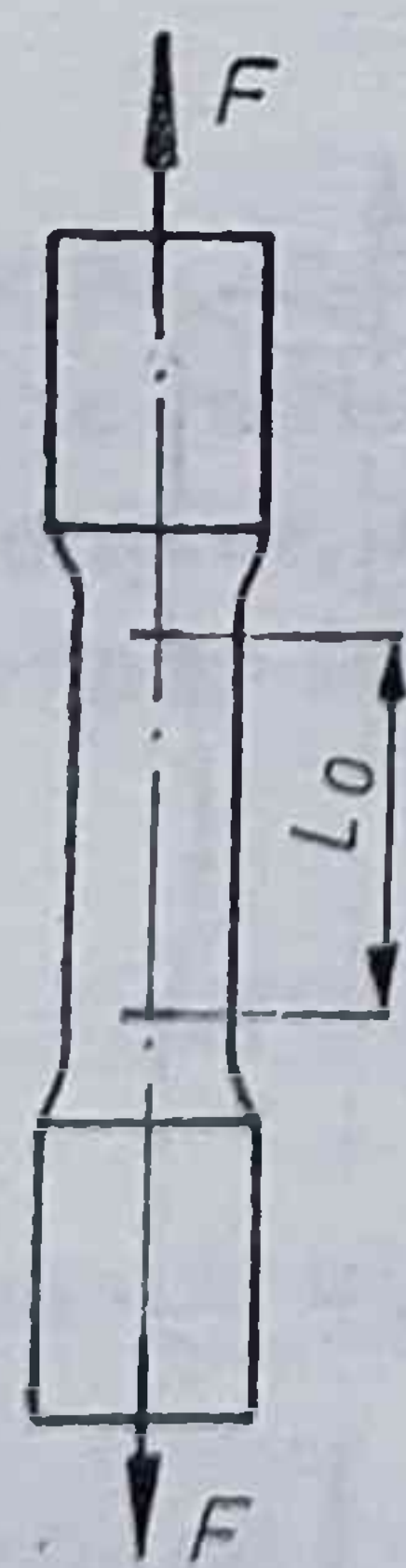


Fig. 18.10

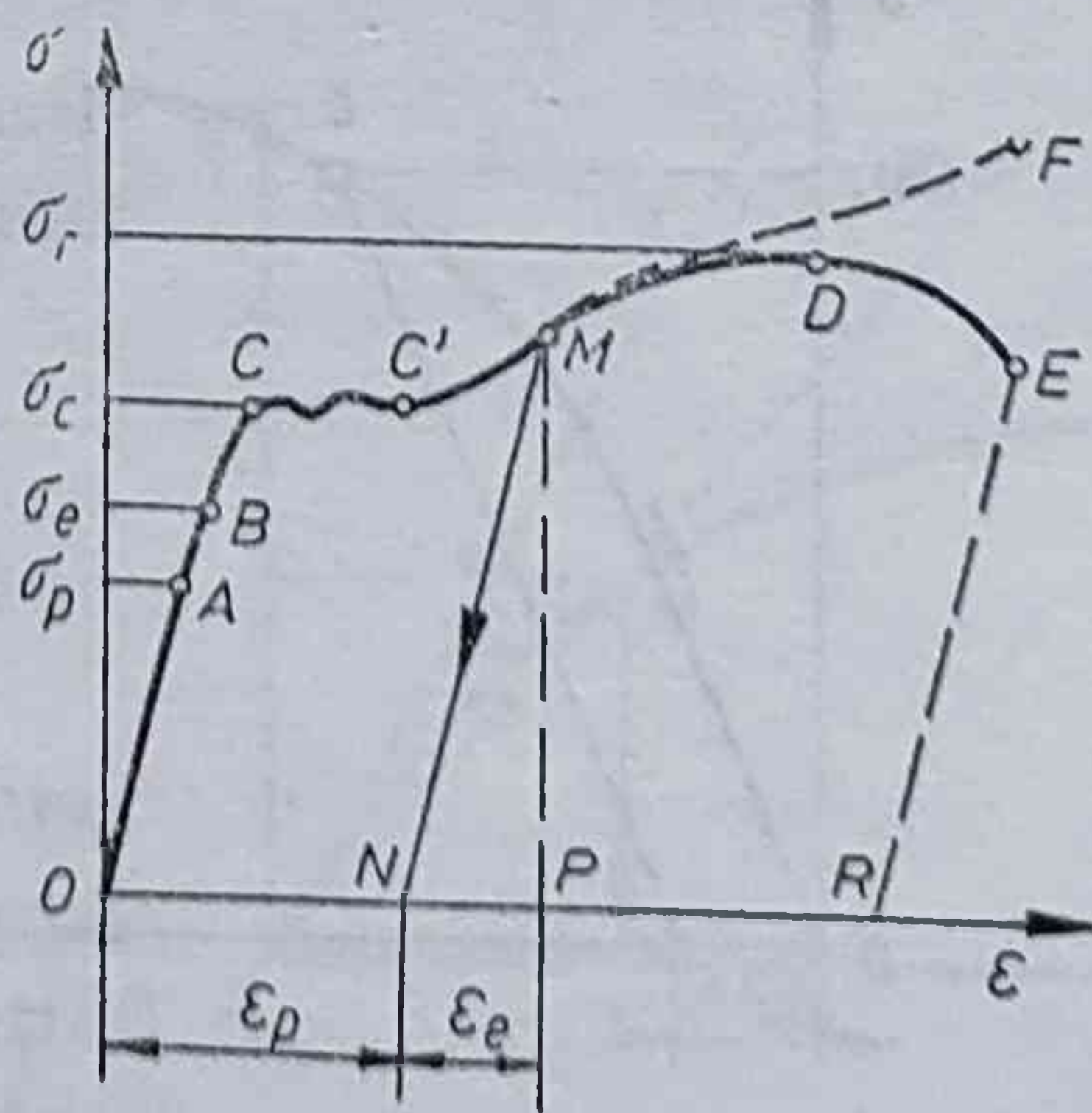


Fig. 18.11

a) *Limita de proporționalitate* σ_p (ordonata punctului A) este valoarea efortului unitar pînă la care relația între σ și ϵ este liniară. Ecuația porțiunii OA a curbei caracteristice se poate scrie sub forma :

$$\sigma = E \cdot \epsilon, \quad [(18.13)]$$

unde constanta E este *modulul de elasticitate* [longitudinal al materialului (modulul lui Young)]. Relația (18.13) exprimă legea lui Hooke pentru solicitări prin eforturi unitare normale. Pentru oțel, $E = 2,1 \cdot 10^6$ daN/cm².

b) *Limita de elasticitate* σ_e (ordonata punctului B) este valoarea efortului unitar pînă la care materialul se comportă elastic (după descărcare revine la dimensiunile inițiale).

c) *Limita de curgere* (aparentă) σ_c (ordonata punctului C) este valoarea efortului unitar la care epruveta începe să se deformeze apreciabil sub sarcină constantă. Porțiunea CC' a curbei caracteristice se numește *palier de curgere*. La unele materiale, palierul de curgere nu există, curba caracteristică avînd alura din figura 18.12. Se definește o limită de *curgere convențională* $\sigma_{0,2}$. Aceasta reprezintă valoarea efortului unitar căreia îi corespunde, după descărcarea epruvetei, o deformare specifică remanentă de 0,2%.

d) *Rezistența la rupere* σ_r (ordonata punctului D din fig. 18.11) este valoarea maximă a efortului unitar înregistrat în timpul încercării. Porțiunea $C'D$ a curbei caracteristice se numește *zonă de întărire*.

Punctul E marchează ruperea epruvetei. Aparent, ruperea se produce la o valoare a efortului unitar inferioară rezistenței la rupere. Aceasta se datorește faptului că se trasează o curbă caracteristică *convențională*, calculînd efortul unitar prin împărțirea forței F la aria inițială a secțiunii transversale.

Cînd forța se apropie de valoarea corespunzătoare punctului D , într-un loc al epruvetei apare o *gîtuire*, reprezentată în figura 18.13, care devine tot mai pronunțată pînă se produce ruperea. Aria secțiunii transversale scăzînd, efortul unitar *real* în secțiunea de rupere crește peste valoarea *convențională* σ_r , astfel că, în momentul ruperii epruvetei, el are într-adevăr valoarea maximă.

Curba caracteristică *reală* este desenată cu linie întreruptă în figura 18.11.

În cazul cînd epruveta este solicitată peste limita de curgere, pînă la efortul unitar corespunzător punctului M , apoi este descărcată, se constată că

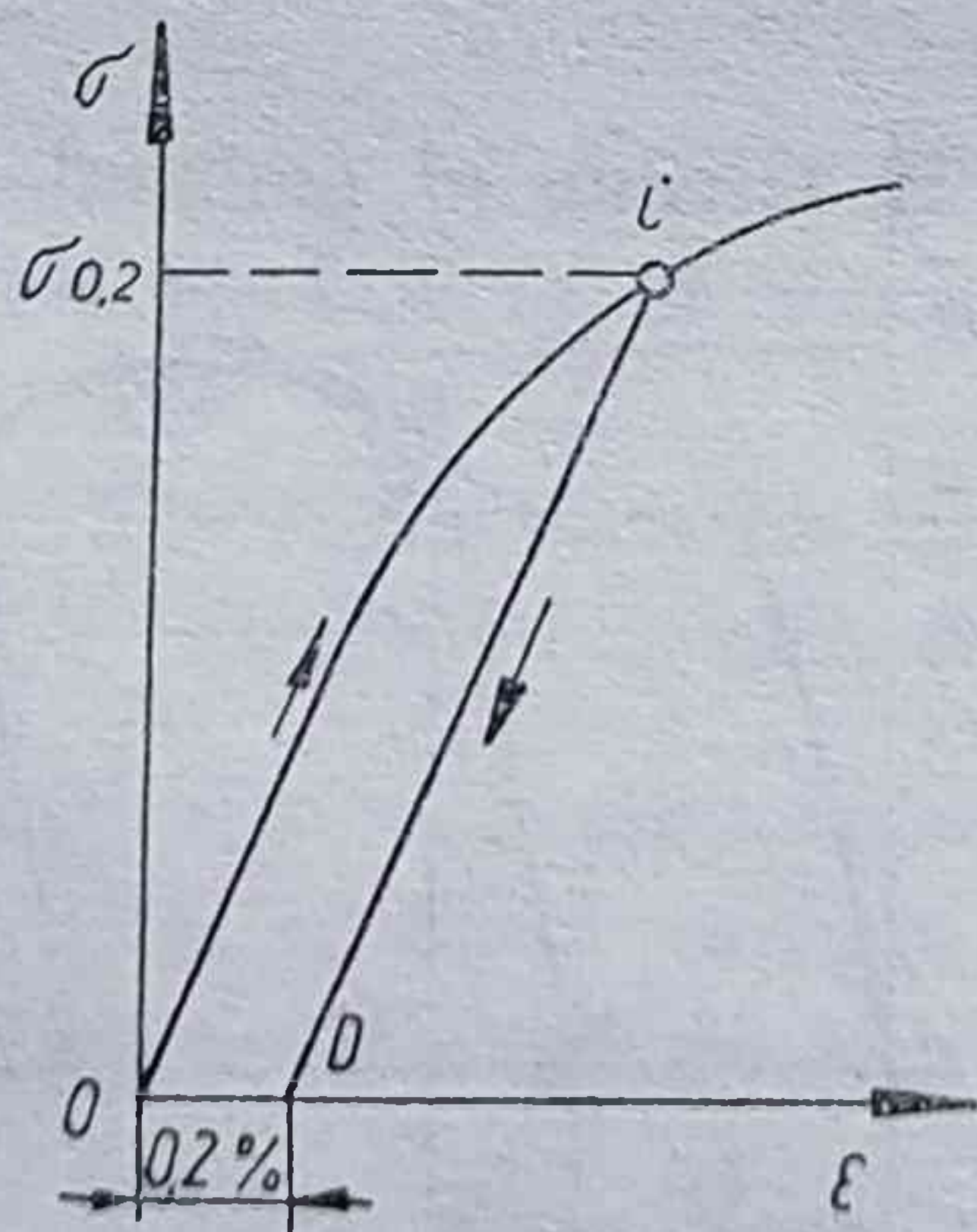


Fig. 18.12



Fig. 18.13

linia de descărcare MN este paralelă cu linia OA — porțiunea inițială a curbei caracteristice (fig. 18.11). După descărcare, când $\sigma = 0$, epruveta nu revine la dimensiunile inițiale. Segmentul $\overline{ON} = \varepsilon_p$ caracterizează deformația plastică (ireversibilă), în timp ce segmentul $\overline{NP} = \varepsilon_e$ caracterizează deformația elastică (reversibilă) a epruvetei încărcată pînă la efortul unitar corespunzător punctului M . Se spune că materialul a fost deformat elasto-plastic. Segmentul \overline{OR} măsoară *alungirea la rupere*, mărime ce caracterizează ductilitatea materialului, adică proprietatea de a fi tras în fire.

La o nouă încărcare, punctul care definește starea materialului parcurge dreapta \overline{MN} astfel că, aparent, limita de proporționalitate corespunde punctului M . Materialul se comportă linear pînă la eforturi unitare superioare limitei de curgere, fiind *ecruisat*, proprietate utilizată în practică.

În general, la încercarea la compresiune a oțelurilor (conform STAS 1552-67) se obțin aceleași valori pentru σ_p , σ_e , σ_c și E ca la încercarea la întindere.

Totuși, dacă o bară de oțel ecruisată prin întindere este încercată apoi la compresiune, se constată că limita de curgere la compresiune este inferioară celei determinate prin încercarea la întindere, fenomen cunoscut sub denumirea de „efectul Bauschinger”.

Prin încercarea la răsucire a unui material, se stabilește relația între eforturile unitare tangențiale τ și lunecările specifice γ , sub forma:

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (18.14)$$

unde G este *modulul de elasticitate transversal* al materialului. Pentru oțel, $G = 8,1 \cdot 10^5$ daN/cm². Ecuația (18.14) exprimă *legea lui Hooke* pentru sollicitări prin eforturi unitare tangențiale.

O mare grupă de materiale, printre care se pot aminti alama, cuprul, betonul și cauciucul, prezintă curbe caracteristice avînd forma din figura 18.14, cu un traseu curbiliniu pînă la rupere. Pentru acestea se definesc:

1) modulul de elasticitate tangent:

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}, \quad (18.15)$$

dat de panta tangentei MT_1 ;

2) modulul de elasticitate secant:

$$E_s = \frac{\overline{MP}}{\overline{OP}},$$

dat de panta secantei OT_2 .

Uneori se utilizează modulul de elasticitate în origine, E_o , dat de panta tangentei OT_3 în origine la curba caracteristică.

18.6. CONTRACȚIA TRANSVERSALĂ

Se constată că, odată cu lungirea unei epruvete, apare o micșorare a suprafeței secțiunii transversale, proporțională cu lungirea specifică. La o defor-

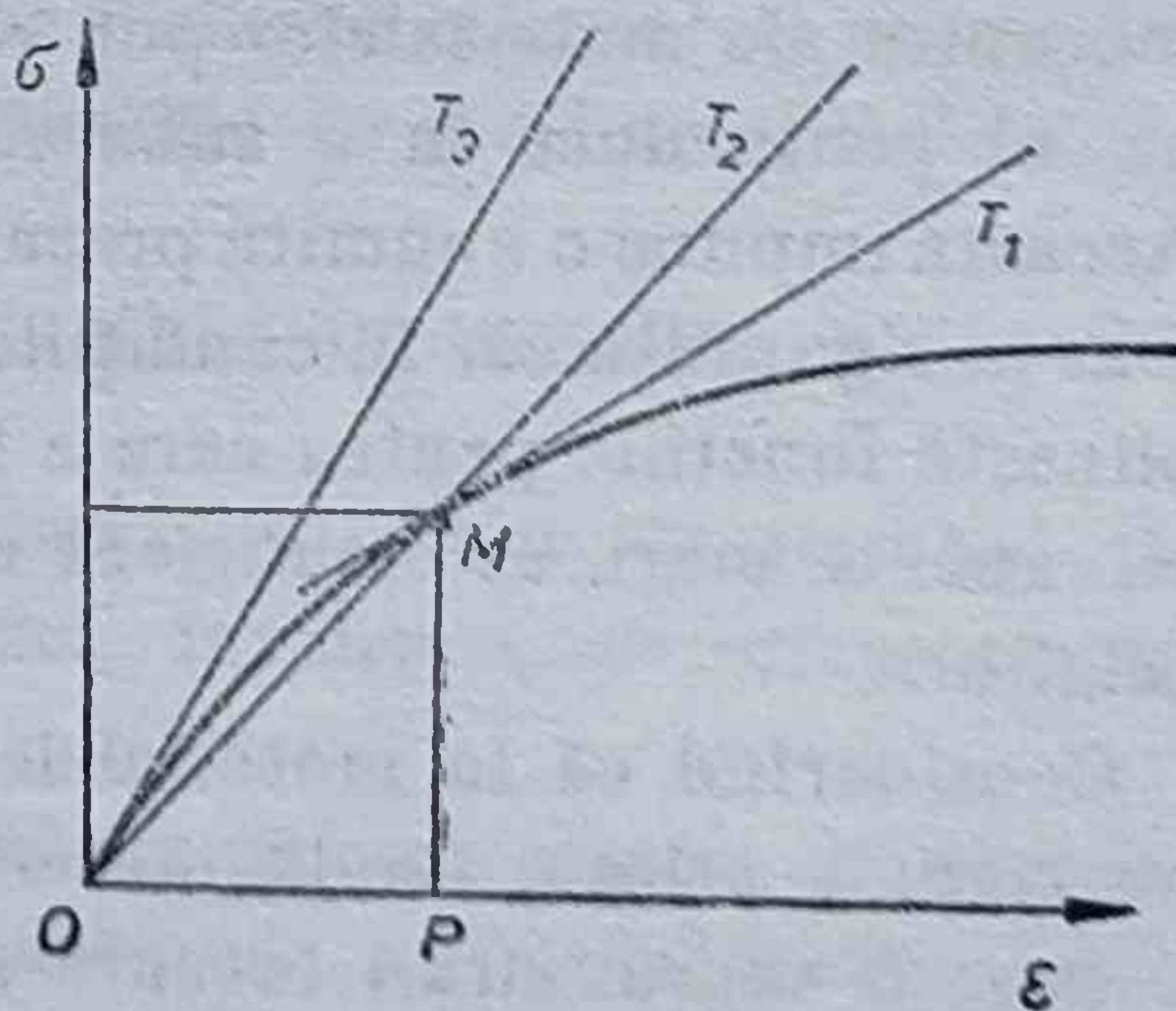


Fig. 18.14

mație specifică ϵ în lungul axei barei, corespunde o deformăție specifică transversală :

$$\epsilon_t = -\nu \cdot \epsilon, \quad (18.16)$$

unde ν se numește *coeficient de contracție transversală* (coeficientul lui Poisson). În general $\nu = 0 \dots 0,5$. La oțel $\nu \cong 0,3$.

Între constantele elastice ale materialelor E , G și ν există relația

$$E = 2(1 + \nu)G.$$

În tabelul 18.1 se dau valorile acestor constante elastice pentru cîteva materiale utilizate frecvent în practică.

T a b e l u l 18.1

Materialul	Modulul de elasticitate longitudinal, E daN/cm ²	Modulul de elasticitate transversal, G daN/cm ²	Coeficientul lui Poisson, ν
Oțel carbon	2,0 — 2,1 · 10 ⁶	8,1 · 10 ⁵	0,24 — 0,28
Oțel aliat	2,1 · 10 ⁶	8,1 · 10 ⁵	0,25 — 0,30
Fontă cenușie	1,15 — 1,60 · 10 ⁶	4,5 · 10 ⁵	0,23 — 0,27
Alamă	0,91 — 0,99 · 10 ⁶	3,5 — 3,7 · 10 ⁵	0,32 — 0,42
Duraluminu	0,70 — 0,75 · 10 ⁶	2,6 — 2,7 · 10 ⁵	—
Beton	0,15 — 0,23 · 10 ⁶	—	0,16 — 0,18
Lemn (normal pe fibre)	0,004 — 0,01 · 10 ⁶	0,045 — 0,065 · 10 ⁵	—

18.7. REZISTENȚE ADMISIBILE. COEFICIENȚI DE SIGURANȚĂ

În rezolvarea problemelor de rezistența materialelor, după modelarea sistemului real și determinarea caracteristicilor mecanice ale materialului utilizat, se pune problema precizării valorii maxime admisibile a eforturilor unitare din piesa studiată, denumită *rezistență admisibilă*.

Rezistența admisibilă este valoarea convențională aleasă în calcul, pe baza experienței practice, pentru efortul unitar maxim care se poate produce într-o piesă, în condiții date de material, de solicitare și de mediu ambiant. Însă aceste condiții, în general, nu sînt cunoscute perfect. Determinarea sarcinilor este aproximativă, fiind posibilă depășirea valorilor considerate în calcule. Există incertitudini privind condițiile de mediu ambiant. Caracteristicile mecanice ale materialelor pot varia față de valorile cunoscute, iar schema de calcul poate duce la o subapreciere a nivelului real de solicitare a piesei. Aceasta impune o anumită precauție în alegerea rezistențelor admisibile, pentru a avea siguranța că, în condițiile cele mai dezavantajoase de lucru, piesa îndeplinește funcțiile pentru care a fost proiectată : nu se rupe, nu are deformații remanente mari, este suficient de rigidă și nu-și pierde stabilitatea formei de echilibru.

Considerînd că la materialele tenace *curgerea* reprezintă o stare limită ce nu trebuie atinsă, iar la materialele fragile — *ruperea*, se aleg *coeficienți de siguranță* supraunitari la care se împarte limita de curgere σ_c , respectiv rezistența la rupere σ_r , pentru a se calcula rezistența admisibilă σ_a .

Se utilizează relațiile :

$$\sigma_a = \frac{\sigma_c}{c_c}, \quad \sigma_a = \frac{\sigma_r}{c_r}, \quad (18.17)$$

unde c_c este coeficientul de siguranță față de curgere, iar c_r — coeficientul de siguranță față de rupere.

Cu cît ipotezele de calcul sînt mai apropiate de realitate, sarcinile sînt evaluate mai corect, iar proprietățile materialelor sînt cunoscute mai bine, cu atît coeficienții de siguranță se aleg mai mici, și — corespunzător — rezistențele admisibile mai mari.

Metoda de calcul pe baza rezistențelor admisibile este larg utilizată în construcția de mașini, unde apar frecvent probleme dinamice și modelele de calcul sînt mai greu de conceput. La calculul construcțiilor este mai larg răspîndită metoda capacității portante (metoda stării limită).

18.8. LEGĂTURA REZISTENȚEI MATERIALELOR CU ALTE DISCIPLINE

În *rezistența materialelor* și *teoria elasticității* se studiază corpurile solicate în limitele comportării elastice, deci la eforturi unitare inferioare limitei de elasticitate a materialelor. Rezistența materialelor este o disciplină tehnică, în care se utilizează ipoteze simplificatoare suplimentare față de teoria elasticității, în vederea stabilirii unor relații simple pentru dimensionarea pieselor și calculul deformațiilor acestora (de exemplu, ipoteza secțiunii plane — la bare, ipoteza normalei rectilinii — la plăci etc.).

În *teoria plasticității* se studiază comportarea corpurilor solicate peste limita de elasticitate, caz în care apar deformații permanente și tensiuni remanente.

În *teoria viscoelasticității* se studiază comportarea materialelor cu proprietăți mecanice dependente de timp, solicate la eforturi unitare relativ mici.

Reologia este disciplina în cadrul căreia se studiază materialele elasto-viscoplastice, cu proprietăți dependente atît de timp cît și de intensitatea solictării.

Dacă rezistența materialelor se ocupă, în special, de studiul barelor și al sistemelor de bare, *teoria plăcilor plane și curbe* studiază elementele cu suprafață mediană, elaborînd modele de calcul în funcție de grosimea plăcii și de forma suprafeței mediane.

Teoria învelișurilor și *teoria barelor cu pereți subțiri* s-au dezvoltat ca domenii de frontieră, cu metode proprii de calcul.

În *teoria stabilității elastice* se calculează sarcinile critice de flambaj ale diferitelor elemente de construcții, bare, plăci, învelișuri, determinîndu-se condițiile de pierdere a stabilității formei.

În *teoria vibrațiilor mecanice* se studiază mișcările de corp elastic ale pieselor de mașini și elementelor de structură, sub acțiunea solictărilor dinamice, caz în care este necesară luarea în considerație a forțelor de inerție.

19.

DIAGrame DE EFORTURI ÎN BARE

După cum s-a arătat în § 18.2, una din problemele principale ale Rezistenței materialelor este determinarea variației eforturilor în lungul barelor. Reprezentarea grafică a acestei variații se face prin diagrame de eforturi.

19.1. DIAGrame DE EFORTURI LA BARE DREpte

Eforturile în secțiunile transversale ale barelor au fost definite în § 18.2. Pentru construcția diagramelor de eforturi sînt necesare : 1) o convenție de semne privind sensul pozitiv al eforturilor ; 2) o convenție de semne privind sensul pozitiv al axelor diagramelor de eforturi și 3) relațiile diferențiale între eforturi.

Pentru început, se vor considera bare drepte, solicitate de forțe cuprinse într-un plan care conține axa barei, respectiv de momente avînd vectorul perpendicular pe acest plan.

19.1.1. CONVENȚIA DE SEMNE PRIVIND SENSUL POZITIV AL EFORTURILOR

Forțele axiale N se consideră pozitive (fig. 19.1, *a*) cînd produc întindere. Forțele tăietoare T se consideră pozitive (fig. 19.1, *b*) cînd produc o lunecare similară unei rotiri în sensul acelor ceasului. Momentele încovoietoare M se consideră pozitive cînd produc întinderea fibrelor inferioare ale barei (fig. 19.1, *c*). Sarcina distribuită p este pozitivă cînd acționează ca în figura 19.1, *d* unde s-au sintetizat convențiile de semne pe ambele fețe ale unei secțiuni.

19.1.2. CONVENȚIA PRIVIND AXELE DIAGRAMELOR DE EFORTURI

Diagramele forțelor axiale (fig. 19.2, *a*) și forțelor tăietoare (fig. 19.2, *b*) se reprezintă cu axa ordonatelor pozitivă în sus, în timp ce diagrama momentelor încovoietoare (fig. 19.2, *c*) se reprezintă cu axa ordonatelor pozitivă în jos (de partea fibrelor întinse).

19.1.3. RELAȚII DIFERENȚIALE ÎNTRE EFORTURI LA BARE DREpte

Fie un element de lungime dx , detașat dintr-o bară solicitată prin sarcini perpendiculare pe axă (fig. 19.3). Lungimea dx fiind foarte mică, sarcina p se consideră uniform distribuită. În secțiunile din capete acționează efor-

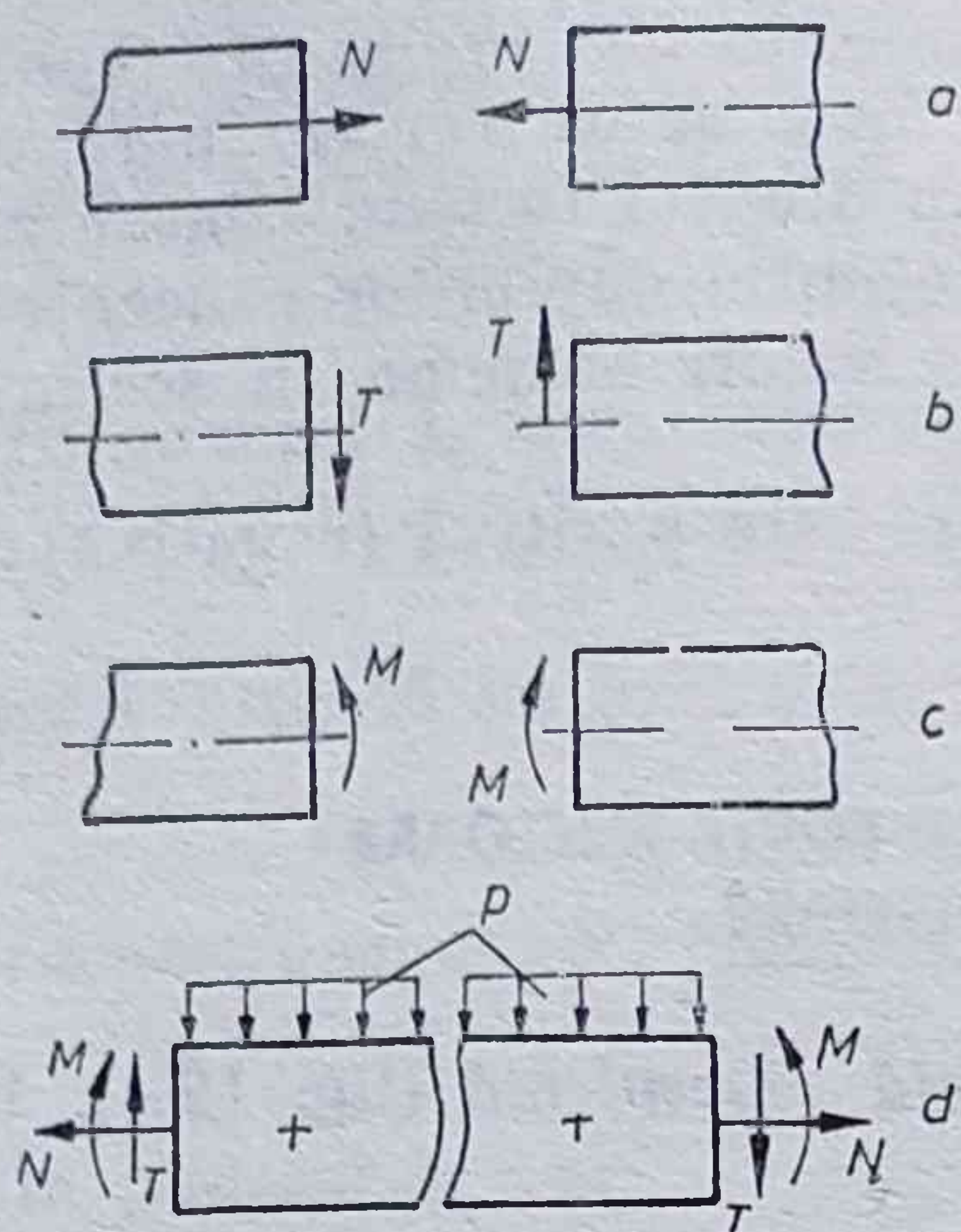


Fig. 19.1

turile indicate în figură, reprezentând acțiunea părților de bară adiacente, asupra elementului respectiv.

Ecuatiile de echilibru ale forțelor vor fi :

$$N + dN - N = 0 ;$$

$$T - p \cdot dx - (T + dT) = 0,$$

iar ecuația de momente față de punctul L :

$$M + T \cdot dx - p \cdot dx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0 ;$$

după reduceri și neglijarea infiniților mici de ordin superior ecuațiile de mai sus se scriu :

$$dN = 0 ;$$

$$-p \cdot dx - dT = 0 ;$$

$$T \cdot dx - dM = 0 ;$$

sau

$$N = \text{const.} ;$$

$$\frac{dT}{dx} = -p ; \quad (19.1)$$

$$\frac{dM}{dx} = T. \quad (19.2)$$

Relațiile (19.1) și (19.2), cunoscute sub numele de *relații diferențiale între eforturi*, conduc la o altă relație între momentul încovoietor și sarcina distribuită :

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -p. \quad (19.3)$$

Pe baza acestor relații se stabilesc reguli general valabile, utile la construcția diagramelor de eforturi la bare drepte.

a) Pe porțiunile de bară nesolicitate ($p = 0$), forța tăietoare este constantă, iar momentul încovoietor variază liniar.

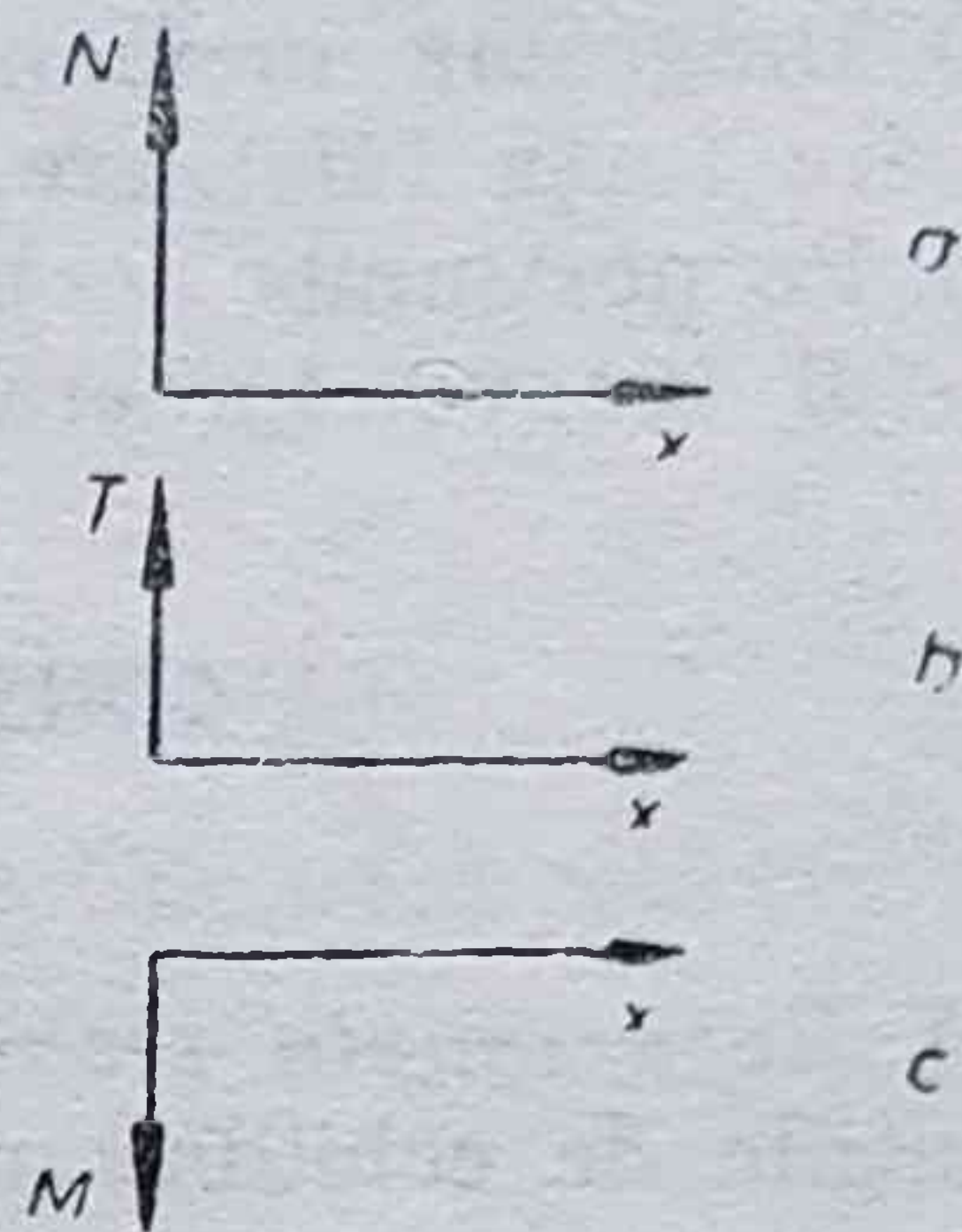


Fig. 19.2

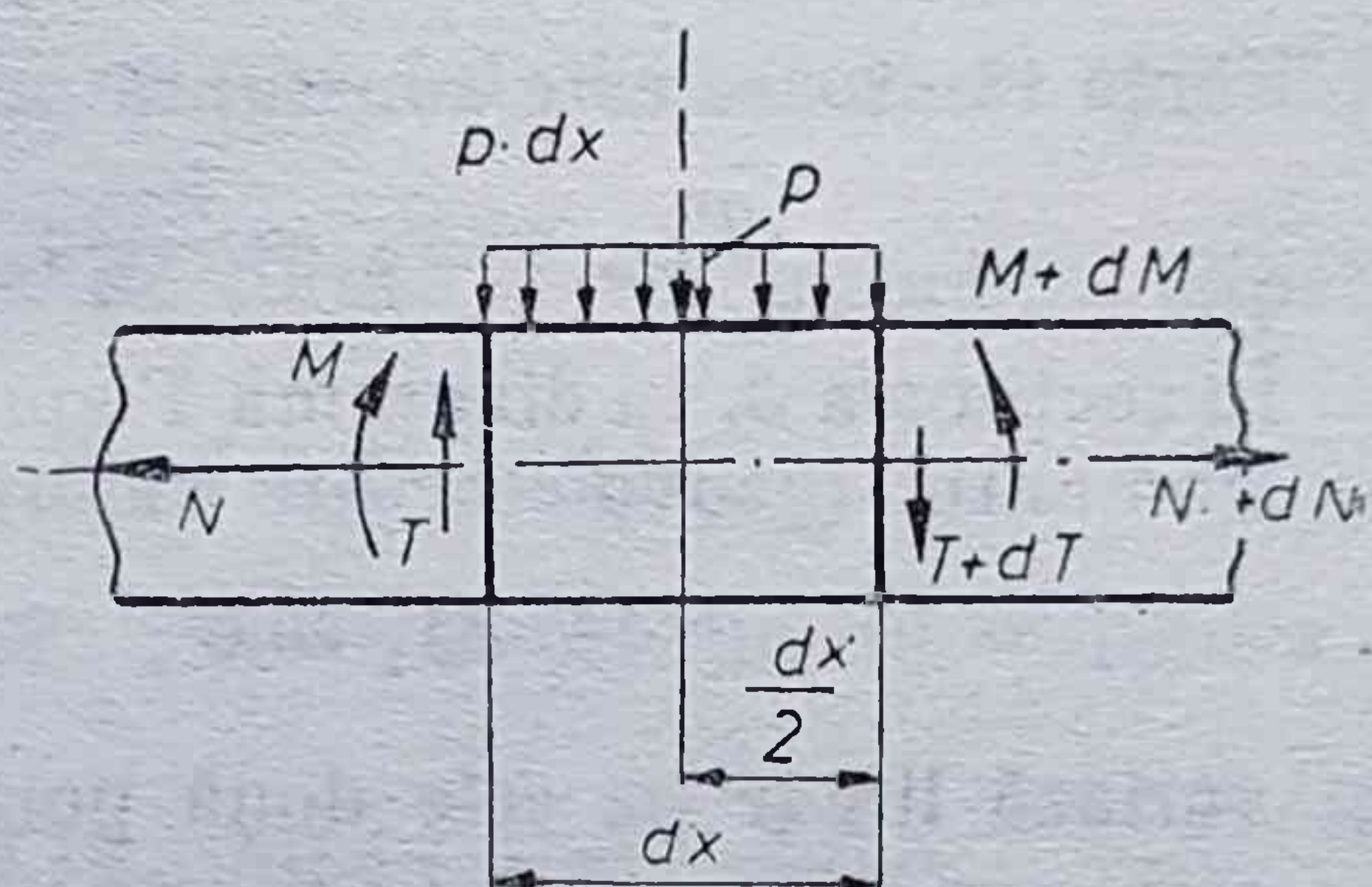


Fig. 19.3

b) Pe porțiunile de bară solicitate cu sarcini uniform distribuite ($p = \text{const.}$), forța tăietoare variază liniar, iar momentul încovoietor variază parabolic.

c) Diagrama de forțe tăietoare are salturi în dreptul forțelor concentrate, iar diagrama momentelor încovoietoare — în dreptul cuplurilor concentrate.

d) Diagrama momentelor încovoietoare are valori extreme în secțiunile în care forța tăietoare se anulează.

e) Pe porțiunile de bară unde forța tăietoare este pozitivă (negativă) momentul încovoietor crește (scade).

19.1.4. CONSTRUCȚIA DIAGRAMELOR DE FORȚE TĂIETOARE ȘI DE MOMENTE ÎNCOVOIETOARE

a) Bară simplu rezemată, încărcată cu o forță concentrată (fig. 19.4). Din ecuațiile de echilibru rezultă reacțiunile :

$$V_1 = \frac{P \cdot b}{l}; \quad V_2 = \frac{P \cdot a}{l}.$$

Forța tăietoare este constantă pe cele două porțiuni

$$T_{1-3} = V_1 = \frac{P \cdot b}{l}; \quad T_{3-2} = V_1 - P = -\frac{P \cdot a}{l}.$$

În secțiunea 3, în diagrama T apare un salt egal cu P .

Momentul încovoietor are valorile :

$$M_1 = 0; \quad M_3 = \frac{P \cdot b}{l} a; \quad M_2 = 0$$

și variază liniar pe cele două porțiuni :

$$M_{1-3} = V_1 \cdot x = \frac{P \cdot b}{l} x,$$

$$M_{2-3} = V_2 \cdot x' = \frac{P \cdot a}{l} x'.$$

Valoarea maximă $M_{\max} = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}$ apare în secțiunea 3 unde curba forței tăietoare intersectează axa absciselor.

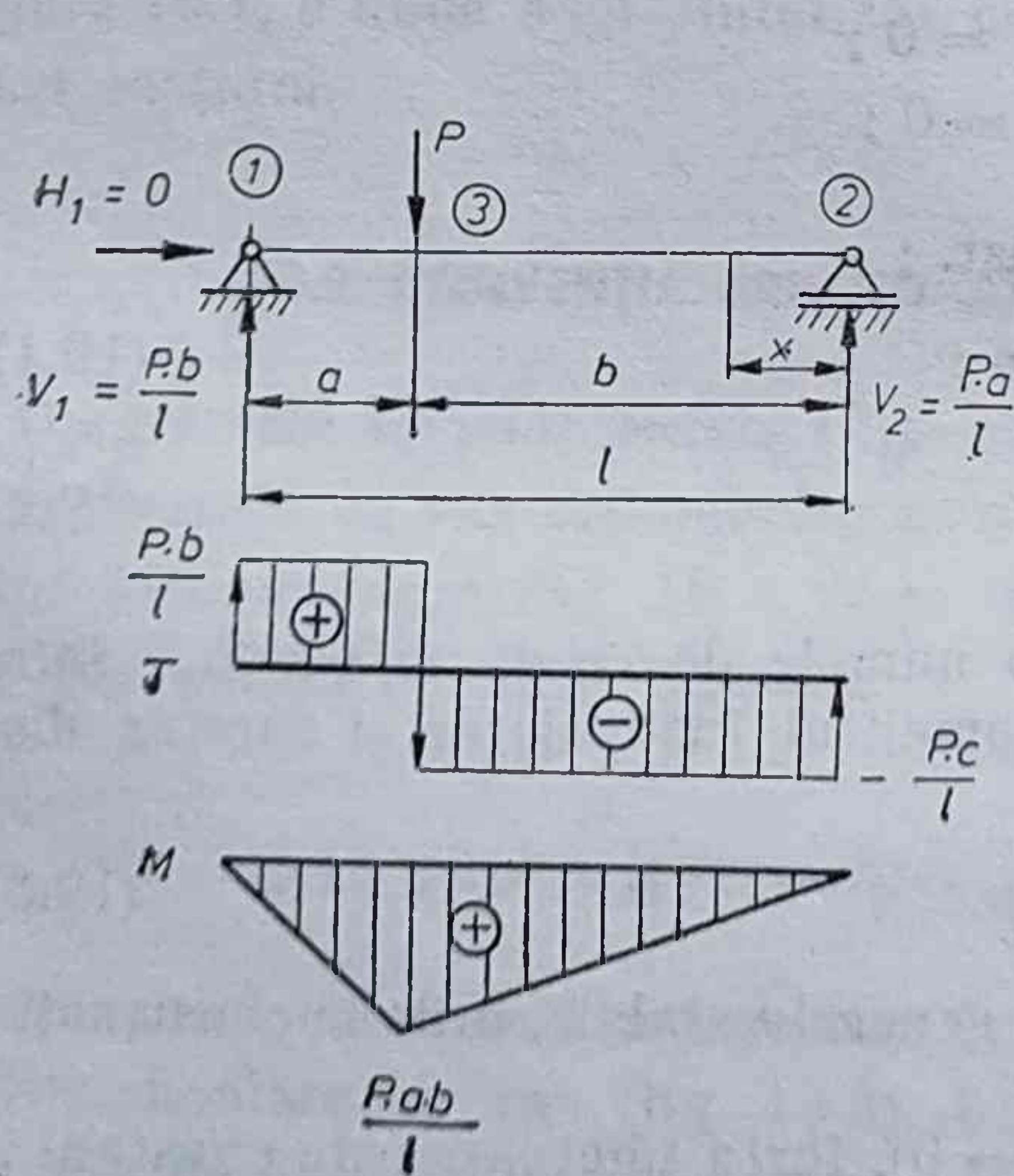


Fig. 19.4

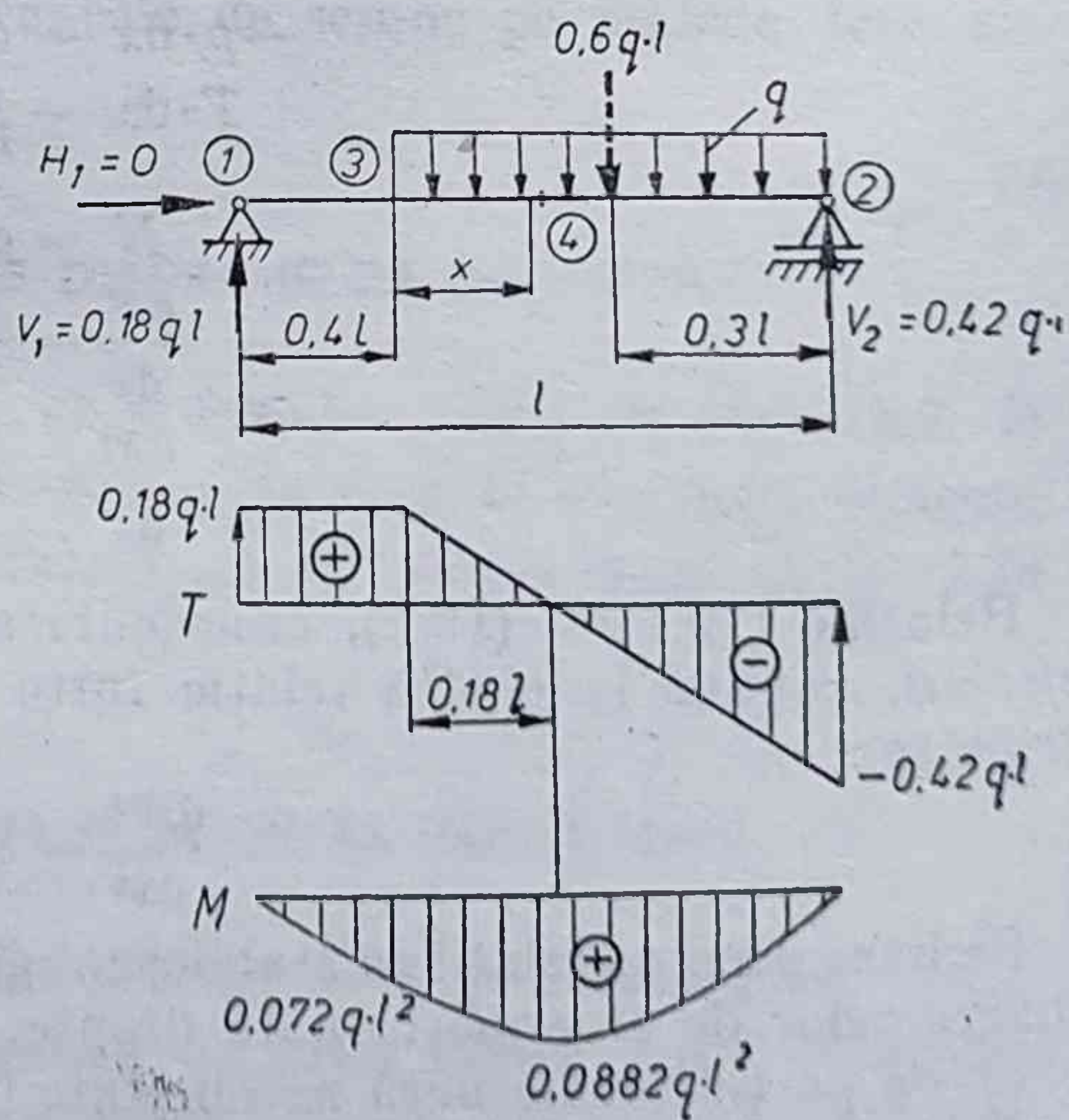


Fig. 19.5

b) *Bară simplă rezemată, încărcată cu sarcină uniform distribuită* (fig. 19.5). Se înlocuiește sarcina distribuită cu o forță concentrată $0,6 q \cdot l$ aplicată la mijlocul porțiunii 3—2. Din ecuațiile de echilibru se calculează reacțiunile :

$$V_1 = 0,18 q \cdot l; \quad V_2 = 0,42 q \cdot l.$$

În punctul 1, forța tăietoare este :

$$T_1 = 0,18 q \cdot l,$$

fiind constantă pe porțiunea 1—3 :

$$T_{1-3} = 0,18 q \cdot l.$$

Pe porțiunea 3—2, într-o secțiune oarecare x , forța tăietoare este :

$$T_{3-2} = T_x = 0,18 q \cdot l - q \cdot x.$$

În punctul 2,

$$T_2 = 0,18 q \cdot l - 0,6 q \cdot l = -0,42 q \cdot l.$$

Forța tăietoare se anulează ($T_{3-2} = 0$) în punctul 4, situat la distanța $x = 0,18 l$ față de secțiunea 3.

Momentul încovoietor variază liniar pe porțiunea 1—3, avînd la capete valorile :

$$M_1 = 0; \quad M_3 = V_1 \cdot 0,4 l = 0,18 q \cdot l \cdot 0,4 l = 0,072 q \cdot l^2.$$

Pe porțiunea 3—2, momentul încovoietor variază parabolic, în secțiunea x avînd expresia :

$$M_x = V_1(0,4 l + x) - \frac{q \cdot x^2}{2} = 0,18 q \cdot l(0,4 l + x) - \frac{q \cdot x^2}{2}.$$

În secțiunea 4 se obține valoarea maximă :

$$M_{max} = 0,18 q \cdot l \cdot 0,58 l - \frac{q}{2} (0,18 l)^2 = 0,0882 q \cdot l^2.$$

c) *Bară simplă rezemată, solicitată de un cuplu concentrat* (fig. 19.6). Reacțiunile sînt :

$$V_1 = -V_2 = \frac{\mathcal{M}}{l}.$$

Forța tăietoare este constantă în lungul barei :

$$T_{12} = \frac{\mathcal{M}}{l}.$$

Momentul încovoietor variază liniar :

$$M_{1-3} = \frac{\mathcal{M}}{l} x; \quad M_{2-3} = -\frac{\mathcal{M}}{l} x.$$

În punctul 3 apare un salt egal cu \mathcal{M} , valorile în secțiunile adiacente fiind

$$M_{3-\varepsilon} = \mathcal{M} \frac{a}{l}; \quad M_{3+\varepsilon} = -\mathcal{M} \frac{b}{l}.$$

d) *Bară în consolă încărcată cu forță concentrată și sarcină distribuită* (fig. 19.7). Reacțiunile din încastrare sînt $V_1 = 0,2 q \cdot l$ și $M_1 = 0,28 q \cdot l^2$.

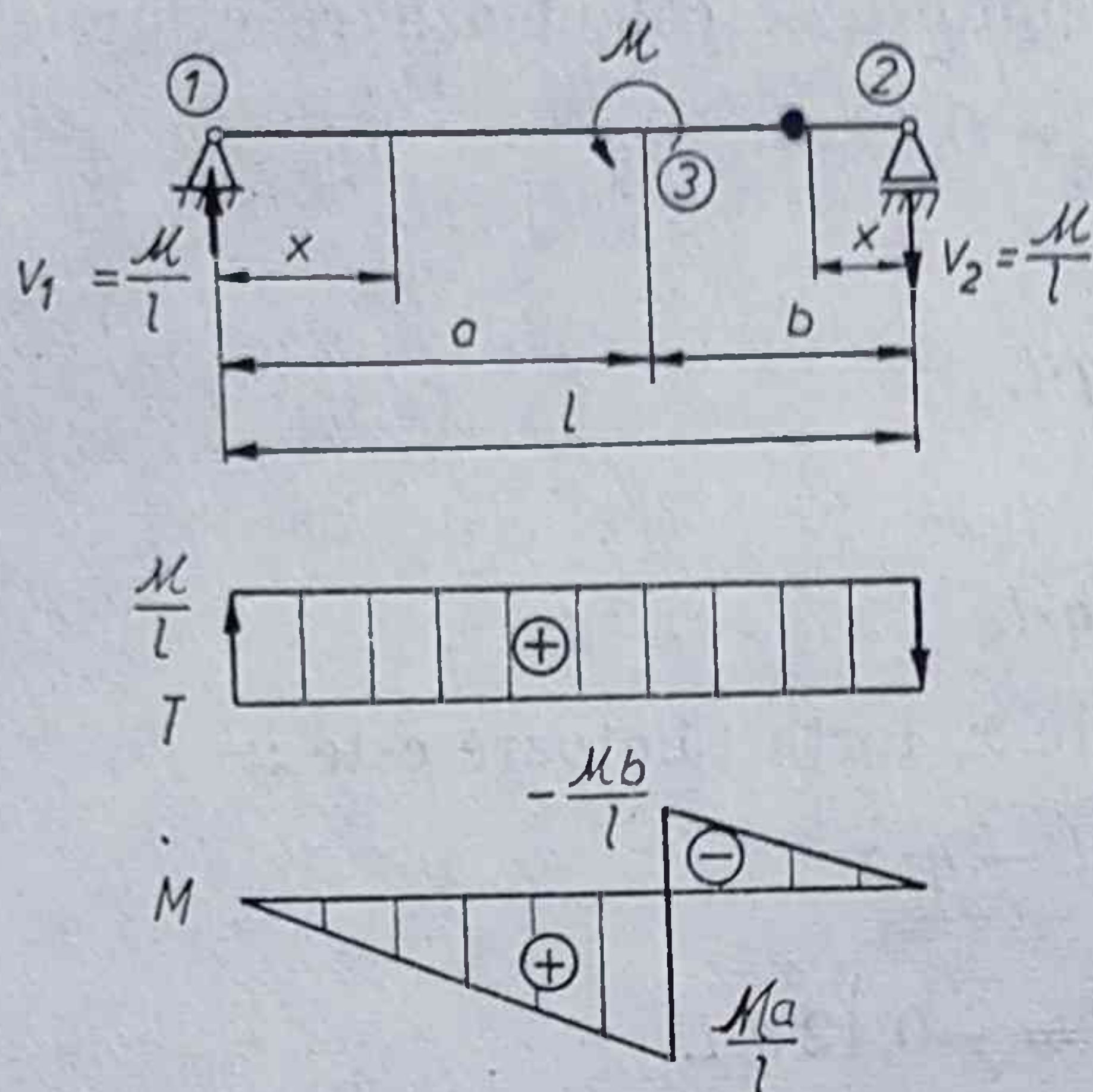


Fig. 19.6

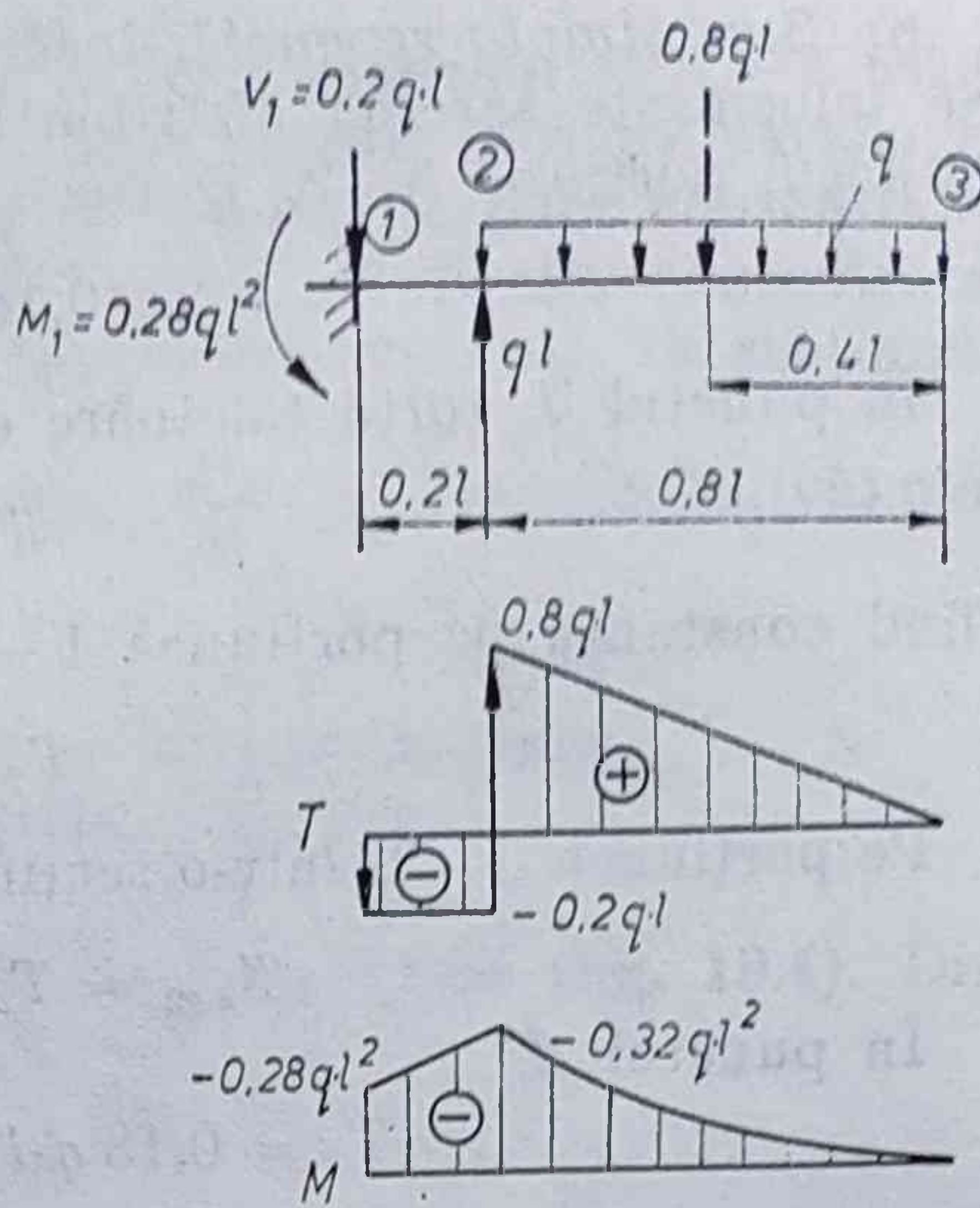


Fig. 19.7

Forța tăietoare este constantă pe porțiunea 1—2 :

$$T_{1-2} = -0,2 q \cdot l,$$

și are un salt egal cu $q \cdot l$ în secțiunea 2, scăzând apoi liniar la zero.

Momentul încovoietor în încastrare este $M_1 = -0,28 q \cdot l^2$, pe porțiunea 1—2, variază liniar pînă la $M_2 = -0,32 q \cdot l^2$, scăzând apoi parabolic la zero în punctul 3.

e) *Bară simplu rezemată, încărcată cu sarcină triunghiulară* (fig. 19.8). Pentru calculul reacțiunilor, se înlocuiește sarcina distribuită cu o forță concentrată $\frac{q \cdot l}{2}$, aplicată la distanța $\frac{2l}{3}$

de reazemul din stînga (în centrul de greutate al triunghiului). Se obține :

$$V_1 = \frac{q \cdot l}{6} ; \quad V_2 = \frac{q \cdot l}{3}.$$

În secțiunea x , intensitatea sarcinii distribuite este :

$$q_x = \frac{x}{l} q,$$

forța tăietoare este :

$$T_x = \frac{q \cdot l}{6} - \frac{1}{2} q_x \cdot x = \frac{q \cdot l}{6} - \frac{q \cdot x^2}{2l},$$

iar momentul încovoietor este :

$$M_x = \frac{q \cdot l}{6} x - \frac{1}{2} q_x \cdot x \cdot \frac{x}{3} = \frac{q \cdot l \cdot x}{6} - \frac{q \cdot x^3}{6l}.$$

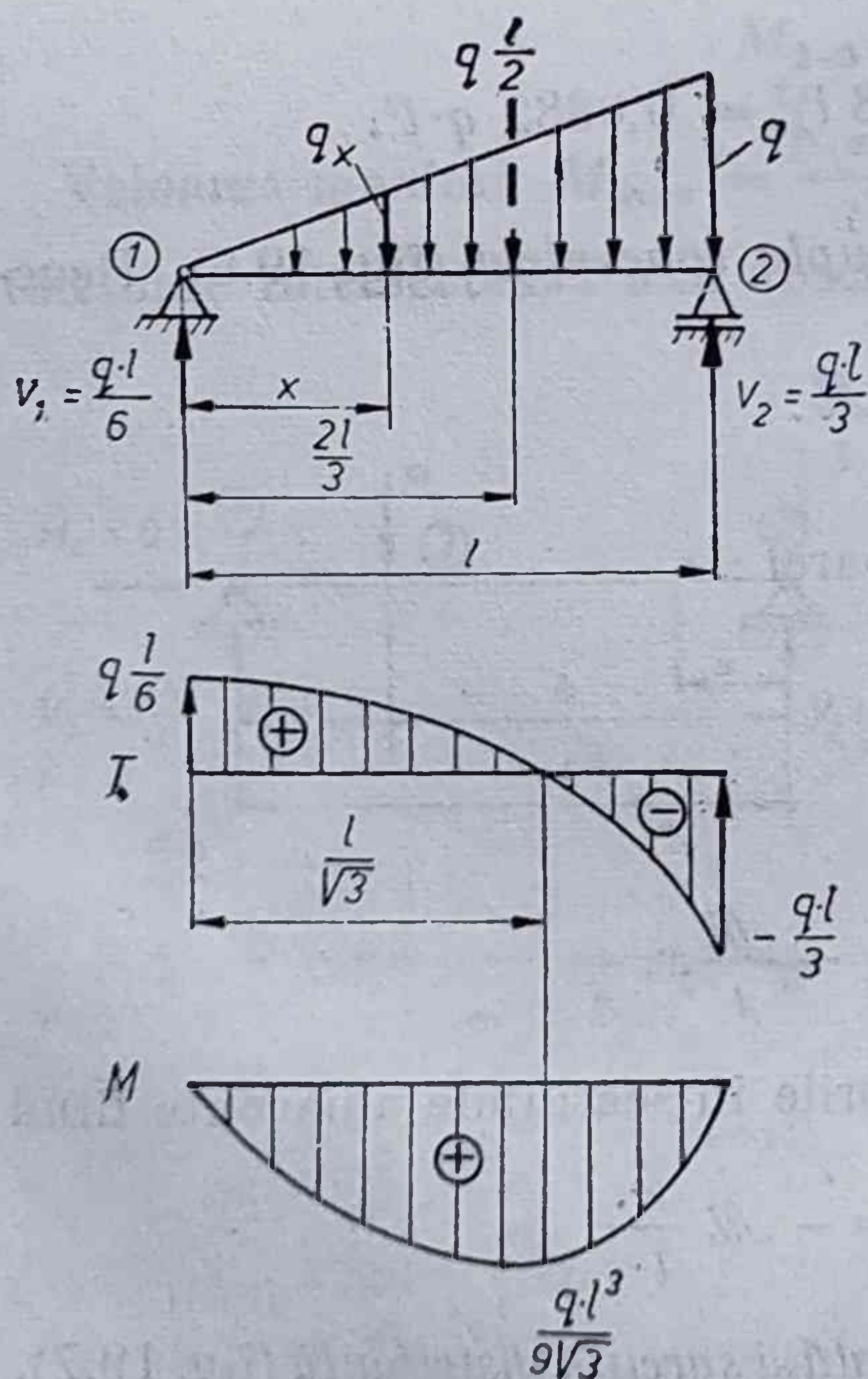


Fig. 19.8

Anulind expresia forței tăietoare, se obține abscisa $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$ în care momentul încovoietor are valoarea maximă $M_{max} = \frac{q \cdot l^2}{9\sqrt{3}}$.

19.1.5. DIAGRAMA FORTELOR AXIALE

Pentru bara din figura 19.9, a, solicitată de forțe dirijate în lungul axei barei, se calculează forța axială pe fiecare porțiune :

$$N_{1-2} = -2P; \quad N_{2-3} = P; \quad N_{3-4} = 2P; \\ N_{4-5} = -P,$$

și se construiește diagrama de eforturi din figura 19.9. b ținând cont de convențiile de semne.

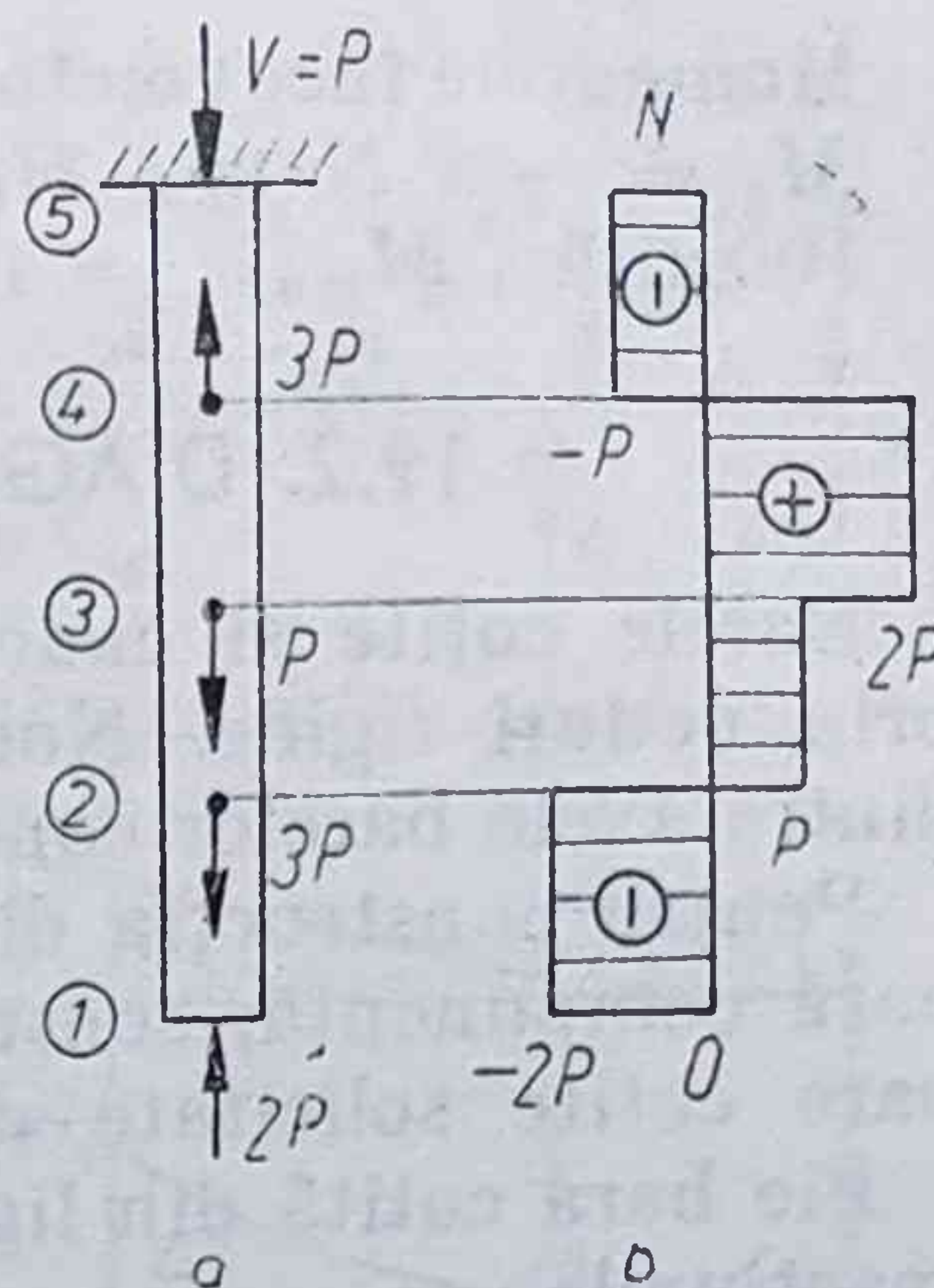


Fig. 19.9

APLICAȚIA 1

Se cere să se construiască diagramele T și M la bara din figura 19.10.

Rezolvare

Reacțiunile sînt: $V_1 = 5N$; $V_2 = 11N$.

Forțele tăietoare au valorile: $T_{1-4} = 5N$; $T_{4-2} = (5 - 7x)N$; $T_{2-5} = 2N$.

Pentru $T_{4-2} = 0$ se obține $x_0 = \frac{5}{7}m$.

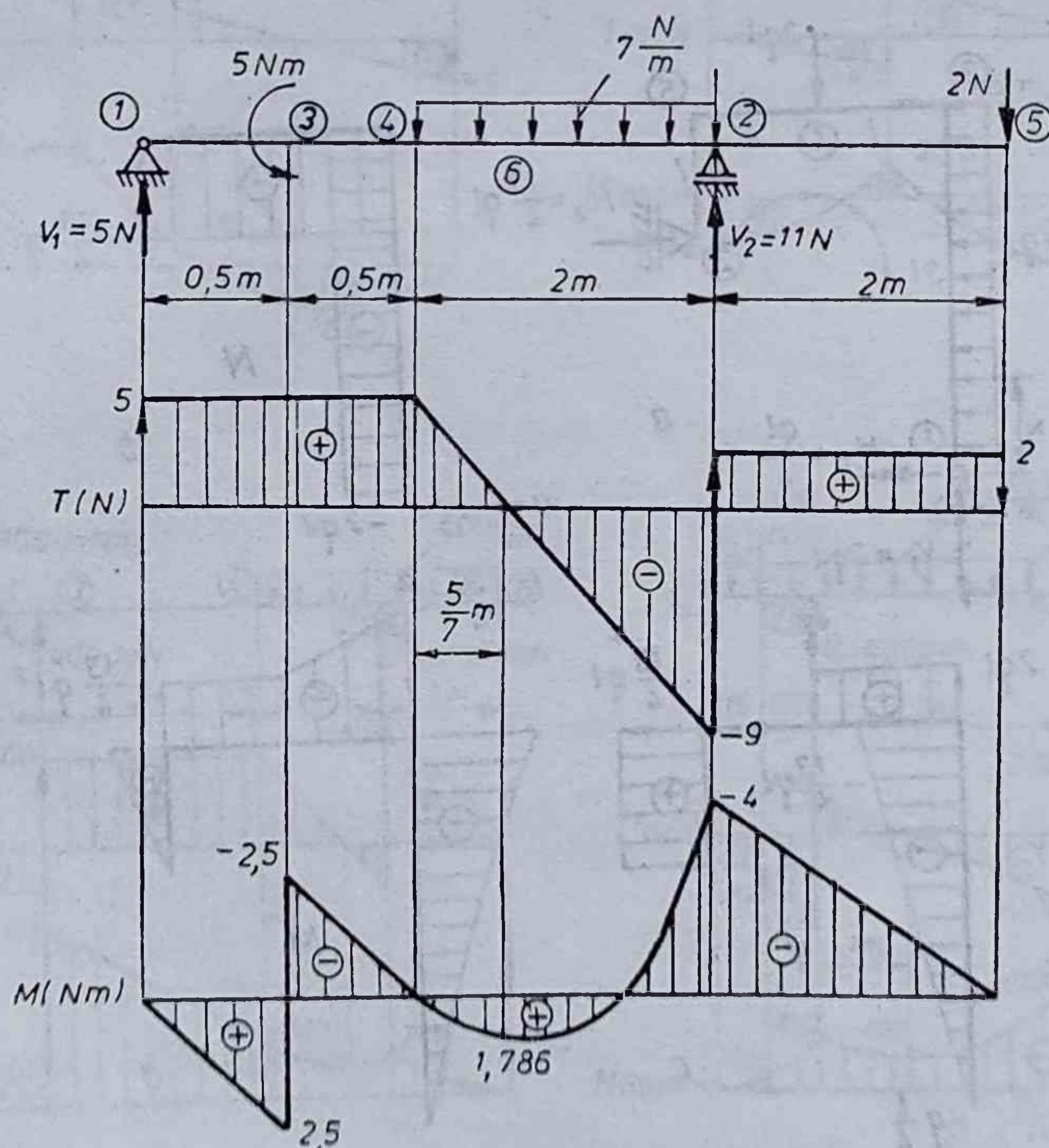


Fig. 19.10

Momentele încovoietoare au valorile : $M_{3-\varepsilon} = 2,5 \text{ N}\cdot\text{m}$; $M_{3+\varepsilon} = -2,5 \text{ N}\cdot\text{m}$;
 $M_2 = -4 \text{ N}\cdot\text{m}$; $M_6 = 1,786 \text{ N}\cdot\text{m}$.
 Rezultă $|M_{\max}| = 4,0 \text{ N}\cdot\text{m}$.

19.2. DIAGrame DE EFORTURI LA BARE COTITE

Barele cotite și cadrele sînt formate din mai multe bare drepte, legate prin noduri rigide. Nodurile rigide realizează legături care mențin unghiul dintre axele barelor concurente în nod și după aplicarea solicitării.

Pentru construcția diagramei de eforturi trebuie precizat, pentru fiecare bară componentă, sensul pozitiv al axei x . În cele ce urmează se consideră bare cotite solitate de sarcini coplanare.

Fie bara cotită din figura 19.11, solitată de forțe coplanare. Se calculează reacțiunile :

$$V_1 = 2q \cdot l; \quad H_2 = \frac{13}{4} q \cdot l; \quad H_1 = \frac{q \cdot l}{4}.$$

Forțele axiale au valorile :

$$N_{1-3} = -2q \cdot l; \quad N_{3-5} = -\frac{13}{4} q \cdot l; \quad N_{5-2} = 0.$$

Cu aceste valori se construiește diagrama din figura 19.11, b.

Forțele tăietoare sînt :

$$T_1 = -\frac{q \cdot l}{4}; \quad T_{1-3} = -\frac{q \cdot l}{4} - q \cdot x; \quad T_{3-\varepsilon} = -\frac{13}{4} q \cdot l.$$

$$T_{3+\varepsilon} = 2q \cdot l; \quad T_{3-4} = 2q \cdot l; \quad T_{4-5} = 0; \quad T_{5-2} = \frac{13}{4} q \cdot l.$$

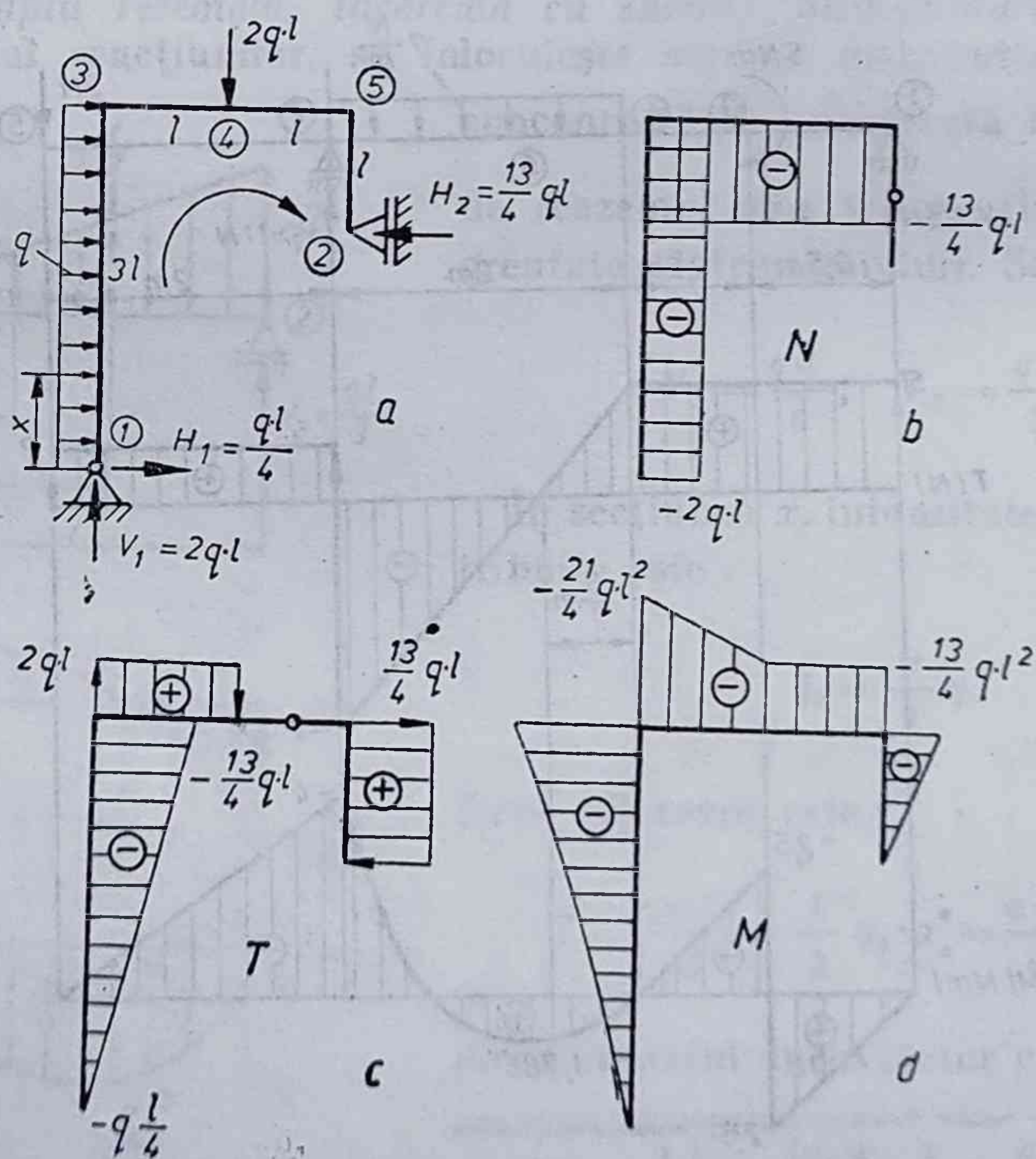


Fig. 19.11

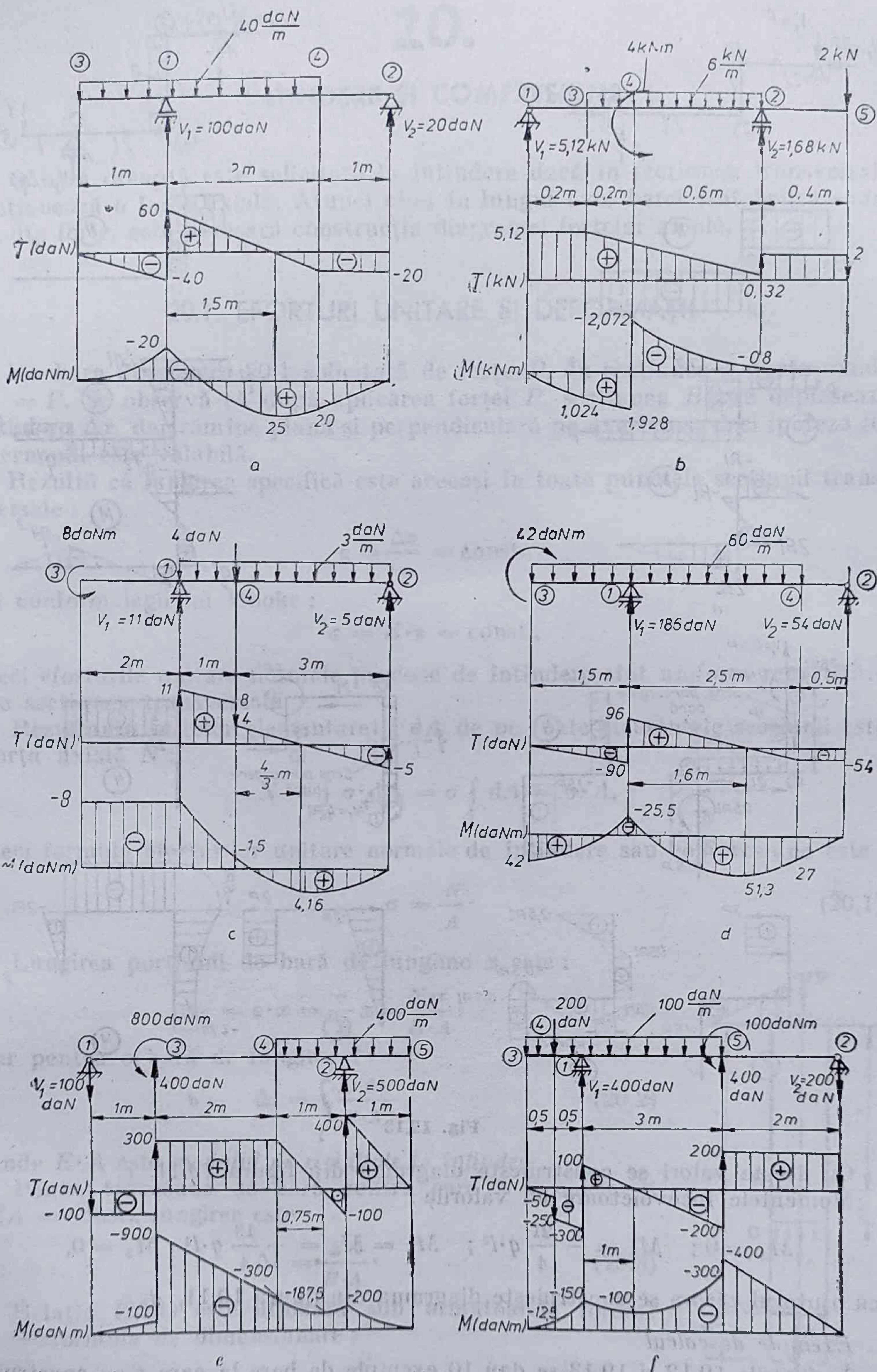


Fig. 19.12

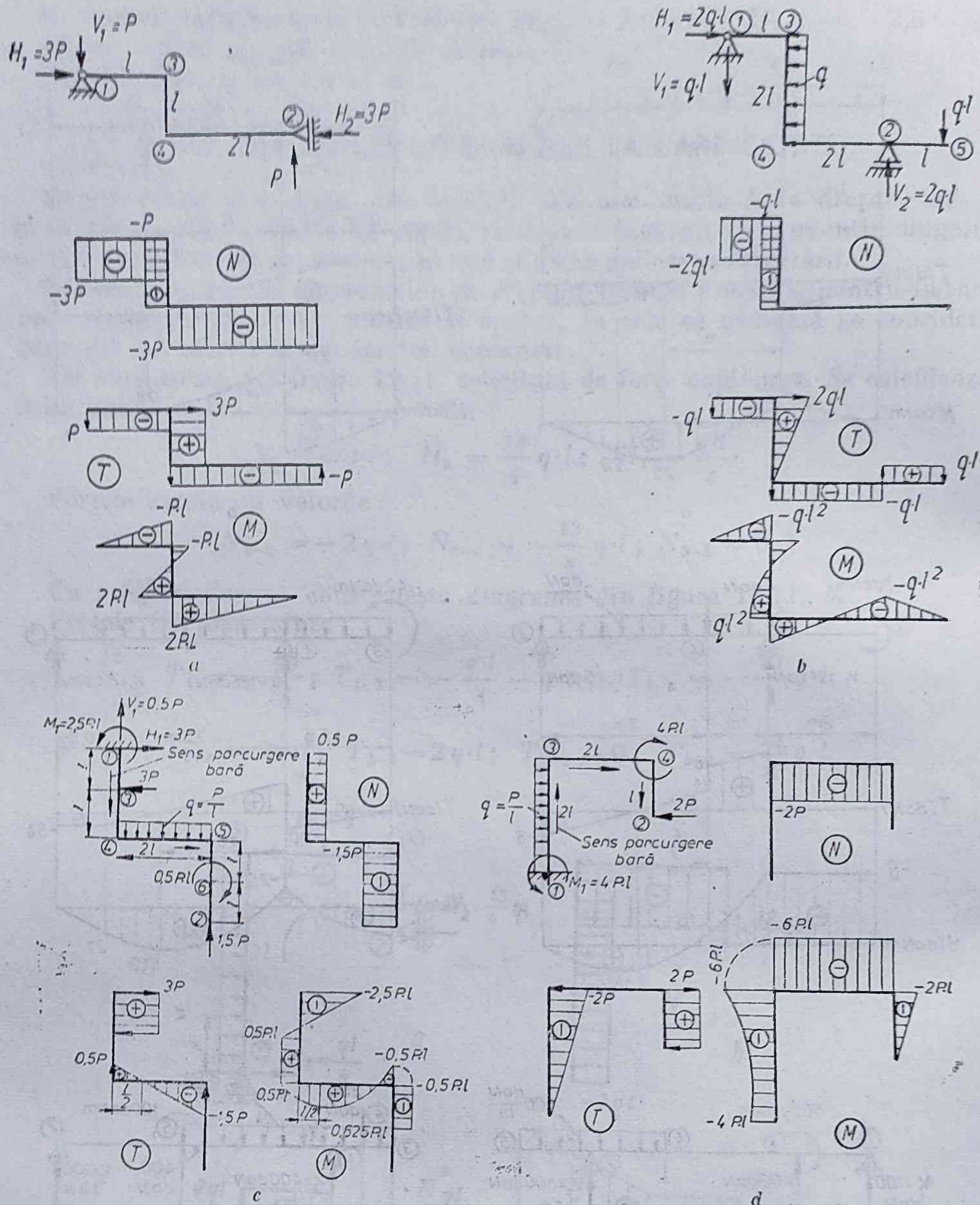


Fig. 19.13

Cu aceste valori se construiește diagrama din figura 19.11, c. Momentele încovoietoare au valorile :

$$M_1 = 0; \quad M_3 = -\frac{21}{4} q \cdot l^2; \quad M_4 = M_5 = -\frac{13}{4} q \cdot l^2; \quad M_2 = 0,$$

cu ajutorul cărora se construiește diagrama din figura 19.11, d.

Exemple de calcul

În figurile 19.12 și 19.13 se dau 10 exemple de bare la care s-au construit diagramele forțelor axiale, tăietoare și ale momentelor încovoietoare.

20.

ÎNTINDERE ȘI COMPRESIUNE

O bară dreaptă este solicitată la întindere dacă în secțiunea transversală acționează o forță axială. Atunci când în lungul axei barei sînt aplicate mai multe forțe, este necesară construcția diagramei forțelor axiale.

20.1. EFORTURI UNITARE ȘI DEFORMAȚII

Fie bară din figura 20.1 solicitată de forța P . În secțiunea x , forța axială $N = P$. Se observă că după aplicarea forței P , secțiunea BC se deplasează axial cu Δx , dar rămîne plană și perpendiculară pe axa barei, deci ipoteza lui Bernoulli este valabilă.

Rezultă că lungirea specifică este aceeași în toate punctele secțiunii transversale :

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} = \text{const.},$$

și conform legii lui Hooke :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \text{const.},$$

deci eforturile unitare normale produse de întindere sînt uniform repartizate pe secțiunea transversală.

Rezultanta forțelor elementare $\sigma \cdot dA$ de pe toate elementele secțiunii este forța axială N :

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = \sigma \int_A dA = \sigma \cdot A,$$

deci formula eforturilor unitare normale de întindere sau compresiune este :

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (20.1)$$

Lungirea porțiunii de bară de lungime x este :

$$\Delta x = \varepsilon \cdot x = \frac{\sigma}{E} x = \frac{N \cdot x}{E \cdot A},$$

iar pentru o bară de lungime l :

$$\Delta l = \int_l \frac{N \cdot dx}{E \cdot A} \quad (20.2)$$

unde $E \cdot A$ este *modulul de rigiditate la întindere*.

Pentru tronsoane de bară pentru care $N = \text{const.}$ și $EA = \text{const.}$, lungirea este :

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}. \quad (20.3)$$

Relația (20.1) este utilizată sub următoarele forme :

— formula de dimensionare :

$$A_{\text{nece}} = \frac{N}{\sigma_n}; \quad (20.4, a)$$

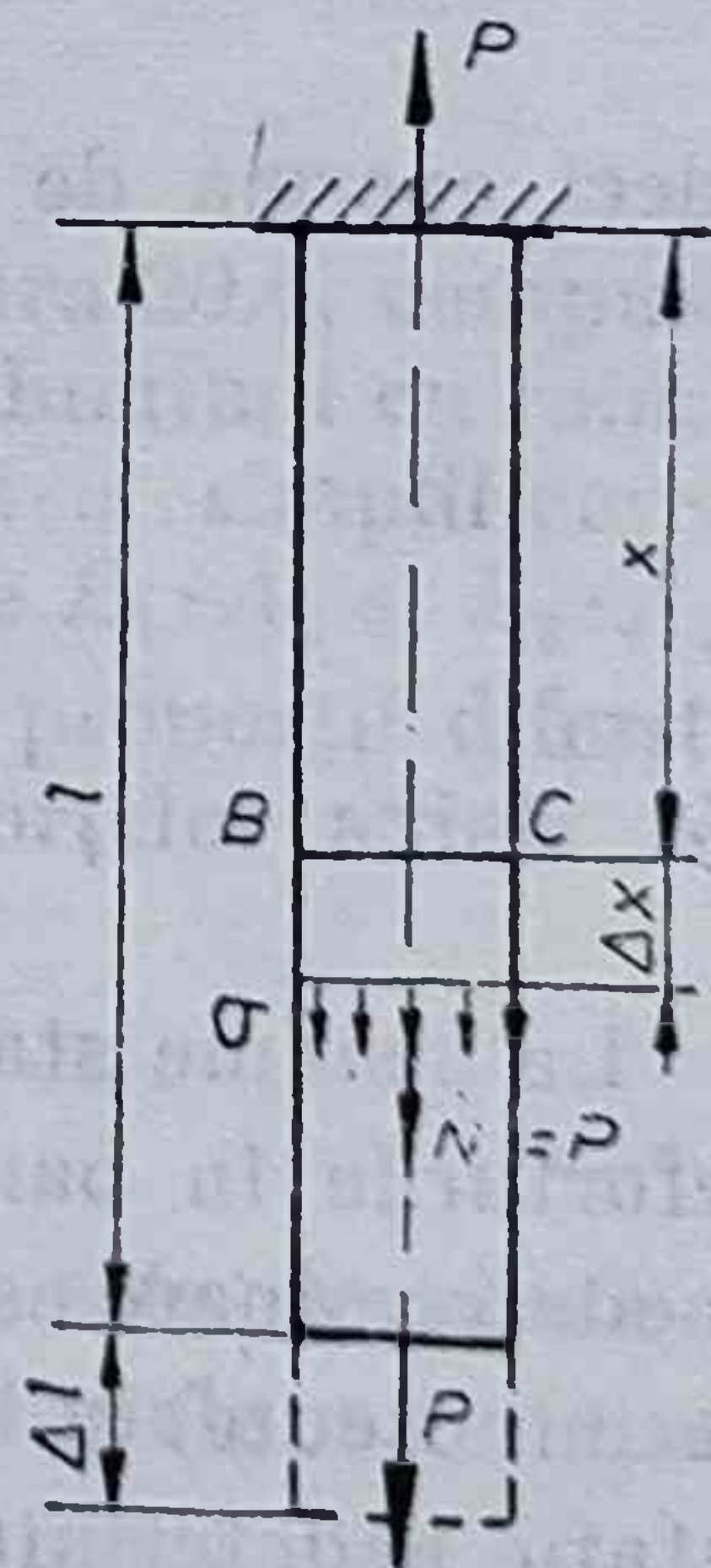


Fig. 20.1

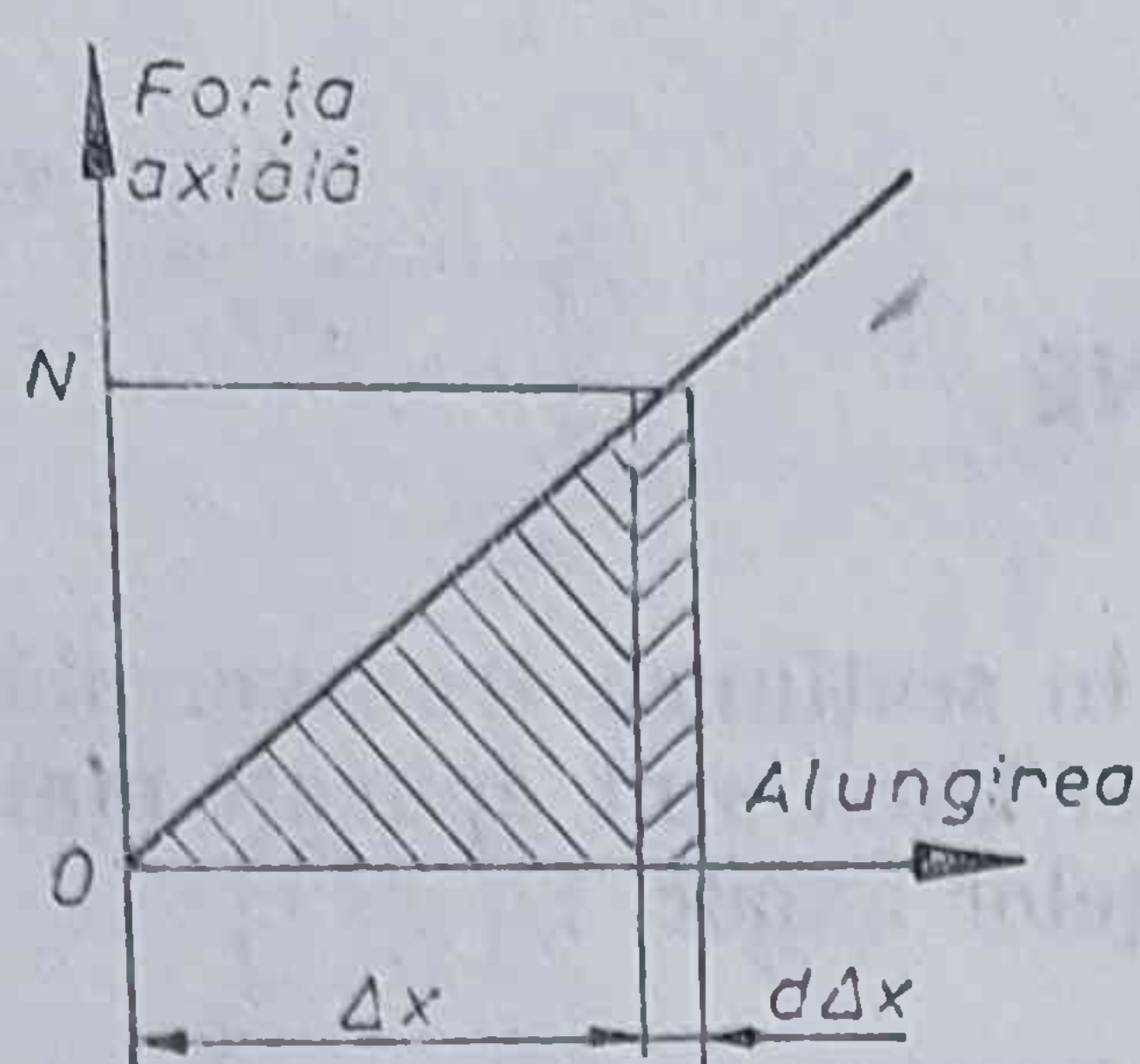


Fig. 20.2

— formula de verificare :

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A} \leq \sigma_a ; \quad (20.4, b)$$

— formula forței capabile :

$$N_{cap} = A \cdot \sigma_a. \quad (20.4, c)$$

În relațiile (20.4), σ_a este rezistența admisibilă la întindere sau compresiune.

20.2. ENERGIA DE DEFORMAȚIE LA ÎNTINDERE

Pentru o porțiune de bară de lungime x , lungirea este :

$$\Delta x = \frac{N \cdot x}{E \cdot A},$$

deci lucrul mecanic elementar produs de forța axială N este (fig. 20.2)

$$N \cdot d(\Delta x) = \frac{E \cdot A}{x} \Delta x \cdot d(\Delta x).$$

Dacă solicitarea este statică, lucrul mecanic efectuat de sarcinile exterioare se transformă în energie potențială de deformație :

$$W = \int_0^{\Delta x} \frac{E \cdot A}{x} \Delta x \cdot d(\Delta x) = \frac{E \cdot A}{x} \frac{(\Delta x)^2}{2} = \frac{1}{2} N \cdot \Delta x = \frac{N^2 \cdot x}{2E \cdot A}.$$

Pentru un element de bară de lungime dx :

$$dW = \frac{N^2 \cdot dx}{2E \cdot A},$$

deci energia de deformație înmagazinată de întreaga bară se poate scrie :

$$W = \int \frac{N^2 \cdot dx}{2E \cdot A}. \quad (20.5)$$

20.3. SISTEME STATIC NEDETERMINATE

La sisteme static nedeterminate (sisteme hiperstatice) nu se pot determina eforturile în bare cu ajutorul ecuațiilor de echilibru din statică. Gradul de nedeterminare este egal cu diferența între numărul reacțiunilor (sau eforturilor necunoscute) și numărul ecuațiilor din statică. Pentru rezolvarea problemelor static nedeterminate este necesar să se stabilească un număr de ecuații, reprezentând condiții de deformație, egal cu gradul de nedeterminare.

20.3.1. BARĂ DUBLU ARTICULATĂ

Fie bara din figura 20.3, articulată la capete și solicitată de forța P . Se cer eforturile unitare din bară.

Reacțiunile din articulații sînt H_1 și H_2 .

Ecuatia de proiecții pe orizontală

$$H_1 - P + H_2 = 0 \quad (20.6)$$

conține două necunoscute, deci sistemul este simplu static nedeterminat. Se mai caută o ecuație de deformații.

În urma aplicării forței P , punctul 3 se deplasează în 3', deci cît se întinde porțiunea 1-3 atît se comprimă porțiunea 3-2 ;

$$\Delta l_{1-3} = |\Delta l_{3-2}|. \quad (20.7)$$

Din diagrama forțelor axiale rezultă :

$$N_{1-3} = H_1; \quad N_{3-2} = H_1 - P = -H_2,$$

deci, utilizînd relația (20.3), condiția de deformație (20.7) devine

$$\frac{H_1 \cdot a}{E \cdot A} = \frac{H_2 \cdot b}{E \cdot A} \quad \text{sau} \quad H_1 \cdot a = H_2 \cdot b. \quad (20.8)$$

Rezolvînd sistemul format din ecuațiile (20.6) și (20.8) se obține :

$$H_1 = P \frac{b}{l}; \quad H_2 = P \frac{a}{l},$$

deci eforturile unitare au expresiile :

$$\sigma_{1-3} = \frac{N_{1-3}}{A} = \frac{P \cdot b}{A \cdot l}; \quad \sigma_{3-2} = \frac{N_{3-2}}{A} = -\frac{P \cdot a}{A \cdot l}.$$

20.3.2. BARĂ DE SECȚIUNE NEOMOGENĂ

Se cer eforturile unitare produse de forța P în bara din figura 20.4, compusă din două materiale diferite (stîlp de beton armat, cablu de aluminiu cu inimă de oțel etc.), desenate separat pentru simplificarea expunerii. Se dau modulele de rigiditate $E_1 \cdot A_1$ și $E_2 \cdot A_2$.

Forța exterioară P este preluată în proporții diferite de cele două materiale, dar suma forțelor axiale N_1 și N_2 egalează forța totală :

$$N_1 + N_2 = P.$$

Pentru determinarea acestor forțe este necesară o condiție de deformație. Cele două materiale au deformații identice, fiind solidarizate între ele :

$$\Delta l_1 = \Delta l_2,$$

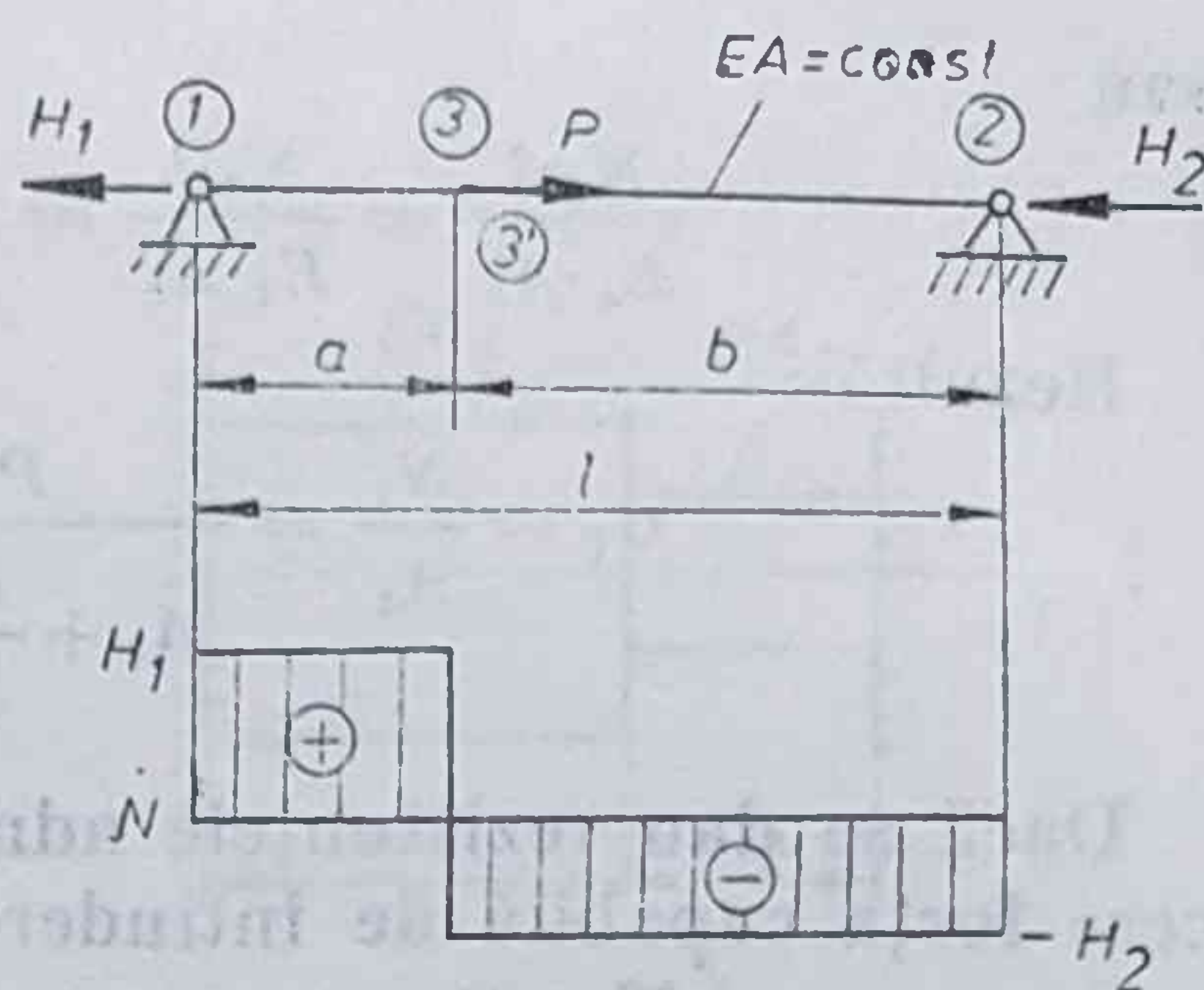


Fig. 20.3

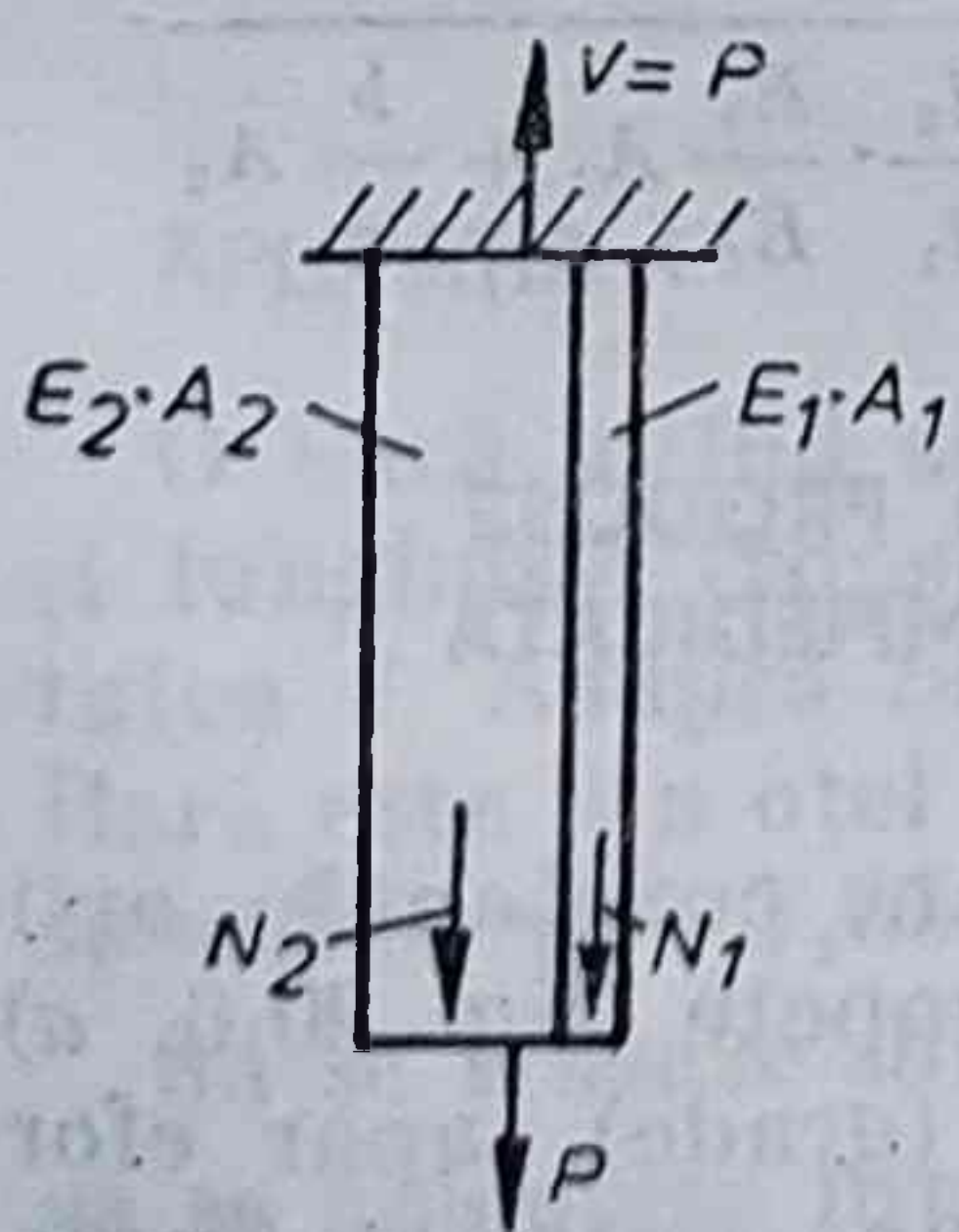


Fig. 20.4

sau

$$\frac{N_1 \cdot l}{E_1 \cdot A_1} = \frac{N_2 \cdot l}{E_2 \cdot A_2} = \frac{N_1 + N_2}{E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2} = \frac{P}{E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2}.$$

Rezultă :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{P}{A_1 + \frac{E_2}{E_1} A_2}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{P}{A_2 + \frac{E_1}{E_2} A_1}.$$

Dacă se dau rezistențele admisibile ale celor două materiale σ_{a1} , σ_{a2} , și se cere forța capabilă de întindere, se calculează

$$P' = \sigma_{a1} \left(A_1 + \frac{E_2}{E_1} A_2 \right); \quad P'' = \sigma_{a2} \left(A_2 + \frac{E_1}{E_2} A_1 \right),$$

și se alege P_{cap} egală cu cea mai mare dintre cele două forțe P' și P'' .

20.3.3. SISTEM DE BARE PARALELE

Se consideră o bară rigidă OB (fig. 20.5, *a*) suspendată de două bare elastice și articulată în O . Se cer eforturile unitare în barele verticale.

Izolînd bara rigidă (fig. 20.5, *b*), se scrie ecuația de momente față de punctul O :

$$T_1 \cdot a + T_2 \cdot b = P \cdot c. \quad (20.9)$$

Ecuația de deformație se scrie pe baza condiției ca după aplicarea forței P bara OB să rămînă rectilinie (fig. 20.5, *c*) cînd barele verticale se lungesc :

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{a}{a + b},$$

sau

$$\frac{T_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} = \frac{a}{a + b} \cdot \frac{T_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2}. \quad (20.10)$$

Rezolvînd sistemul format din ecuațiile (20.9) și (20.10), se obțin forțele T_1 și T_2 , apoi se calculează eforturile unitare :

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{A_1} = \frac{P}{\frac{(a + b)b}{a \cdot c} \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{E_2}{E_1} A_2 + \frac{a}{c} A_1};$$

$$\sigma_2 = \frac{T_2}{A_2} = \frac{P}{\frac{a^2}{(a + b)c} \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{E_1}{E_2} A_1 + \frac{b}{c} A_2}.$$

20.3.4. EFORTURI PRODUSE DE DILATAREA ÎMPIEDICATĂ

Într-o bară de secțiune constantă, articulată sau încăstrată la capete (fig. 20.6, *a*), încălzită uniform cu Δt (grade), apar eforturi unitare de compresiune datorită împiedicării dilatării.

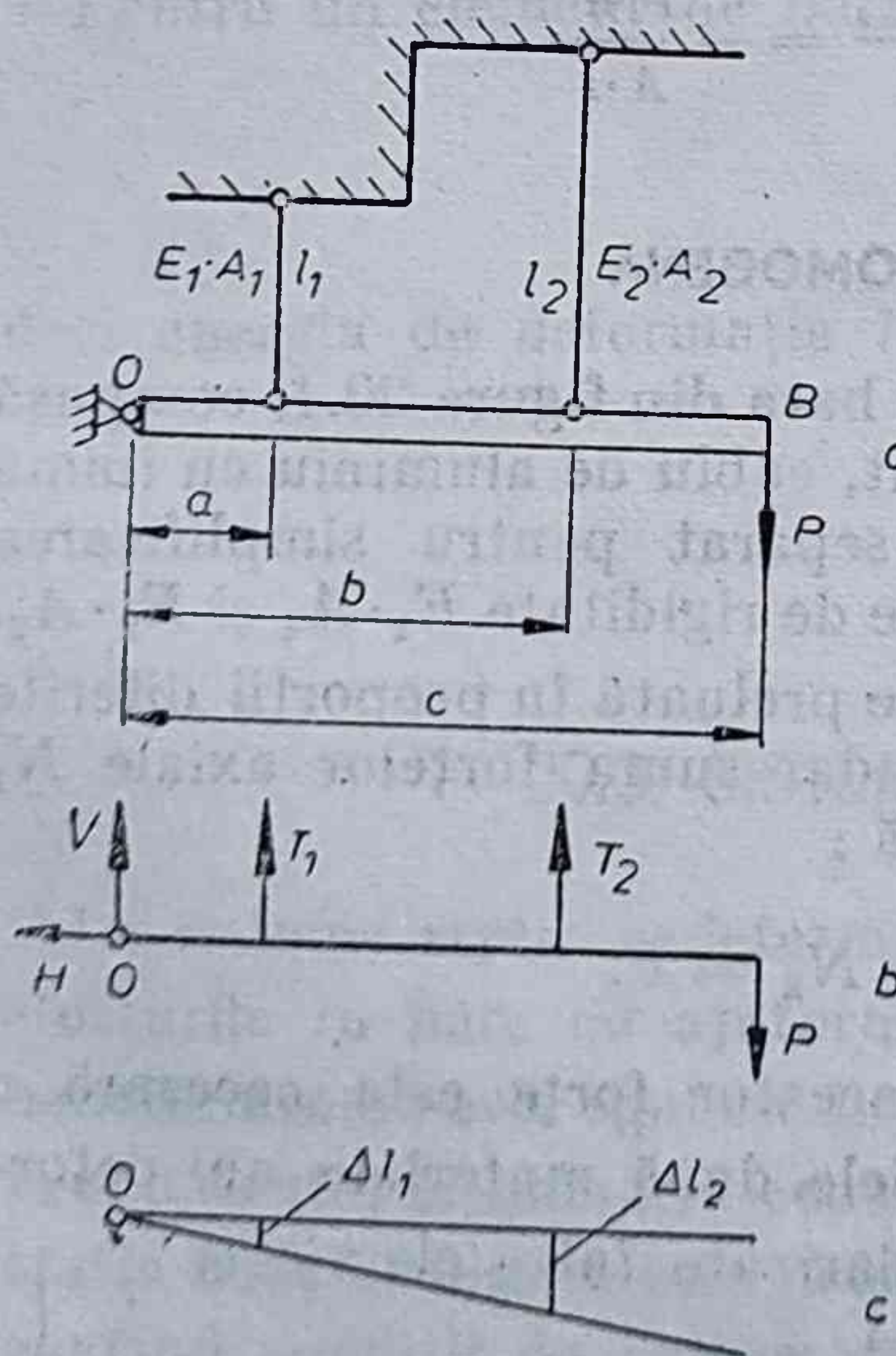


Fig. 20.5

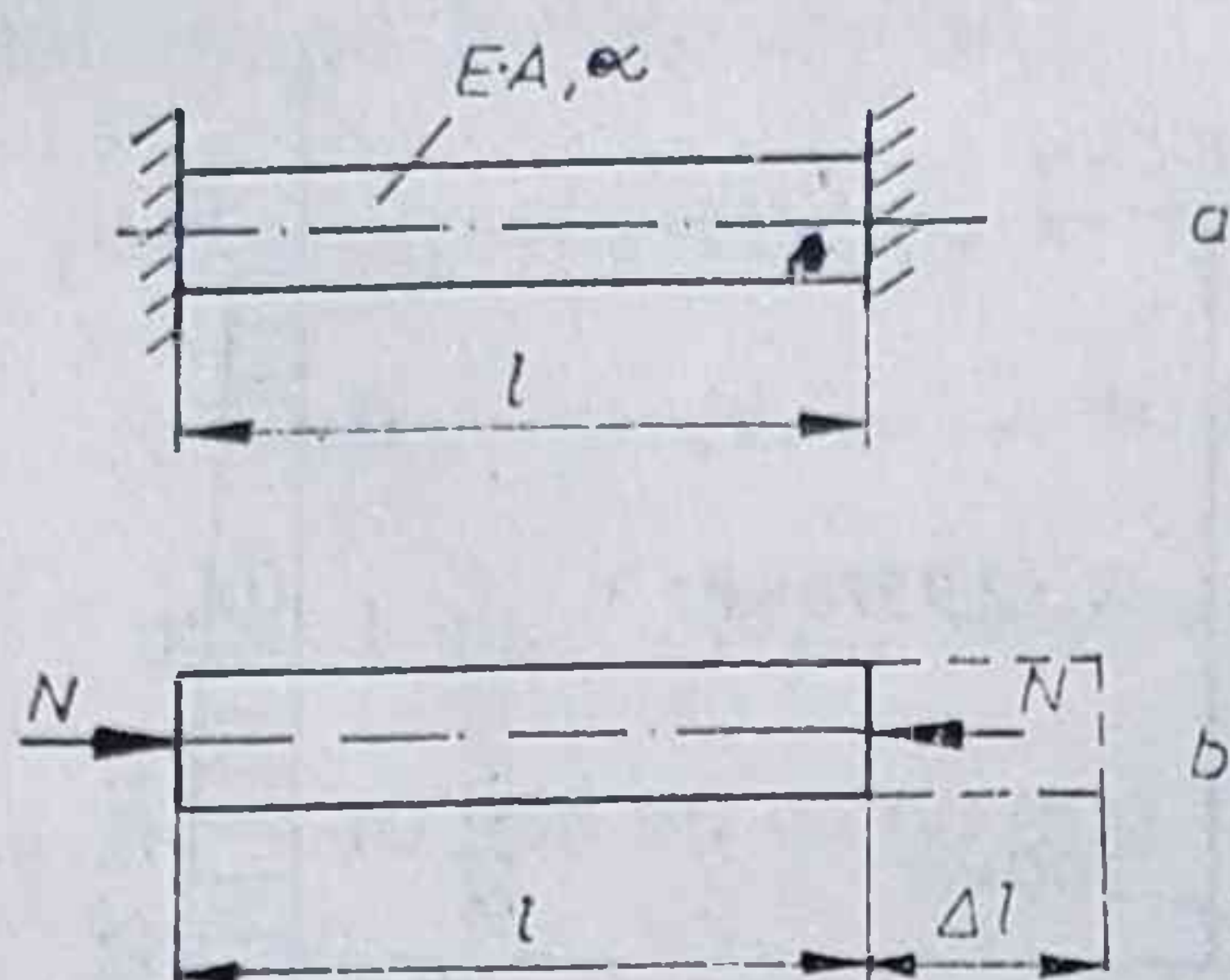


Fig. 20.6

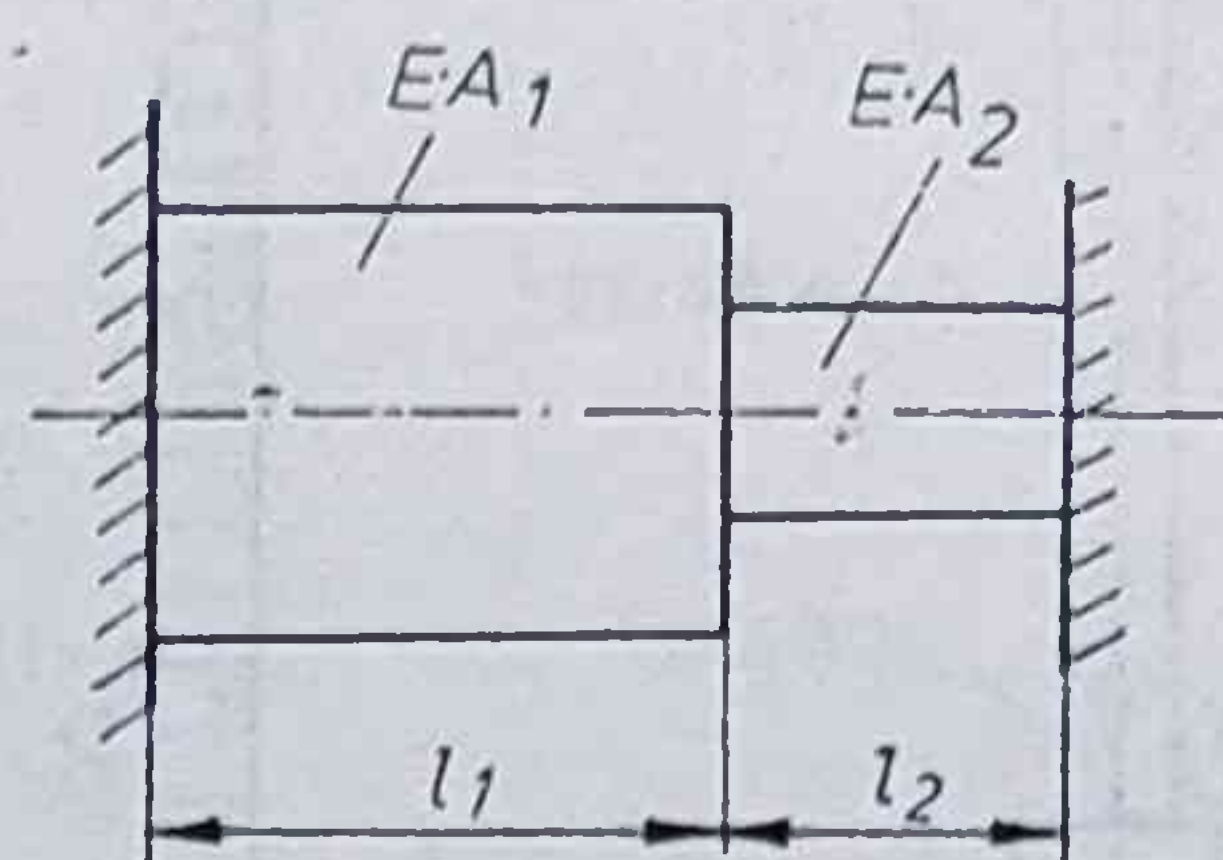


Fig. 20.7

Într-adevăr, dacă bara ar fi liberă la capete, datorită încălzirii s-ar dilata liber, lungindu-se cu :

$$\Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta t, \quad (20.11)$$

unde α este coeficientul de dilatare termică liniară.

Împiedicarea dilatării este echivalentă cu aplicarea unei forțe de compresie N , care readuce bara la lungimea inițială, deci o comprimă cu

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}. \quad (20.12)$$

Egalînd expresiile (20.11) și (20.12) rezultă :

$$l \cdot \alpha \cdot \Delta t = \frac{N \cdot l}{E \cdot A},$$

deci :

$$\sigma = \frac{N}{A} = E \cdot \alpha \cdot \Delta t.$$

La bara de secțiune variabilă în trepte din figura 20.7, încălzită cu Δt , un raționament analog conduce la condiția

$$(l_1 + l_2) \alpha \cdot \Delta t = \frac{N \cdot l_1}{EA_1} + \frac{N \cdot l_2}{EA_2},$$

$$\text{deci : } \sigma_1 = \frac{N}{A_1} = \frac{l_1 + l_2}{l_1 + \frac{A_1}{A_2} l_2} E \cdot \alpha \cdot \Delta t; \quad \sigma_2 = \frac{N}{A_2} = \frac{l_1 + l_2}{l_2 + \frac{A_2}{A_1} l_1} E \cdot \alpha \cdot \Delta t.$$

APLICAȚIA 1

O bară avînd secțiunea variabilă în trepte : $A_{12} = 80 \text{ cm}^2$; $A_{23} = 64 \text{ cm}^2$ și lungimile tronsoanelor $l_{12} = 4 \text{ m}$, $l_{23} = 6 \text{ m}$, este încastrată la extremitatea 1. Asupra barei acționează forțele axiale reprezentate în figura 20.8, a. Bara este din oțel cu $\sigma_a = 1200 \text{ daN/cm}^2$, $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$ și greutatea specifică $\gamma = 7,65 \cdot 10^{-3} \text{ daN/cm}^3$.

Să se traseze diagrama forțelor axiale N , să se verifice bara la întindere și să se calculeze lungirea totală a barei, neglijînd în primul caz greutatea proprie a barei, iar în al doilea caz, cu considerarea greutății proprii a acesteia.

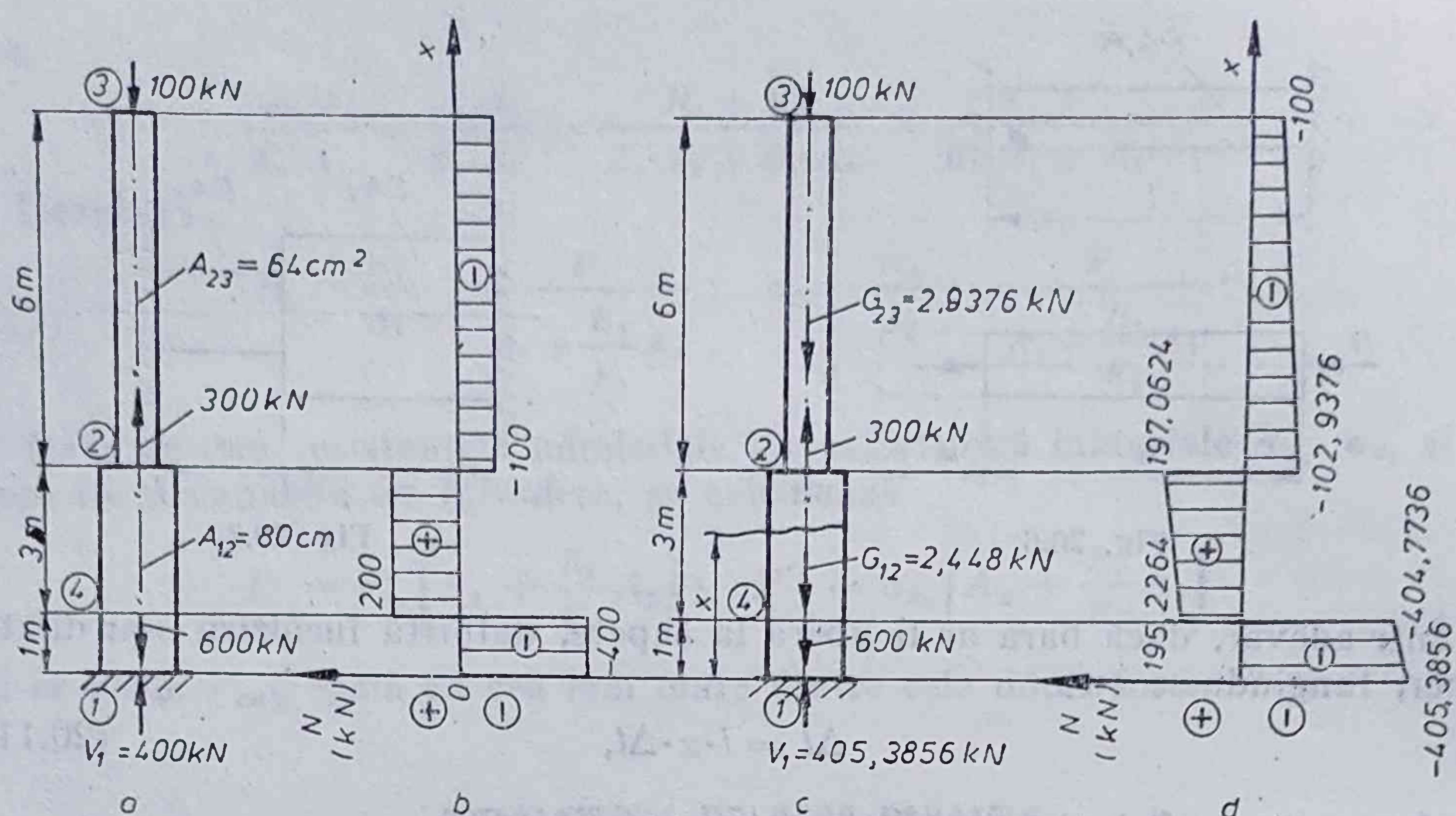


Fig. 20.8

Rezolvare

Cazul 1. Fără considerarea greutatei proprii a barei (fig. 20.8, a). Se calculează reacțiunea $V_1 = 400$ kN.

Se determină forțele axiale: $N_{14} = -400$ kN; $N_{42} = 200$ kN; $N_{23} = -100$ kN și se trasează diagrama N (fig. 20.8, b) ținând seama de convențiile de semne (§ 19.1).

Se verifică bara în secțiunile 1 și 2:

$$\sigma_{ef1} = -\frac{40\,000}{80} = -500 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} < \sigma_a;$$

$$\sigma_{ef2} = \frac{20\,000}{64} = 312,5 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} < \sigma_a.$$

Lungirea totală a barei este: $\Delta l = \Delta l_{14} + \Delta l_{42} + \Delta l_{23}$; ținând seama de relația (20.3), se obține

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{(-400 \cdot 10^2) \cdot 100}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 80} + \frac{200 \cdot 10^2 \cdot 300}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 80} + \frac{(-100 \cdot 10^2) \cdot 600}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 64} = \\ &= -0,0238 + 0,0357 - 0,0446 = -0,0327 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Cazul 2. Cu considerarea greutatei proprii a barei (fig. 20.8, c). Se determină greutățile celor două tronsoane:

$$G_{1-2} = 7,65 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot 400 = 244,8 \text{ daN,}$$

$$G_{2-3} = 7,65 \cdot 10^{-3} \cdot 64 \cdot 600 = 293,76 \text{ daN.}$$

Se calculează apoi reacțiunea din încastrarea 1: $V_1 = 40\,538,56$ daN.

Se determină forțele axiale :

$$N_{1-4} = -V_1 + \gamma \cdot A_{1-2} \cdot x = -40\,538,56 + 7,65 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot x ;$$

$$x = 0 ; \quad N_1 = -40\,538,56 \text{ daN} ;$$

$$x = 1 \text{ m}, \quad N_{4-\varepsilon} = -40\,477,36 \text{ daN}.$$

$$N_{4-2} = -40\,538,56 + 60\,000 + 7,65 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot x ;$$

$$x = 1 \text{ m}, \quad N_{4+\varepsilon} = 19\,522,64 \text{ daN} ;$$

$$x = 4 \text{ m}, \quad N_{2-\varepsilon} = 19\,706,24 \text{ daN}.$$

$$N_{2-3} = -40\,538,56 + 60\,000 + 244,8 - 30\,000 + 7,65 \cdot 10^{-3} \cdot 64(x - 4) ;$$

$$x = 4 \text{ m}, \quad N_{2+\varepsilon} = -10\,293,76 \text{ daN} ;$$

$$x = 10 \text{ m}, \quad N_{3-\varepsilon} = -10\,000 \text{ daN} ;$$

$$N_{3+\varepsilon} = -10\,000 + 10\,000 = 0.$$

Se trasează diagrama N (fig. 20.8, d).

Verificînd bara în secțiunile 1 și 2 se obține :

$$\sigma_{ef_1} = -\frac{40\,538,56}{80} = -506,732 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} < \sigma_a ;$$

$$\sigma_{ef_2} = \frac{19\,706,24}{64} = 307,91 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} < \sigma_a.$$

Pentru calculul lungirii unui tronson, se utilizează expresia (20.2) în care se consideră, pe lîngă forța axială P , și greutatea proprie $G = \gamma \cdot A \cdot l$ a tronsonului :

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_x \cdot dx}{E \cdot A} = \frac{1}{E \cdot A} \int_0^l (P + \gamma \cdot A x) dx = \frac{\left(P + \frac{G}{2}\right) l}{E \cdot A}.$$

Lungirea totală a barei este $\Delta l = \Delta l_{1-4} + \Delta l_{4-2} + \Delta l_{2-3}$.

Înlocuind, rezultă :

$$\begin{aligned} \Delta l = & \frac{\left(-40\,538,56 + \frac{1}{2} \cdot 7,65 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot 100\right) 100}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 80} + \frac{\left(19\,522,64 + \frac{1}{2} \cdot 7,65 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot 300\right) 300}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 80} + \\ & + \frac{\left(-10\,293,76 + \frac{1}{2} \cdot 7,65 \cdot 10^{-3} \cdot 64 \cdot 600\right) 600}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 64} = -0,0241 + 0,0350 - 0,0453 = \\ & = -0,0344 \text{ cm}. \end{aligned}$$

APLICAȚIA 2

Să se calculeze eforturile unitare normale în bara din figura 20.9, a solicitată axial de o forță $P=200$ daN, având diametrul $d=5$ mm.

Rezolvare

Ecuția de proiecții pe orizontală este

$$R_1 + R_2 - P = 0. \quad (20.13)$$

Sistemul este simplu static nedeterminat.

Condiția de deformație se scrie :

$$\frac{R_1 \cdot 2l}{E \cdot A_1} + \frac{R_1 \cdot l}{E \cdot A_2} = \frac{R_2 \cdot l}{E \cdot A_2}, \quad (20.14)$$

unde

$$A_1 = \frac{\pi d^2}{4} = 19,62 \text{ mm}^2;$$

$$A_2 = \frac{\pi (1,4d)^2}{4} = 38,47 \text{ mm}^2.$$

Ecuția (20.14) devine, după simplificări,

$$R_2 = 4,92 R_1,$$

deci reacțiunile au valorile :

$$R_1 = \frac{P}{5,92} = \frac{200}{5,92} = 33,78 \text{ daN}; \quad R_2 = 4,92 R_1 = 166,22 \text{ daN}.$$

Diagrama forțelor axiale este dată în figura 20.9, b.

Eforturile unitare sînt :

$$\sigma_{13} = \frac{N_{13}}{A_1} = \frac{33,78}{0,1962} = 172 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}; \quad \sigma_{34} = \frac{N_{34}}{A_2} = \frac{33,78}{0,3847} = 87,8 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2},$$

$$\sigma_{42} = \frac{N_{42}}{A_2} = -\frac{166,22}{0,3847} = -432 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} = \sigma_{\max}.$$

APLICAȚIA 3

O bară, formată dintr-o tijă de oțel introdusă într-un manșon din fontă, este comprimată axial cu o forță de 6 000 daN (fig. 20.10). Cunoșcînd lungimea barei $l=20$ cm, aria secțiunii transversale a tijei $A_{OL}=2$ cm², aria secțiunii manșonului $A_{Fc}=8$ cm² și modulele de elasticitate $E_{OL}=2,1 \cdot 10^6$ daN/cm² și $E_{Fc}=1,2 \cdot 10^6$ daN/cm², să se calculeze eforturile unitare care apar în tijă, respectiv manșon, lungirea totală Δl și fracțiunile din efortul N preluate de tijă, respectiv manșon.

Rezolvare

Eforturile unitare se determină cu relațiile stabilite la § 20.3.2. :

$$\sigma_{OL} = \frac{N}{A_{OL} + \frac{E_{Fc}}{E_{OL}} A_{Fc}} = \frac{6\,000}{2 + \frac{1,2}{2,1} \cdot 8} = 913,04 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2};$$

$$\sigma_{Fc} = \frac{N}{A_{Fc} + \frac{E_{OL}}{E_{Fc}} A_{OL}} = \frac{6\,000}{8 + \frac{2,1}{1,2} \cdot 2} = 521,74 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

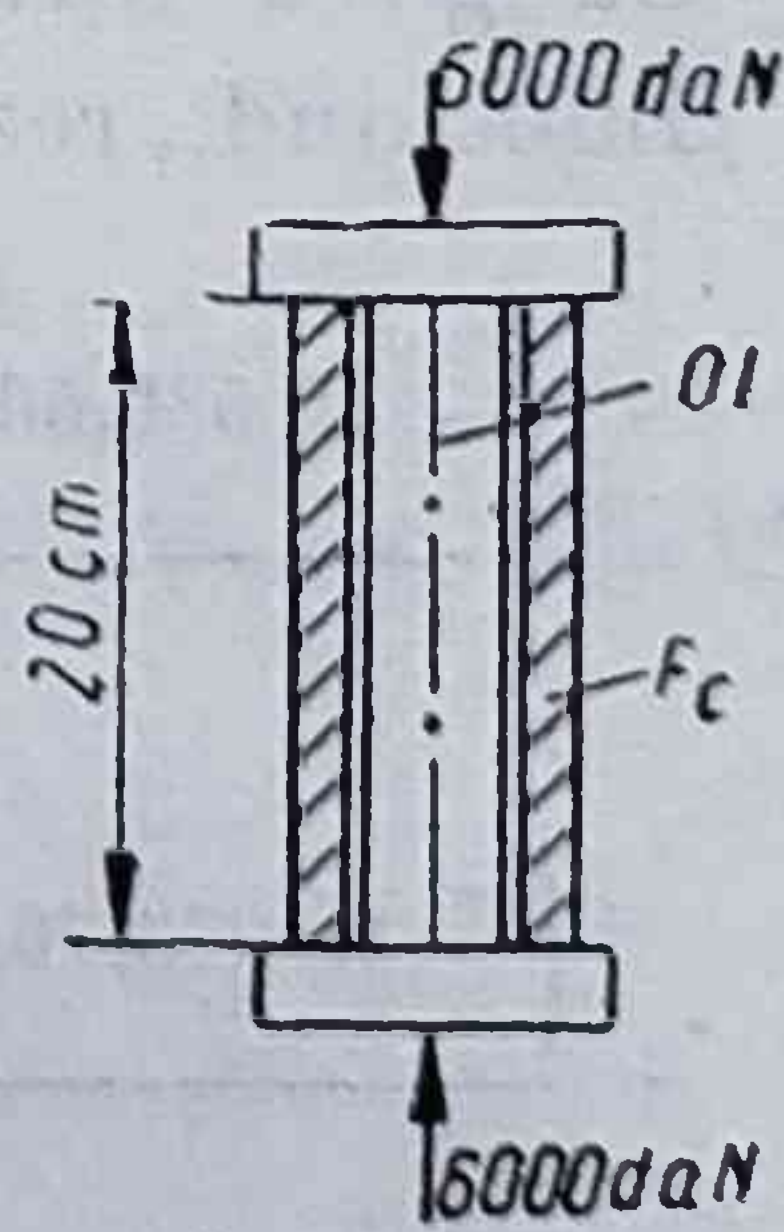


Fig. 20.10

Lungirea totală are expresia :

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E_{OL} \cdot A_{OL} + E_{Fc} \cdot A_{Fc}} = \frac{-6000 \cdot 20}{2,1 \cdot 10^9 \cdot 2 + 1,2 \cdot 10^8 \cdot 8} = -0,00869 \text{ cm.}$$

Eforturile preluate de cele două piese sînt :

$$N_{OL} = \sigma_{OL} \cdot A_{OL} = 913,04 \cdot 2 = 1826,08 \text{ daN,}$$

$$N_{Fc} = \sigma_{Fc} \cdot A_{Fc} = 521,74 \cdot 8 = 4173,92 \text{ daN.}$$

Evident că $N_{OL} + N_{Fc} = 6000 \text{ daN.}$

APLICAȚIA 4

O bară din cupru, avînd lungimea $l = 180 \text{ cm}$, este încastrată la extremitatea 1, iar extremitatea 2 se poate deplasa liber 2 mm pe orizontală, după care deplasarea este împiedicată (fig. 20.11). Cunoscînd coeficientul de dilatare termică liniară al cuprului $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}$ și modulul de elasticitate longitudinal $E = 1,3 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$, să se determine efortul unitar care apare în bară la o creștere a temperaturii de 80°C .

Rezolvare

Se determină întîi variația de temperatură Δt_1 pentru care bară se dilată liber cei 2 mm :

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta l}{\alpha \cdot l} = \frac{0,2}{17 \cdot 10^{-6} \cdot 180} = 65,3^\circ\text{C.}$$

La încălzirea în continuare a barei cu $\Delta t_2 = 80 - 65,3 = 14,7^\circ\text{C}$, dilatarea este împiedicată, în bară apărînd următorul efort unitar :

$$\sigma = E \cdot \alpha \cdot \Delta t_2 = 1,3 \cdot 10^6 \cdot 17 \cdot 10^{-6} \cdot 14,7 = 324,87 \text{ daN/cm}^2.$$

APLICAȚIA 5

Ansamblul din figura 20.12 este compus din trei bare avînd fiecare secțiunea transversală A , modulele de elasticitate $E_2 > E_1$ și coeficienții de dilatare liniară $\alpha_1 > \alpha_2$. Sub acțiunea forței P , în bare apar eforturi unitare de compresiune neegale. Se cere să se calculeze creșterea temperaturii Δt prin care se realizează egalizarea eforturilor unitare în bare.

Rezolvare

Etapa I. Fie P_1 și P_2 forțele în barele 1 și, respectiv, în bara 2. Condiția de echivalență a forțelor se scrie :

$$P = P_1 + P_2 = 2A \cdot \sigma_1 + A \cdot \sigma_2.$$

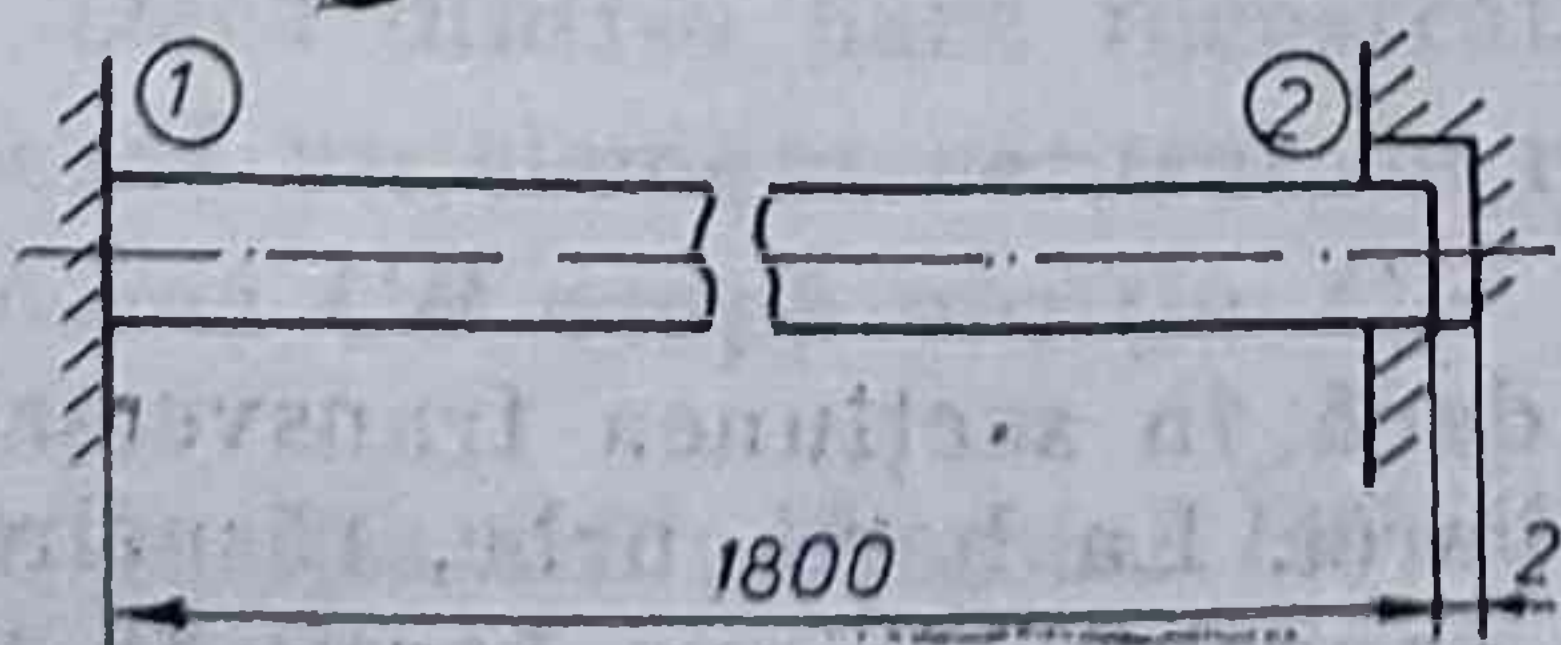


Fig. 20.11

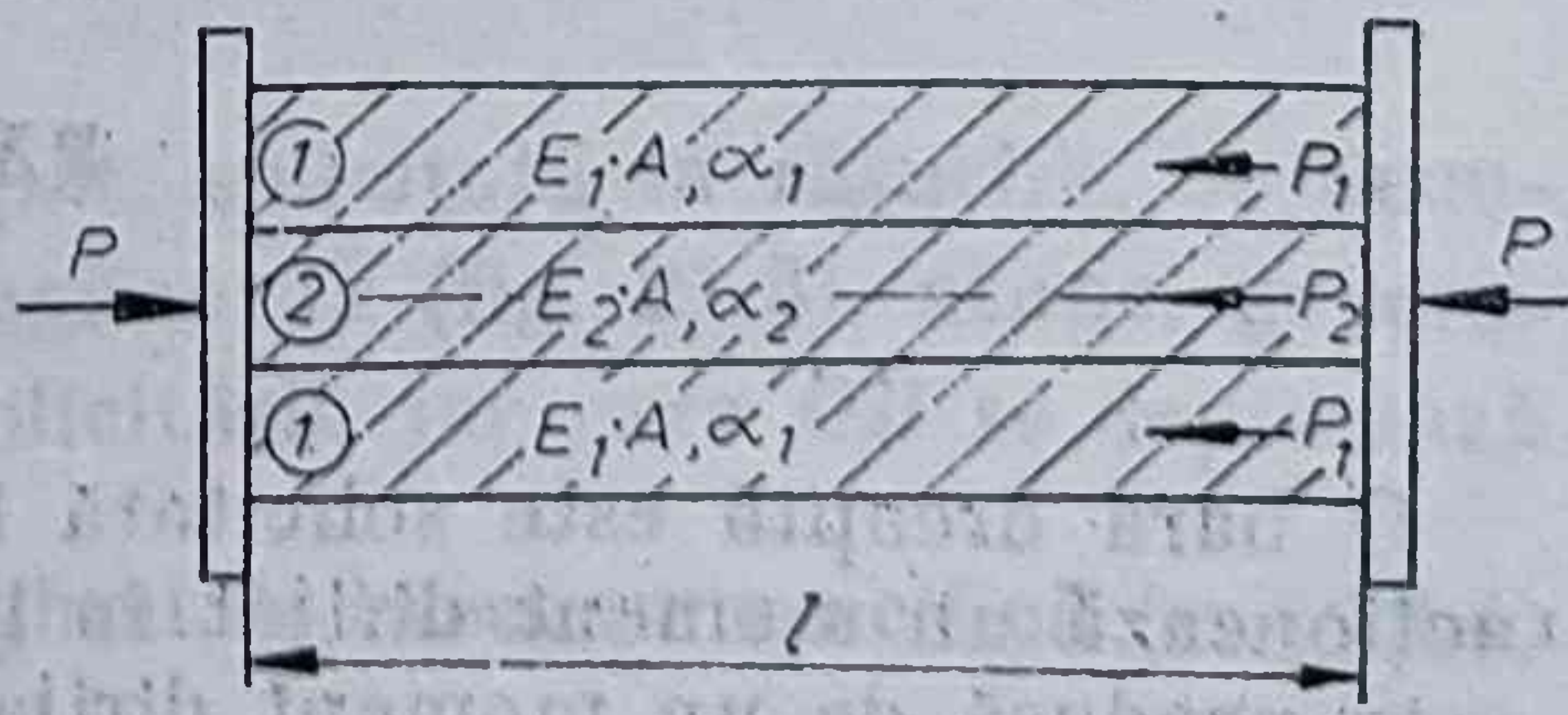


Fig. 20.12

Rezultă

$$2\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{P}{A},$$

iar din condiția de deformăție $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$; $\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2}$,

$$\sigma_2 = \frac{E_2}{E_1} \sigma_1.$$

Se obține $\sigma_1 = \frac{PE_1}{A(2E_1 + E_2)}$; $\sigma_2 = \frac{PE_2}{A(2E_1 + E_2)}$; $\sigma_1 < \sigma_2$.

Etapa a II-a. Condiția de deformăție în cazul dilatării împiedicate:

$$l \cdot \alpha_1 \cdot \Delta t - \frac{N \cdot l}{E_1 \cdot 2A} = l \cdot \alpha_2 \cdot \Delta t + \frac{N \cdot l}{E_2 \cdot A};$$

se mai scrie

$$(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta t = \frac{\sigma_1^*}{E_1} + \frac{\sigma_2^*}{E_2}.$$

Se adaugă relația între forța axială și eforturile unitare:

$$|\sigma_1^* \cdot 2A| = \sigma_2^* \cdot A = N.$$

Rezultă

$$|\sigma_1^*| = \frac{\Delta t(\alpha_1 - \alpha_2)E_1 \cdot E_2}{2E_1 + E_2}; \quad \sigma_2^* = \frac{2\Delta t(\alpha_1 - \alpha_2)E_1 \cdot E_2}{2E_1 + E_2}.$$

Prin suprapunerea efectelor, suma eforturilor unitare în cele două stări trebuie să fie aceeași

$$\sigma_1 + \sigma_1^* = \sigma_2 - \sigma_2^*,$$

$$\frac{P \cdot E_1}{A(2E_1 + E_2)} + \frac{\Delta t(\alpha_1 - \alpha_2)E_1 \cdot E_2}{2E_1 + E_2} = \frac{P \cdot E_2}{A(2E_1 + E_2)} - \frac{2\Delta t(\alpha_1 - \alpha_2)E_1 \cdot E_2}{2E_1 + E_2}.$$

Rezultă:

$$\Delta t = \frac{P(E_2 - E_1)}{3A(\alpha_1 - \alpha_2)E_1 \cdot E_2}.$$

21.

RĂSUCIREA

O bară dreaptă este solicitată la răsucire dacă în secțiunea transversală acționează un moment dirijat în lungul axei barei. La bare curbe, răsucirea este produsă de un moment dirijat în lungul tangentei la axa barei. Se va studia răsucirea barelor de secțiune axial-simetrică.

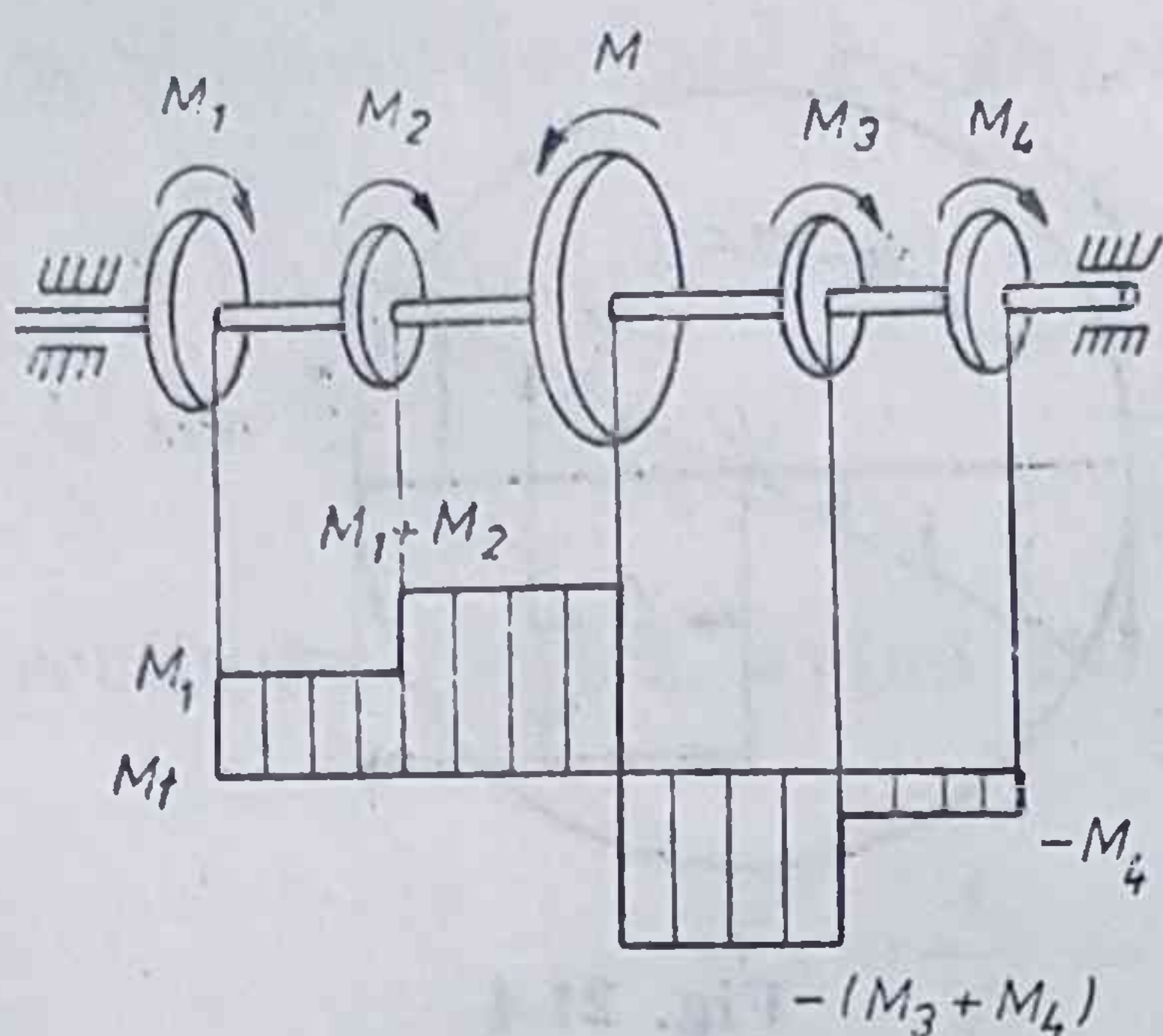


Fig. 21.1

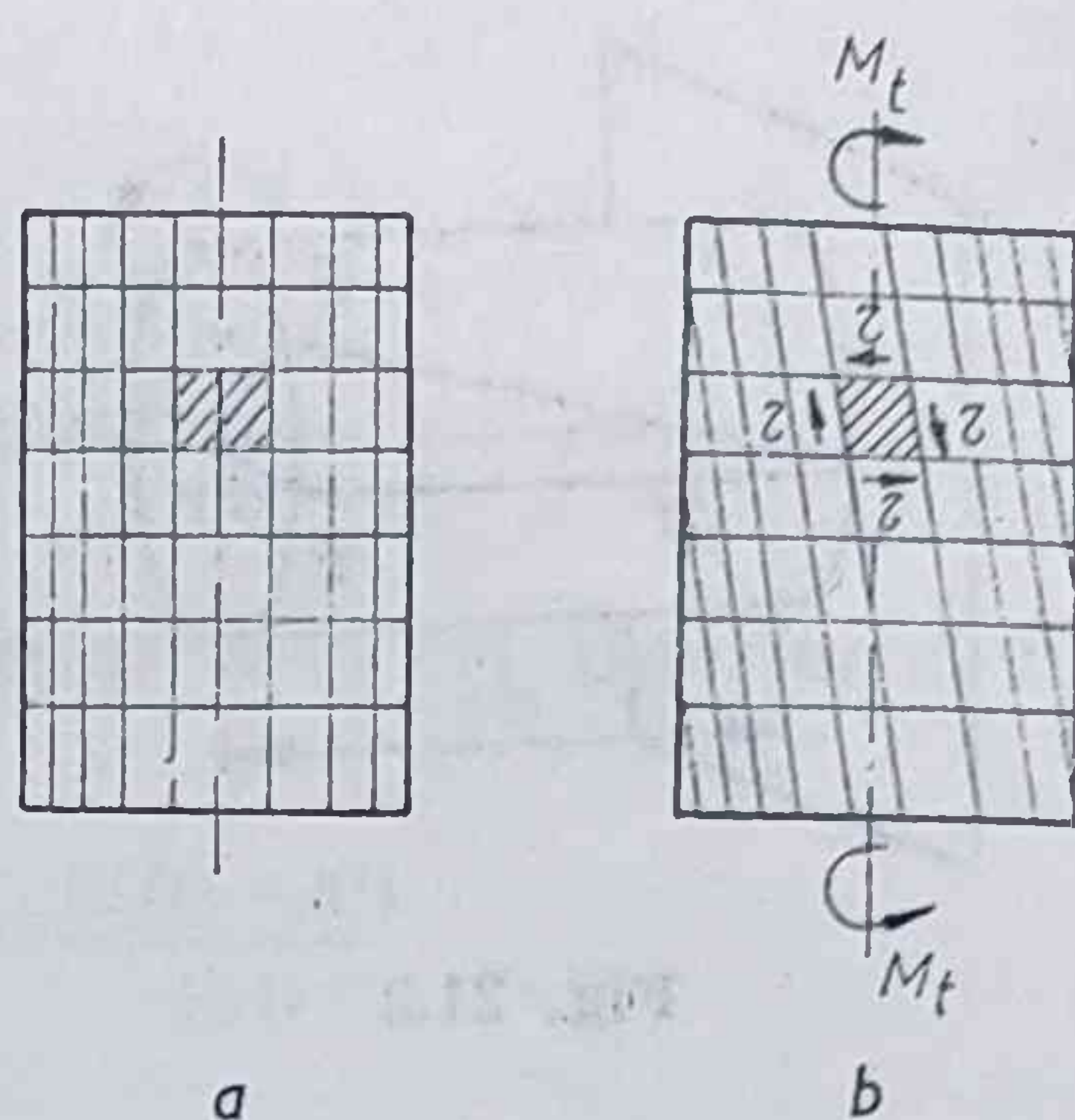


Fig. 21.2

21.1. CALCULUL MOMENTULUI DE RĂSUCIRE

Atunci cînd asupra unei bare acționează mai multe cupluri exterioare, cu componente (sau dirijate) în lungul axei barei, este necesară construcția unei diagrame de momente de răsucire (fig. 21.1).

Dacă un arbore transmite puterea N (CP) la turația n (rot/min), momentul de răsucire se calculează cu relația :

$$M_t = 70\,258 \frac{N}{n} \text{ [daN}\cdot\text{cm]}.$$

Dacă se cunoaște puterea P (kW) și turația n (rot/min), atunci :

$$M_t = 95\,493 \frac{P}{n} \text{ [daN}\cdot\text{cm]}.$$

21.2. EFORTURI UNITARE ÎN BARE DE SECȚIUNE AXIAL-SIMETRICĂ

Se constată că dacă pe suprafața cilindrică a unei bare se trasează generatoare și cercuri paralele, formînd o rețea de pătrate curbilinii (fig. 21.2, a), după solicitarea barei la răsucire (fig. 21.2, b) pătratele devin romburi, lungimea laturilor rămînînd neschimbată. De asemenea, secțiunile transversale rămîn plane.

Se deduce că un element de bară decupat în vecinătatea suprafeței este solicitat numai de eforturi unitare tangențiale, altfel eforturile unitare normale ar fi produs lungirea laturilor.

Dacă dintr-o bară încastrată la un capăt, solicitată la răsucire, se decupează un element central de rază r și lungime dx (fig. 21.3), atunci generatoarea CB ocupă poziția CB' în urma solicitării, iar raza OB se deplasează

în poziția OB' . Unghiul $\widehat{BCB'} = \gamma$ este unghiul de lunecare specifică (v. § 18.4)

iar $\widehat{BOB'} = d\varphi$.

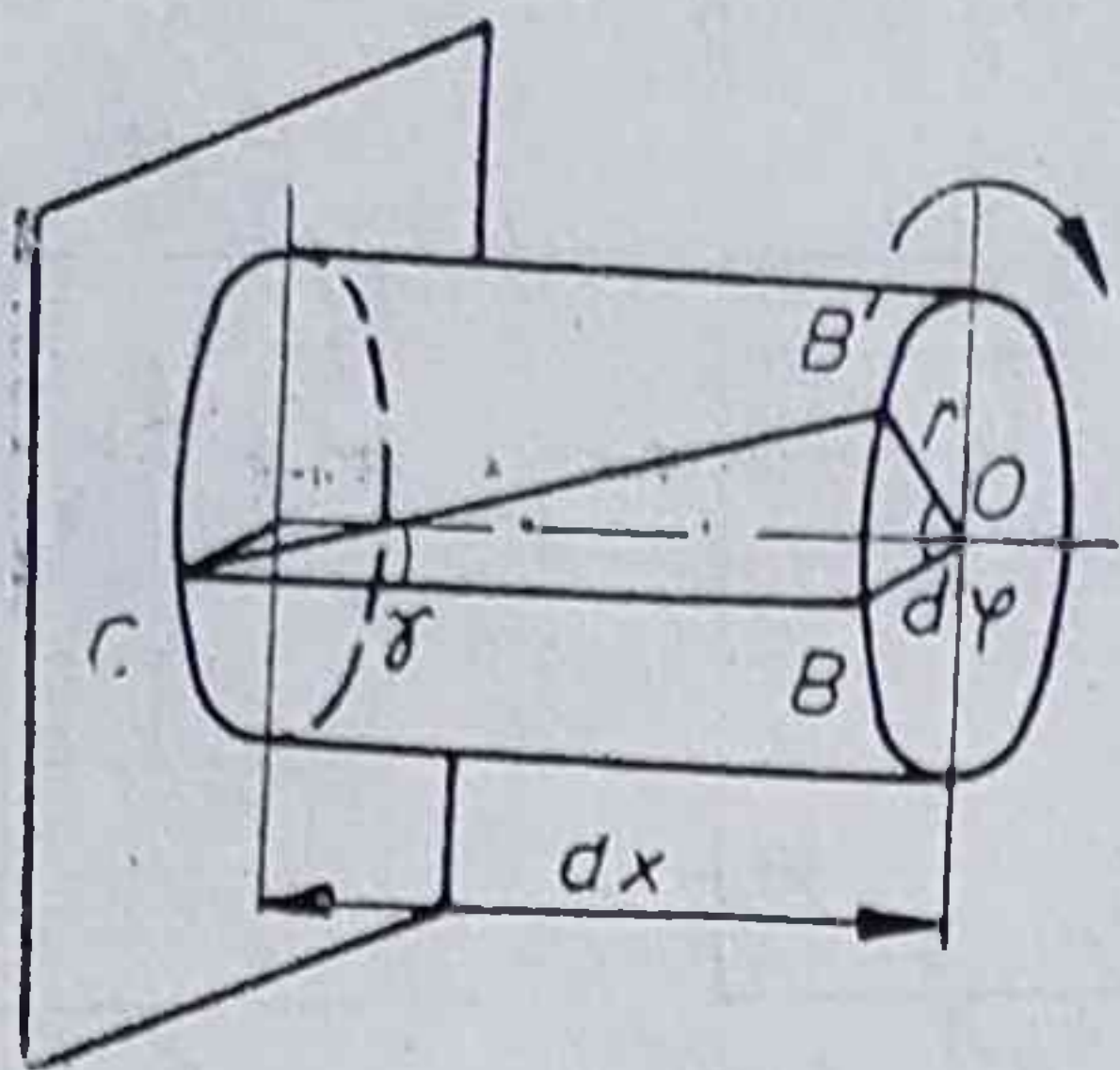


Fig. 21.3

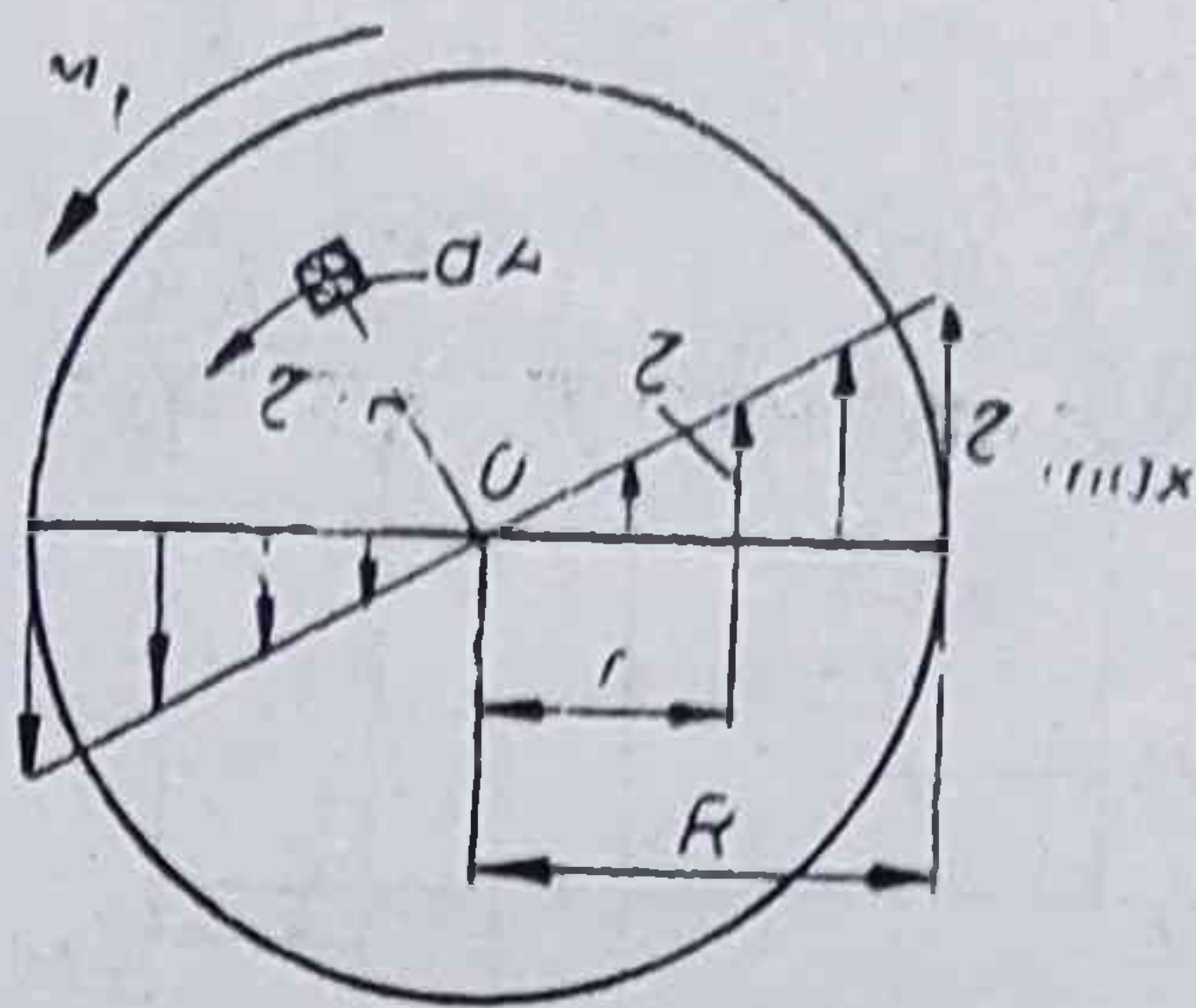


Fig. 21.4

Se constată că

$$\widehat{BB'} = \gamma \cdot dx = r \cdot d\phi,$$

deci :

$$\gamma = r \frac{d\phi}{dx} = r \cdot \theta,$$

unde :

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} \quad (21.1)$$

se numește *unghi de răsucire specifică*.

Aplicînd legea lui Hooke (18.14) pentru forfecare, rezultă

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \theta \cdot r, \quad (21.2)$$

deci eforturile unitare tangențiale variază liniar cu distanța la centrul secțiunii. Se consideră că acestea sînt perpendiculare pe rază (fig. 21.4), ceea ce pe contur se deduce direct, pe baza dualității eforturilor unitare tangențiale (v. § 22.3.1).

Pentru a stabili legătura între momentul de răsucire M_t și eforturile unitare τ , se calculează suma momentelor elementare $\tau \cdot dA \cdot r$ față de punctul O (fig. 21.4) :

$$M_t = \int_A r \cdot \tau \cdot dA = G \cdot \theta \int_A r^2 \cdot dA = G \cdot \theta \cdot I_p,$$

unde $I_p = \int_A r^2 \cdot dA$ este momentul de inerție polar al secțiunii transversale.

Rezultă expresia unghiului de răsucire specifică

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \quad (21.3)$$

care, înlocuit în (21.2), duce la relația căutată :

$$\tau = \frac{M_t \cdot r}{I_p} \quad (21.4)$$

Efortul unitar tangențial maxim este

$$\tau_{max} = \frac{M_t \cdot r_{max}}{I_p} = \frac{M_t}{\frac{I_p}{r_{max}}} = \frac{M_t}{W_p}, \quad (21.5)$$

iar

$$W_p = \frac{I_p}{r_{max}} \quad (21.6)$$

este *modulul de rezistență polar al secțiunii transversale*.

La secțiunea circulară cu diametrul d rezultă

$$W_p = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi \cdot d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}. \quad (21.7)$$

La secțiunea inelară, avînd diametrul exterior D și cel interior d , rezultă :

$$W_p = \frac{I_p}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}. \quad (21.8)$$

Relația (21.5) este utilizată sub următoarele trei forme :

— formula de dimensionare : $W_{p_{nec}} = \frac{M_t}{\tau_a}; \quad (21.9, a)$

— formula de verificare : $\tau_{ef} = \frac{M_t}{W_p} \leq \tau_a; \quad (21.9, b)$

— formula momentului de răsucire capabil : $M_{t_{cap}} = W_p \cdot \tau_a. \quad (21.9, c)$

În relațiile (21.9), τ_a este rezistența admisibilă la răsucire.

21.3. DEFORMAȚII LA RĂSUCIRE

Din relațiile (21.2) și (21.3) rezultă unghiul de răsucire pentru un element de bară de lungime dx :

$$d\varphi = \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_p}, \quad (21.10)$$

unde $G \cdot I_p$ este *modulul de rigiditate la răsucire*.

Pentru o bară de lungime l ,

$$\Delta\varphi = \int_0^l \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_p}.$$

Dacă bara are secțiune constantă și $M_t = \text{const.}$ pe toată lungimea, atunci :

$$\Delta\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p}. \quad (21.11)$$

Uneori se impune o valoare admisibilă θ_a a unghiului de răsucire specifică, astfel că din relația (21.3) rezultă o formulă de dimensionare

$$I_{p_{nec}} = \frac{M_t}{G \cdot \theta_a}. \quad (21.12)$$

21.4. ENERGIA DE DEFORMAȚIE LA RĂSUCIRE

Pentru un element de bară de lungime dx , lucrul mecanic efectuat de cuplul M_t , a cărui valoare crește liniar cu rotirea $d\varphi$ este $\frac{1}{2} M_t d\varphi$. Lucrul mecanic total, înmagazinat de toată bara sub formă de energie potențială de deformație, este :

$$W = \int_l \frac{1}{2} M_t \cdot d\varphi = \int_l \frac{M_t^2 \cdot dx}{2G \cdot I_p}. \quad (21.13)$$

21.5. CALCULUL ARCURILOR CILINDRICE ELICOIDALE

Arcul cilindric elicoidal poate fi considerat o bară curbă în spațiu. Dacă înclinarea spirelor este mare (fig. 21.5, a), forța P , redusă în centrul de greutate al secțiunii transversale (fig. 21.5, b), produce toate cele patru solicitări simple: compresiune, forfecare, încovoiere și răsucire (fig. 21.5, c).

La arcurile cu spire strânse, la care înclinarea elicei este foarte mică, forța axială și momentul încovoietor se pot neglija, rămânând forța tăietoare $T = P$ și momentul de răsucire $M_t = P \cdot R$.

La arcuri cu rază mare de înfășurare, în comparație cu diametrul sîrmei, efectul forfecării este neglijabil, solicitarea principală fiind răsucirea.

Din formula de dimensionare la răsucire (21.9, a), în cazul secțiunii circulare, rezultă:

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{P \cdot R}{\tau_a},$$

deci
$$d = \sqrt[3]{\frac{16 P \cdot R}{\pi \cdot \tau_a}}, \quad (21.14)$$

relație cu care se calculează diametrul sîrmei arcului.

Numărul de spire n se calculează pe baza formulei săgeții arcului. Aceasta se deduce ușor, egalînd lucrul mecanic produs de forța P cînd arcul se comprimă cu săgeata f , cu energia de deformare la răsucire

$$\frac{1}{2} P \cdot f = \int_l \frac{M_t^2 \cdot dx}{2G \cdot I_p} = \frac{M_t^2 \cdot l}{2G \cdot I_p},$$

unde $M_t = P \cdot R$; $l = 2\pi \cdot R \cdot n$; $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$.

Rezultă săgeata arcului:

$$f = \frac{64 P \cdot R^3 \cdot n}{G \cdot d^4}. \quad (21.15)$$

Relația (21.15) se mai scrie sub forma

$$P = \frac{G \cdot d^4}{64 R^3 \cdot n} f = k \cdot f, \quad (21.16)$$

unde k este constanta elastică a arcului. Reprezentarea grafică a relației (21.16) se numește *caracteristica arcului* (fig. 21.6).

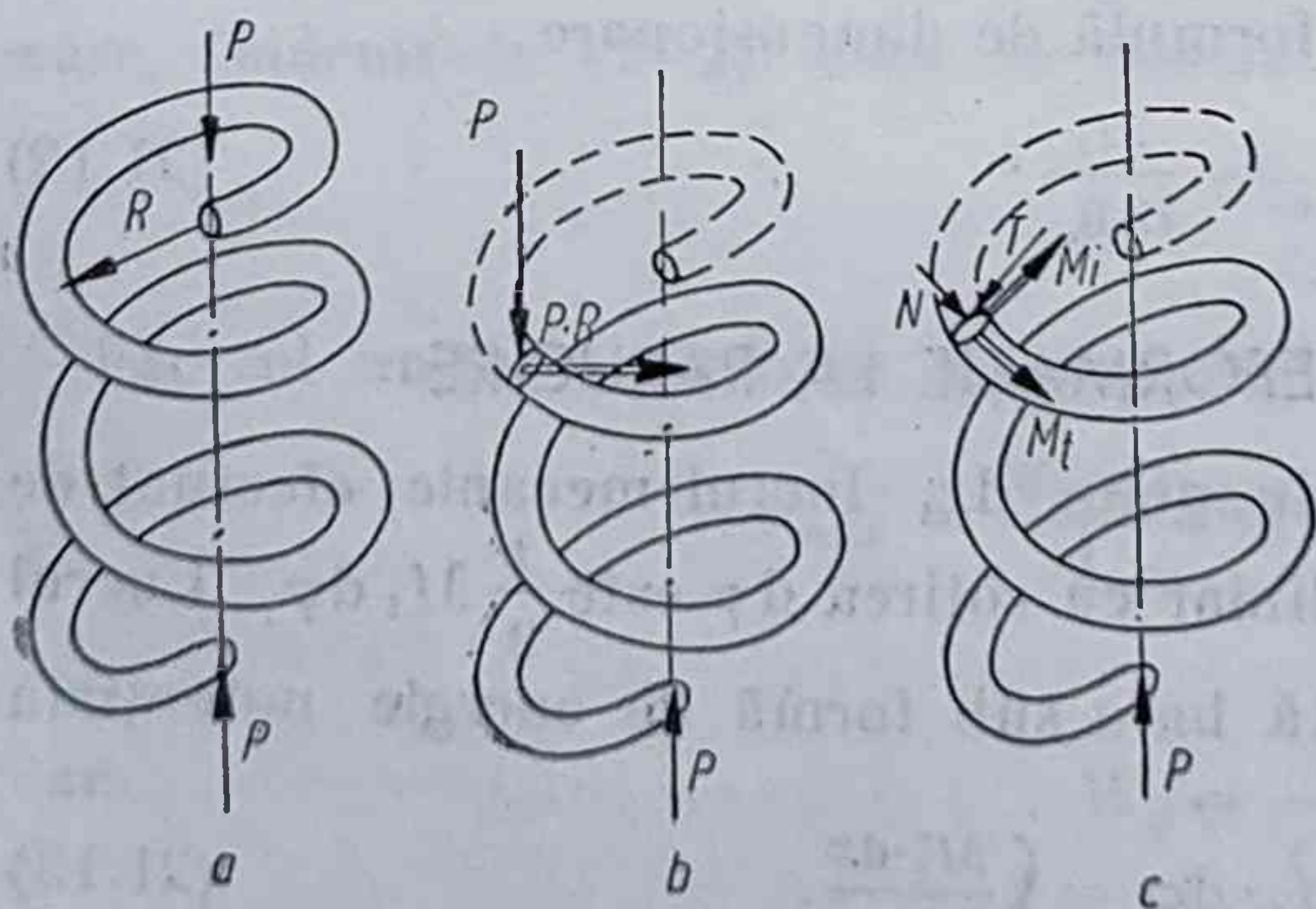


Fig. 21.5

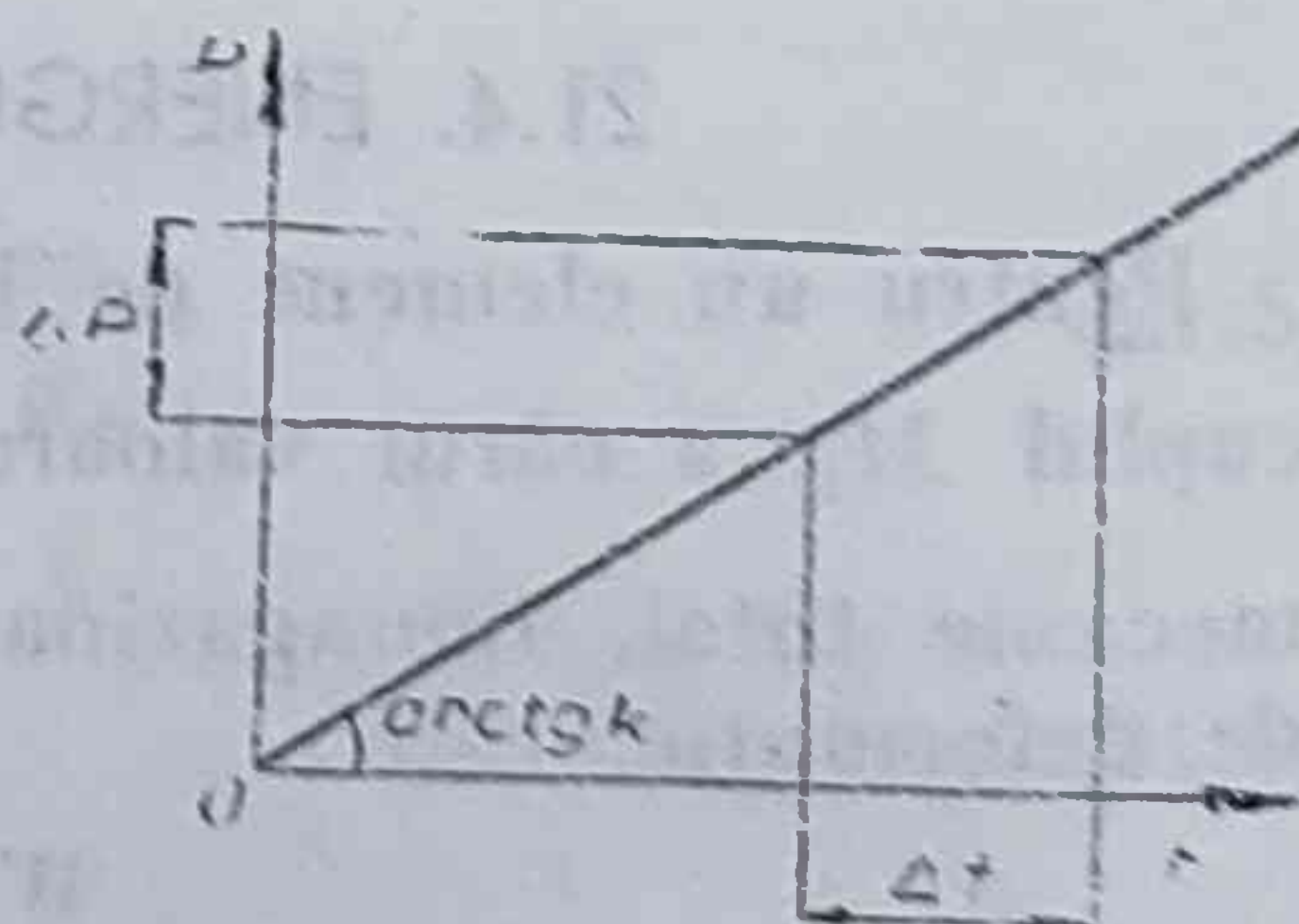


Fig. 21.6

Dacă se impune valoarea constantei elastice

$$k = \frac{\Delta P}{\Delta f},$$

din relația (21.16) rezultă numărul de spire :

$$n = \frac{G \cdot d^4}{64 R^3 \cdot k}.$$

Pentru oțelurile de arcuri, $\tau_a = 4\,000 - 6\,000 \text{ daN/cm}^2$ și $G = 8,5 \cdot 10^5 \text{ daN/cm}^2$.

21.6. RĂSUCIREA BARELOR CU SECȚIUNE DREPTUNGHIIULARĂ

Studiul răsucirii barelor de secțiune dreptunghiulară se face în cadrul teoriei elasticității, deoarece în acest caz ipoteza lui Bernoulli nu mai este valabilă, secțiunile barelor se deplasează.

În figura 21.7 se arată distribuția eforturilor unitare tangențiale la o secțiune dreptunghiulară. Efortul unitar tangențial maxim se produce la mijlocul laturii mari a dreptunghiului

$$\tau_{max} = \tau_{yx\,max} = \frac{M_t}{\alpha \cdot h \cdot b^2}.$$

La mijlocul laturii mici

$$\tau_{zx\,max} = \gamma \cdot \tau_{yx\,max}.$$

Unghiul de răsucire specifică se calculează cu relația

$$\theta = \frac{M_t}{\beta \cdot h \cdot b^3 \cdot G}.$$

Valorile coeficienților α , β și γ sînt date în tabelul 21.1.

Tabelul 21.1

$\frac{h}{b}$	1	1,5	2	2,5	3	10	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,258	0,267	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,249	0,263	0,313	0,333
γ	1	0,859	0,795	0,766	0,753	0,742	0,742

În general, pentru secțiuni oarecare se pot utiliza relații generalizate de forma :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_a} \text{ și } \theta = \frac{M_t}{G \cdot I_a},$$

unde W_a este modulul de rezistență la răsucire, iar I_a — momentul de inerție la răsucire al secțiunii. Valorile acestora se dau în manuale de specialitate.

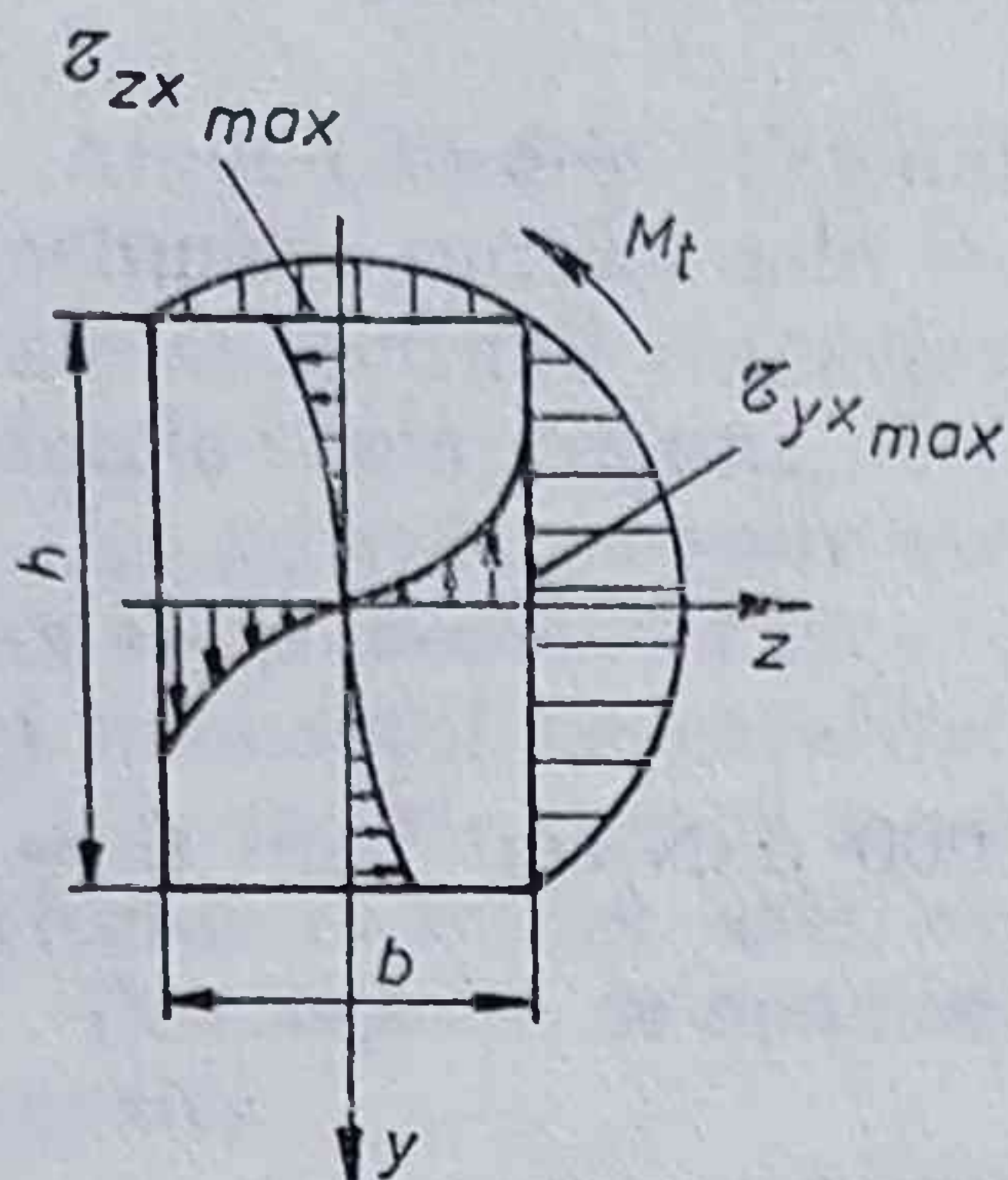


Fig. 21.7

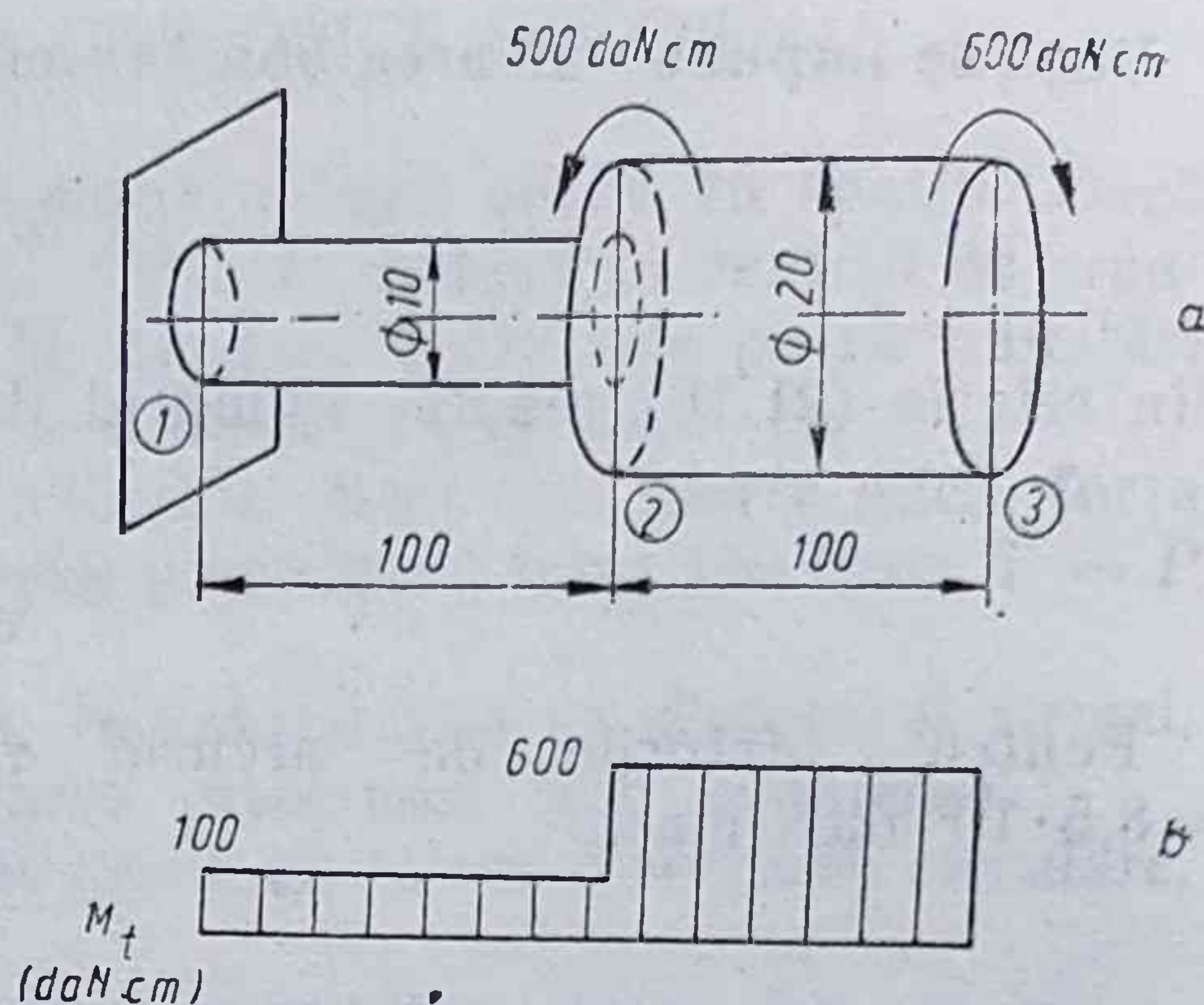


Fig. 21.8

APLICAȚIA 1

Se cere să se calculeze efortul unitar tangențial maxim în bara din figura 21.8, a, precum și rotirea secțiunii 3 față de încastrare. Se dă $G = 8,1 \cdot 10^5 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare

Se calculează modulele de rezistență polare :

$$W_{p_{12}} = \frac{\pi \cdot 1^3}{16} = 0,196 \text{ cm}^3, \quad W_{p_{23}} = \frac{\pi \cdot 2^3}{16} = 1,57 \text{ cm}^3$$

și se construiește diagrama momentelor de răsucire (fig. 21.8, b).

Eforturile unitare tangențiale pe contur sînt :

$$\tau_{12} = \frac{M_{t_{12}}}{W_{p_{12}}} = \frac{100}{0,196} = 509 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} = \tau_{max},$$

$$\tau_{23} = \frac{M_{t_{23}}}{W_{p_{23}}} = \frac{600}{1,57} = 382 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

Se calculează momentele de inerție polare

$$I_{p_{12}} = \frac{\pi \cdot 1^4}{32} = 0,098 \text{ cm}^4; \quad I_{p_{23}} = \frac{\pi \cdot 2^4}{32} = 1,57 \text{ cm}^4,$$

apoi unghiul de rotire

$$\Delta \varphi_{31} = \frac{M_{t_{12}} \cdot l_{12}}{G \cdot I_{p_{12}}} + \frac{M_{t_{23}} \cdot l_{23}}{G \cdot I_{p_{23}}} = \frac{100 \cdot 10}{8,1 \cdot 10^5 \cdot 0,098} + \frac{600 \cdot 10}{8,1 \cdot 10^5 \cdot 1,57} = 0,0173 \text{ rad.}$$

APLICAȚIA 2

Un arbore este antrenat cu o putere de $N = 200 \text{ kW}$ la o turație $n = 600 \text{ rot/min}$, și transmite puterile $N_1 = 120 \text{ kW}$ și respectiv $N_2 = 80 \text{ kW}$ unor consumatori (fig. 21.9, a). Să se dimensioneze arborele din oțel cu $\tau_a = 400 \text{ daN/cm}^2$ și $G = 8,1 \cdot 10^5 \text{ daN/cm}^2$, să se calculeze rotirea relativă a secțiunii 2 față de secțiunea 0 și să se verifice unghiul de răsucire specifică știind că $\theta_a = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm}$.

Rezolvare

Se trasează diagrama puterilor (fig. 21.9, b) și se calculează momentele de răsucire corespunzătoare intervalelor 0-1 și 1-2:

$$M_{t_{01}} = 95\,493 \frac{N_{01}}{n} = 95\,493 \frac{200}{600} = 31\,831 \text{ daN}\cdot\text{cm},$$

$$M_{t_{12}} = 95\,493 \frac{N_{12}}{n} = 95\,493 \frac{80}{600} = 12\,732,4 \text{ daN}\cdot\text{cm}.$$

Se poate trasa și diagrama M_t (fig. 21.9, c).

Din relațiile (21.7) și (21.9, a) rezultă, pentru diametrele arborelui:

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16 M_{t_{01}}}{\pi \cdot \tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 31\,831}{\pi \cdot 400}} = 7,4 \text{ cm},$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{16 M_{t_{12}}}{\pi \cdot \tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 12\,732,4}{\pi \cdot 400}} = 5,45 \text{ cm}.$$

Se aleg pentru diametre valorile normalizate $d_1 = 7,5 \text{ cm}$ și $d_2 = 5,5 \text{ cm}$. Unghiul de rotire a secțiunii 2 față de secțiunea 0 are expresia:

$$\Delta\varphi_{20} = \frac{M_{t_{01}} \cdot l_{01}}{G \cdot I_{p_1}} + \frac{M_{t_{12}} \cdot l_{12}}{G \cdot I_{p_2}},$$

unde: $I_{p_1} = \frac{\pi 7,5^4}{32} = 310,47 \text{ cm}^4$; $I_{p_2} = \frac{\pi 5,5^4}{32} = 89,79 \text{ cm}^4$.

Rezultă:

$$\Delta\varphi_{20} = \frac{31\,831 \cdot 15}{8,1 \cdot 10^5 \cdot 310,47} + \frac{12\,732,4 \cdot 20}{8,1 \cdot 10^5 \cdot 89,79} = 0,0054 \text{ rad}.$$

Se calculează unghiurile de răsucire specifică pe cele două intervale, cu relația (21.3):

$$\theta_{01} = \frac{M_{t_{01}}}{G \cdot I_{p_1}} = \frac{31\,831}{8,1 \cdot 10^5 \cdot 310,47} = 1,265 \cdot 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{cm}} < \theta_a,$$

$$\theta_{12} = \frac{M_{t_{12}}}{G \cdot I_{p_2}} = \frac{12\,732,4}{8,1 \cdot 10^5 \cdot 89,79} = 1,75 \cdot 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{cm}} < \theta_a.$$

APLICAȚIA 3

Să se determine momentul de răsucire capabil pentru bara din figura 21.10, precum și rotirea secțiunii 3 față de încadrare. Bara este din oțel cu $\tau_a = 600 \text{ daN/cm}^2$ și $G = 8,1 \cdot 10^5 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare

Momentul de răsucire capabil are expresia

$$M_{t_{cap}} = W_{d_{min}} \cdot \tau_a.$$

Pentru secțiunea circulară:

$$W_d = W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 2^3}{16} = 1,57 \text{ cm}^3,$$

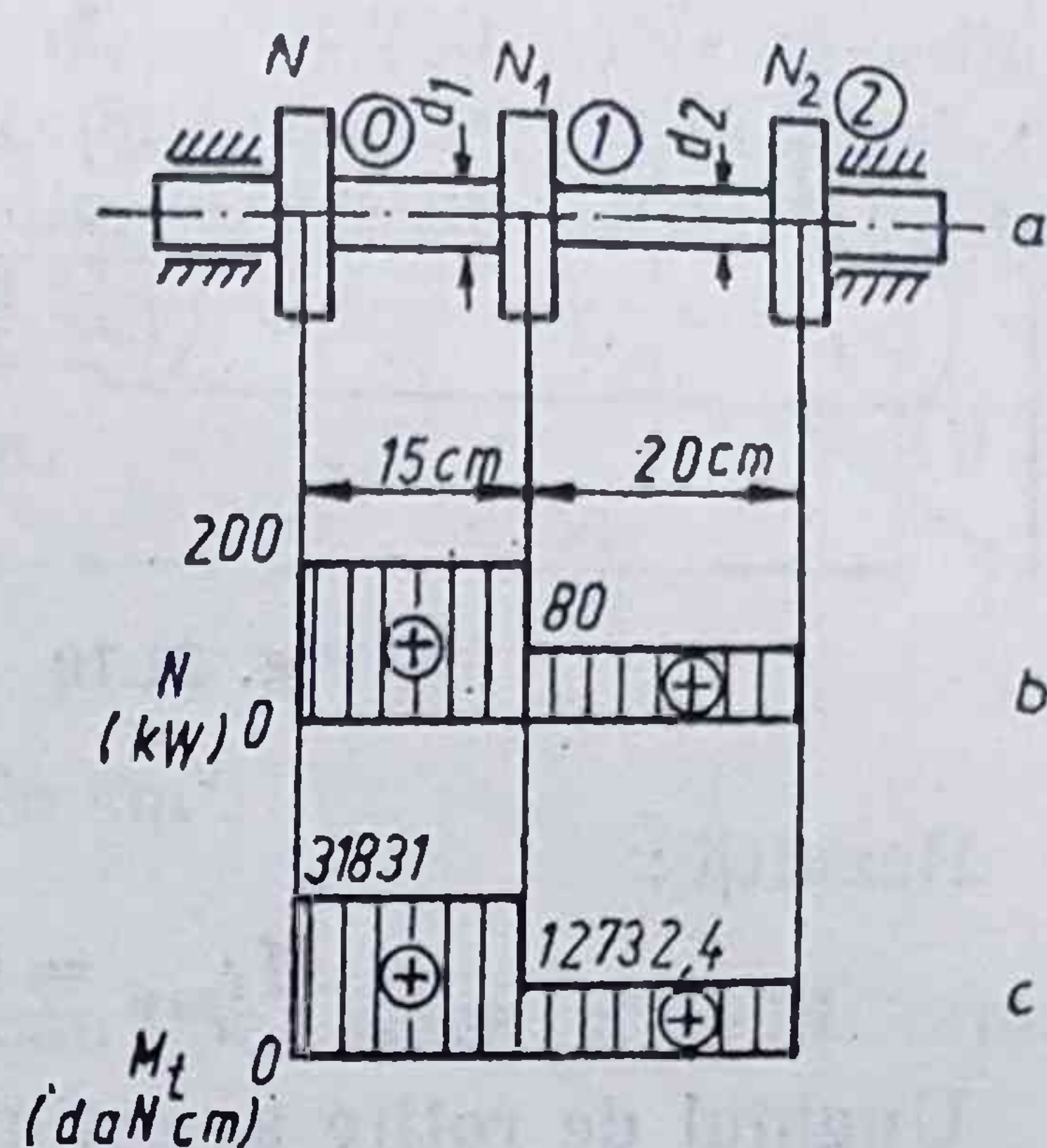


Fig. 21.9

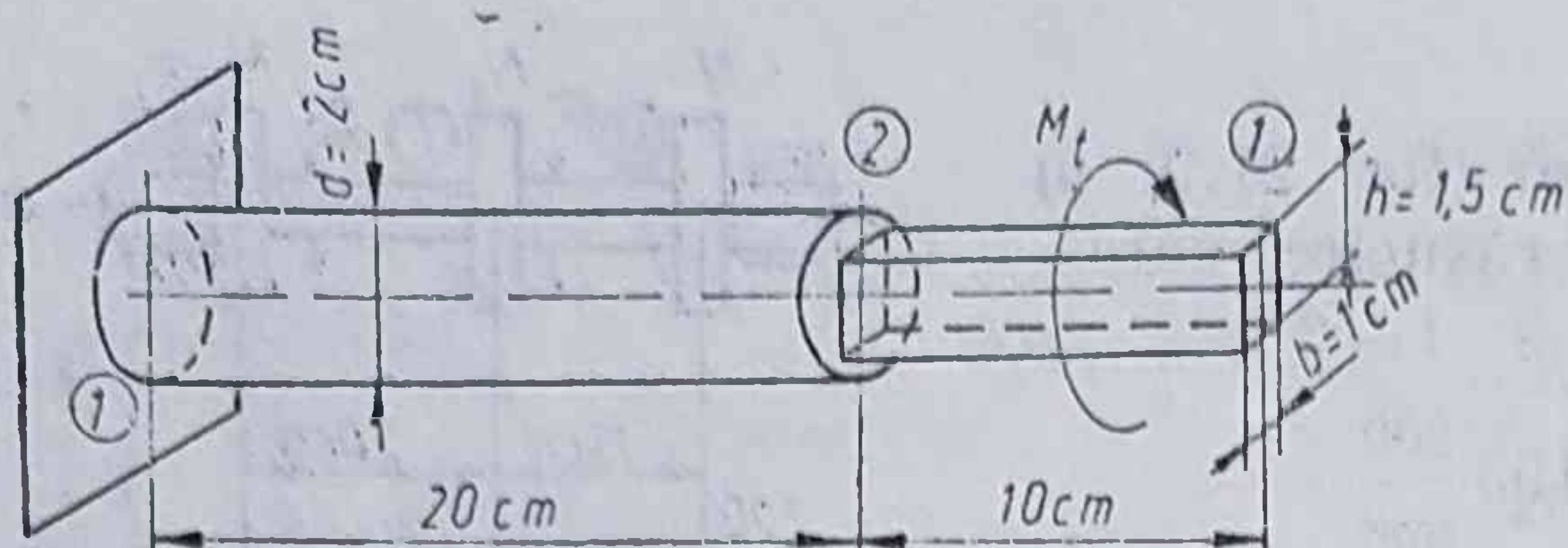


Fig. 21.10

Rezultă :

$$M_{t_{cap}} = 0,3465 \cdot 600 = 207,9 \text{ daN} \cdot \text{cm}.$$

Unghiul de rotire a secțiunii 3 față de încastrarea 1 are expresia :

$$\Delta \varphi_{31} = \frac{M_t \cdot l_{12}}{G \cdot I_p} + \frac{M_t \cdot l_{23}}{G \cdot I_a};$$

$$\text{unde } I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 2^4}{32} = 1,57 \text{ cm}^4,$$

$$I_a = \beta \cdot h \cdot b^3 = 0,196 \cdot 1,5 \cdot 1^3 = 0,294 \text{ cm}^4,$$

$$\text{pentru } \frac{h}{b} = 1,5, \quad \beta = 0,196 \text{ (tab. 21.1).}$$

Rezultă :

$$\Delta \varphi_{31} = \frac{207,9 \cdot 20}{8,1 \cdot 10^5 \cdot 1,57} + \frac{207,9 \cdot 10}{8,1 \cdot 10^5 \cdot 0,294} = 0,012 \text{ rad}.$$

APLICAȚIA 4

Să se dimensioneze bara încastrată la capete din figura 21.11, *a* din oțel, cu secțiune circulară, cu $\tau_a = 500 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare

Ecuția de proiecție a momentelor pe axa barei se scrie :

$$M_1 + M_2 = 1500.$$

Sistemul este simplu static nedeterminat.

Problema se rezolvă prin suprapunerea efectelor.

Dacă acționează numai momentul din secțiunea 3, condiția de deformare

$$\Delta \varphi_{13} = \Delta \varphi_{32} \text{ se scrie } \frac{M_{13} \cdot l_{13}}{G \cdot I_p} = \frac{M_{32} \cdot l_{32}}{G \cdot I_p},$$

$$\text{sau } M_1' \cdot l = M_2' \cdot 3l.$$

Dar ecuația de echilibru este $M_1' + M_2' = 500$, deci $M_1' = 375 \text{ daN} \cdot \text{cm}$, $M_2' = -125 \text{ daN} \cdot \text{cm}$, valori cu care se construiește diagrama momentelor de răsucire din figura 21.11, *b*.

Similar, dacă acționează numai momentul din secțiunea 4, condiția de de-

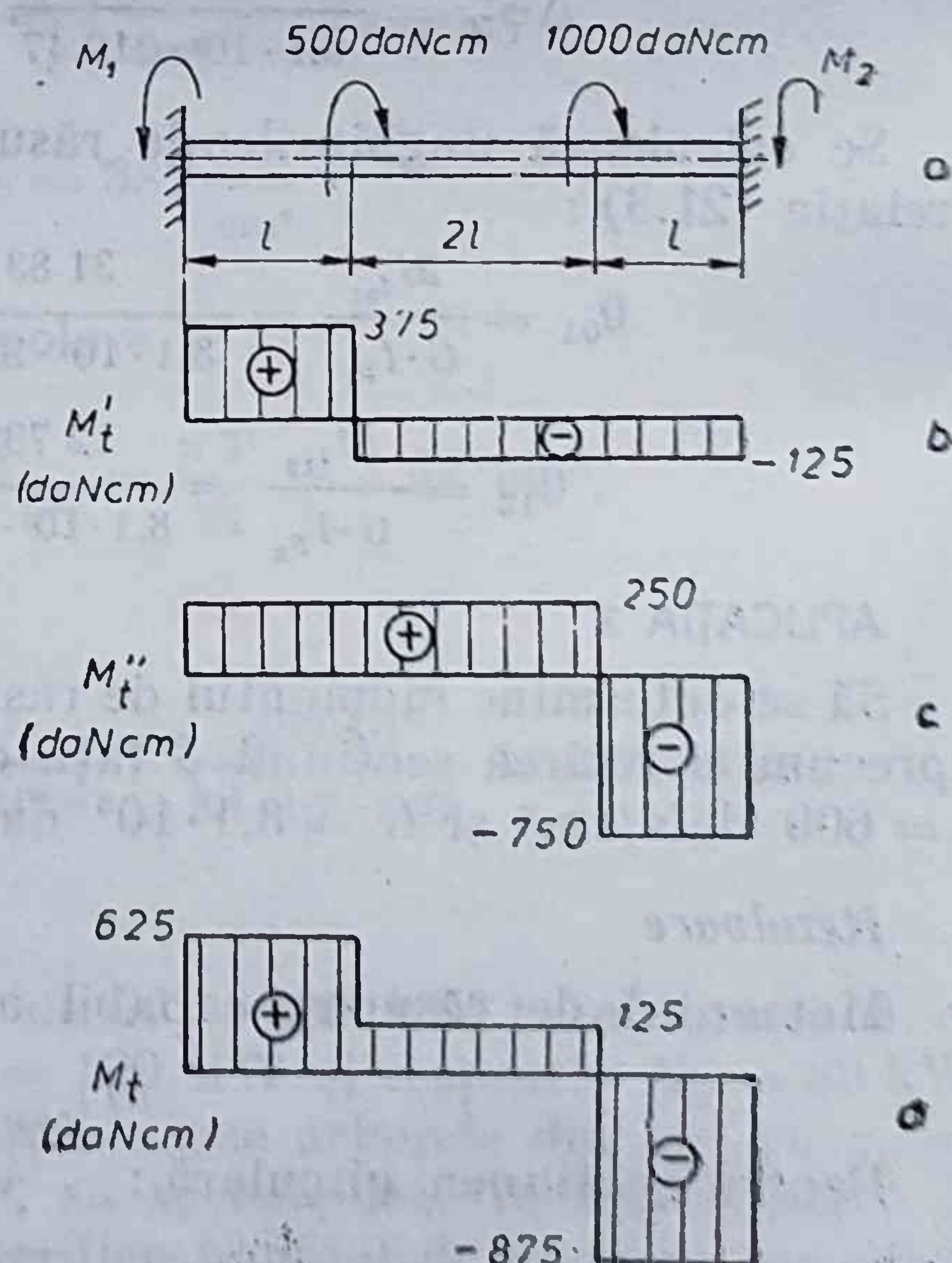


Fig. 21.11

formație $\Delta\varphi_{14} = \Delta\varphi_{12}$ sau $M_1'' \cdot 3l = M_2'' \cdot l$ și ecuația de echilibru $M_1'' + M_2'' = 1\,000$ conduc la $M_1'' = 250$ daN·cm ; $M_2'' = -750$ daN·cm ; diagrama corespunzătoare a momentelor de răsucire este trasată în figura 21.11, c.

În cazul acțiunii simultane a celor două momente, diagrama momentelor de răsucire are forma din figura 21.11, d. Rezultă :

$$|M_{t\ max}| = 875 \text{ daN} \cdot \text{cm}.$$

Se aplică formula de dimensionare

$$W_{pnc} = \frac{M_{t\ max}}{\tau_a} = \frac{875}{500} = 1,75 \text{ cm}^3,$$

deci, $\frac{\pi \cdot d^3}{16} = 1,75$, de unde rezultă $d = 2,073$ cm. Se alege $d = 21$ mm.

APLICAȚIA 5

Un arc cilindric elicoidal avînd raza de înfășurare $R = 4$ cm și numărul de spire $n = 8$ este comprimat de o forță $P = 125$ daN. Să se dimensioneze arcul și să se calculeze săgeata f , cunoscînd $\tau_a = 5\,000$ daN/cm² și $G = 8,5 \cdot 10^5$ daN/cm².

Rezolvare

Se dimensionează arcul după formula (21.14)

$$d = \sqrt[3]{\frac{16P \cdot R}{\pi \cdot \tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 125 \cdot 4}{\pi \cdot 5\,000}} = 0,798 \text{ cm}.$$

Se alege $d = 8$ mm.

Săgeata arcului are expresia (21.15) :

$$f = \frac{64 \cdot P \cdot R^3 \cdot n}{G \cdot d^4} = \frac{64 \cdot 125 \cdot 4^3 \cdot 8}{8,5 \cdot 10^5 \cdot 0,8^4} = 11,765 \text{ cm}.$$

22.

ÎNCOVOIEREA

O bară dreaptă este solicitată la încovoiere dacă în secțiunea transversală acționează un moment al cărui vector este perpendicular pe axa barei.

Încovoierea pură este solicitarea produsă atunci cînd în secțiunea transversală acționează numai un moment încovoiător, dirijat în lungul unei axe centrale principale de inerție a secțiunii.

Încovoierea simplă este solicitarea produsă de acțiunea simultană a unui moment încovoiător și a unei forțe tăietoare.

Încovoierea oblică este produsă de un moment a cărui direcție nu coincide cu direcțiile axelor centrale principale de inerție ale secțiunii.

22.1. MOMENTELE DE INERȚIE ALE SUPRAFETELOR PLANE

Caracteristicile geometrice ale secțiunii transversale a barei care intervin în calculul la încovoiere sînt momentele de inerție axiale și modulele de rezistență axiale.

Momentele de inerție axiale (11.7, a) se calculează descompunînd suprafața în dreptunghiuri, triunghiuri, cercuri etc. (la care se cunosc momentele de inerție) și aplicînd teorema lui Steiner (11.14, b). Pe baza relațiilor de definiție (11.7, a) se stabilesc următoarele expresii ale momentelor de inerție axiale față de axele centrale principale :

a) La cercul cu diametru d ,

$$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}.$$

b) La suprafața inelară, cu diametrul exterior D și diametrul interior d ,

$$I_z = I_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}.$$

c) La dreptunghiul cu laturi b și h , latura b fiind paralelă cu axa Oz ,

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}.$$

La suprafețe complexe se face suma momentelor de inerție ale suprafețelor componente, calculate față de o axă centrală principală a întregii suprafețe, utilizînd formula lui Steiner.

22.2. ÎNCOVOIEREA PURĂ A BARELOR DREPT

Se consideră o porțiune de lungime dx dintr-o bară de secțiune constantă, solicitată la încovoiere pură (fig. 22.1, a). În urma aplicării momentelor încovoietoare M , bara se deformează ca în figura 22.1, b, cele două secțiuni

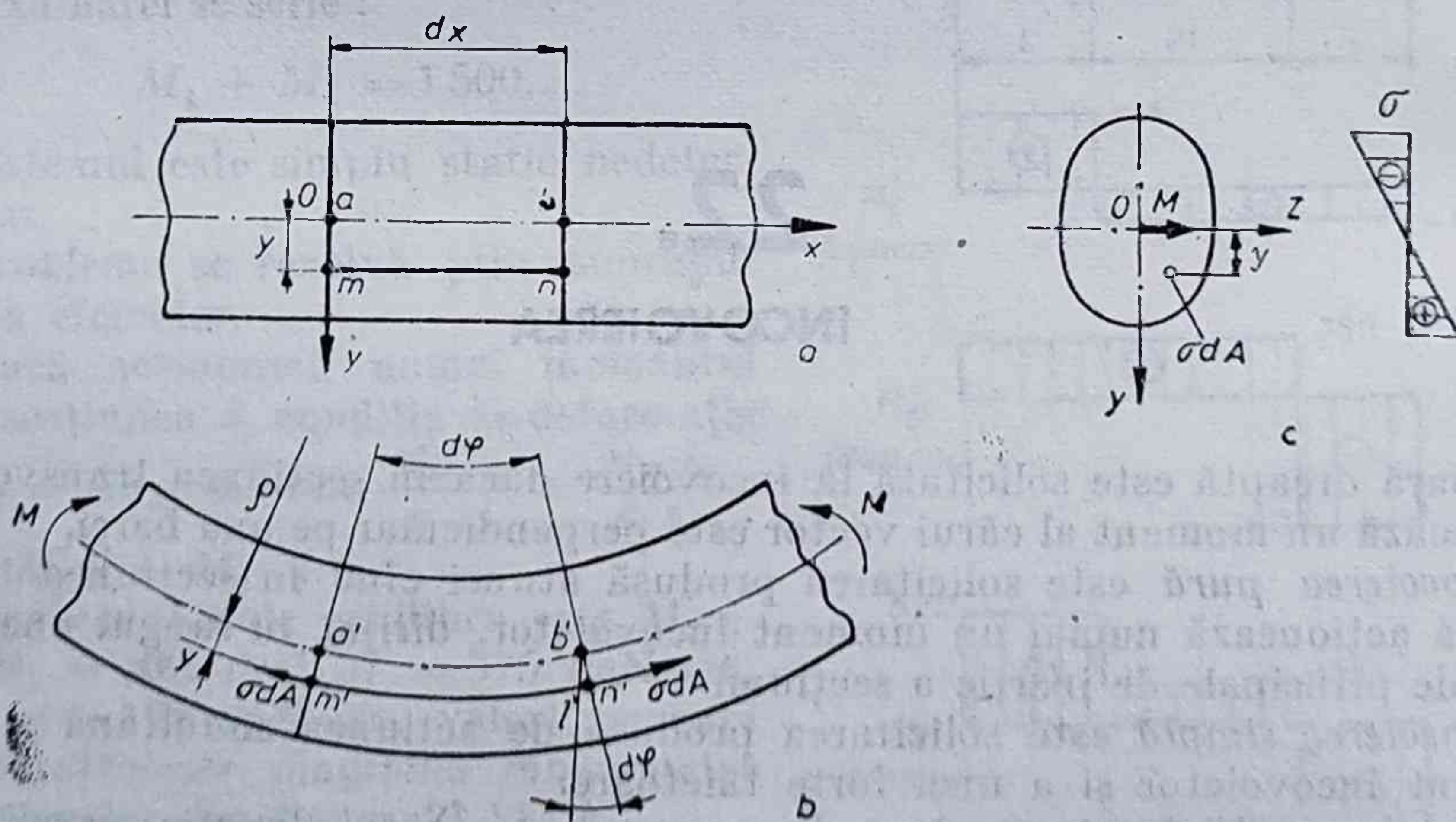


Fig. 22.1

situate inițial la distanța dx rotindu-se relativ cu unghiul $d\varphi$, dar rămânând plane, conform ipotezei lui Bernoulli.

Dacă s-ar presupune că bara este formată din fibre longitudinale, atunci s-ar observa că, în urma încovoierii barei, unele fibre se întind, altele se comprimă. Se alege un sistem de referință triortogonal, cu axa Ox dirijată în lungul fibrei care nu se alungește prin deformația de încovoiere, $\overline{a'b'} = \overline{ab}$, numită *fibra medie* a barei. Fie ρ raza de curbură a fibrei medii.

O fibră situată la distanța y de fibra medie are lungimea inițială $\overline{mn} = dx = \overline{a'b'} = \rho \cdot d\varphi$, iar după aplicarea solicitării devine

$$\overline{m'n'} = (y + \rho)d\varphi.$$

Lungirea acestei fibre este

$$\Delta(dx) = \overline{l'n'} = \overline{m'n'} - \overline{m'l'} = \overline{m'n'} - \overline{a'b'} = y \cdot d\varphi.$$

Lungirea specifică este :

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{y \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{y}{\rho}.$$

Aplicînd legea lui Hooke (18.13) rezultă :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E}{\rho} y, \quad (22.1)$$

deci eforturile unitare normale variază liniar cu distanța la fibra medie (fig. 22.1, c). Axa Oz , în lungul căreia eforturile unitare produse de încovoiere sînt nule, se numește *axa neutră a secțiunii*.

Pentru a stabili legătura între momentul încovoietor M și eforturile unitare σ , se scriu relațiile de echivalență între forțele elementare $\sigma \cdot dA$ și eforturile secționale. Fiind paralele cu axa Ox , forțele $\sigma \cdot dA$ pot produce numai forță axială și momente încovoietoare, dar dintre acestea există numai momentul dirijat în lungul axei Oz .

Rezultă relațiile de echivalență :

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = 0; \quad M_{iz} = \int_A y \cdot \sigma \cdot dA = M; \quad M_{iy} = \int_A z \cdot \sigma \cdot dA = 0. \quad (22.2)$$

Înlocuind (22.1) în (22.2), se obține

$$\frac{E}{\rho} \int_A y \cdot dA = 0; \quad \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA = M; \quad \frac{E}{\rho} \int_A z \cdot y \cdot dA = 0,$$

sau

$$\int_A y \cdot dA = 0; \quad \frac{E}{\rho} I_z = M; \quad I_{zy} = 0. \quad (22.3)$$

Conform primei relații (22.3), momentul static al suprafeței secțiunii transversale calculat față de axa Oz este nul, deci axa Oz trece prin centrul de greutate al acesteia.

Conform ultimei relații (22.3), momentul de inerție centrifugal față de axele Oy și Oz este nul, deci acestea sînt axe principale de inerție ale secțiunii.

În concluzie, $Oxyz$ este un sistem de axe centrale principale de inerție ale secțiunii transversale.

Din a doua relație (22.3) rezultă curbura barei :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{E \cdot I_z}, \quad (22.4)$$

care înlocuită în relația (22.1) conduce la formula lui Navier :

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_z}. \quad (22.5)$$

Efortul unitar normal maxim are expresia :

$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot y_{max}}{I_z} = \frac{M}{\frac{I_z}{y_{max}}} = \frac{M}{W_z}, \quad (22.6)$$

unde

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} \quad (22.7)$$

este *modulul de rezistență axial* al secțiunii transversale.

La secțiunea circulară cu diametrul d ,

$$W_z = \frac{I_z}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi \cdot d^4}{64}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi \cdot d^3}{32}. \quad (22.8)$$

La secțiunea inelară, avînd diametrul exterior D și cel interior d ,

$$W_z = \frac{I_z}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D}. \quad (22.9)$$

La secțiunea dreptunghiulară, cu baza b și înălțimea h ,

$$W_z = \frac{I_z}{\frac{h}{2}} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^2}{6}. \quad (22.10)$$

Relația (22.6) este utilizată sub următoarele forme :

— formula de dimensionare : $W_{z_{nec}} = \frac{M}{\sigma_a}; \quad (22.11, a)$

— formula de verificare : $\sigma_{ef} = \frac{M}{W_z} \leq \sigma_a; \quad (22.11, b)$

— formula momentului încovoietor capabil : $M_{cap} = W_z \cdot \sigma_a. \quad (22.11, c)$

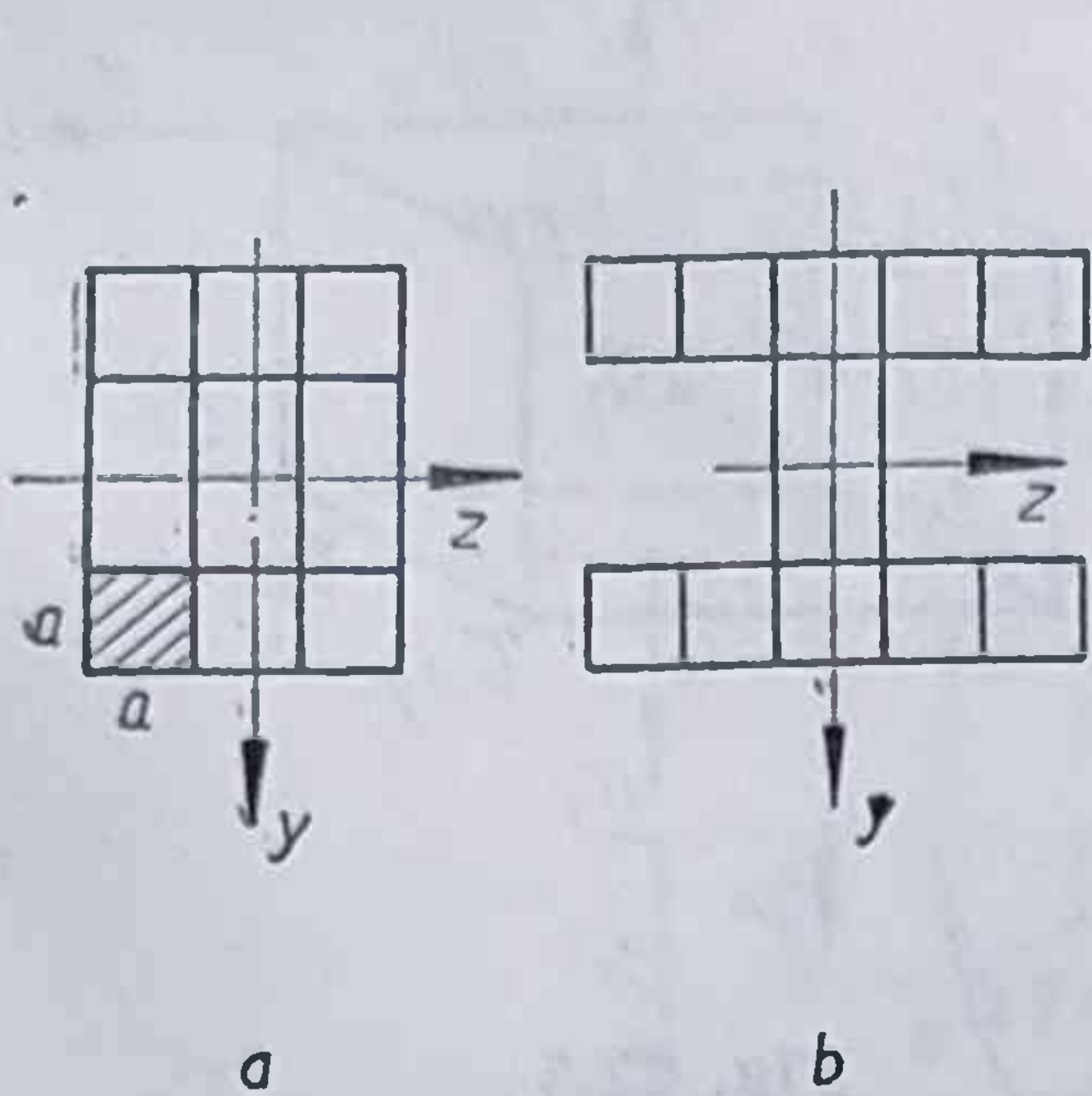


Fig. 22.2

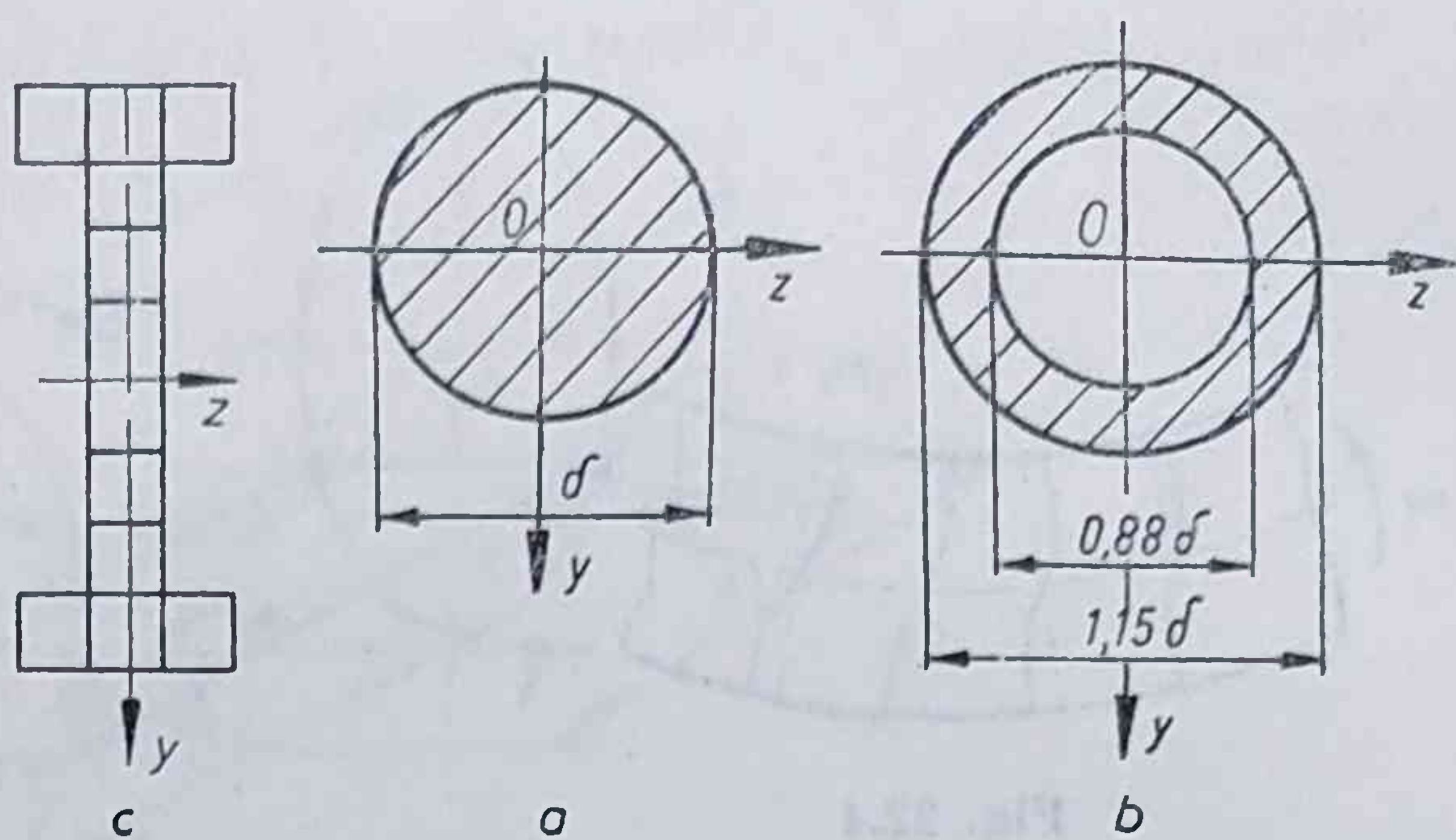


Fig. 22.3

În relațiile (22.11), σ_a este rezistența admisibilă la încovoiere, iar M — cel mai mare moment încovoiător din bară, care se spune că acționează în „secțiunea periculoasă”.

O grindă rezistă cu atît mai bine la încovoiere cu cît W_z este mai mare. Forma secțiunii transversale este cu atît mai rațională, cu cît W_z este mai mare, pentru un consum de material cît mai mic, deci pentru o valoare cît mai mică a ariei secțiunii transversale A .

În figura 22.2 se arată trei secțiuni cu arii egale, la care prin distribuirea judicioasă a suprafeței (cît mai departe de axa z) se obține un modul de rezistență tot mai mare.

Astfel :

$$W_1 = 8a^3 \quad (\text{fig. 22.2, } a) ;$$

$$W_2 = 12a^3 = 1,5W_1 \quad (\text{fig. 22.2, } b) ;$$

$$W_3 = 23a^3 \cong 3W_1 \quad (\text{fig. 22.2, } c).$$

În figura 22.3 se arată două secțiuni avînd același modul de rezistență W_z . Secțiunea inelară, avînd suprafața mai judicios distribuită, are aria egală cu 0,55 din aria secțiunii circulare, ducînd deci la importante economii de material. În același scop se utilizează în construcții metalice profilele laminate în formă de I, U sau L (Anexa 6).

În ceea ce privește deformațiile, deoarece pe porțiunile de bară sollicitate la încovoiere pură $M = \text{const.}$, din relația (22.4) rezultă că în cazul barelor de secțiune constantă

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I_z} = \text{const.}, \quad (22.12)$$

deci $\rho = \text{const.}$, bara se deformează în formă de arc de cerc.

În relația (22.12) produsul $E \cdot I_z$ se numește *modul de rigiditate la încovoiere*.

22.3. ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ A BARELOR DREPTE

În cazul încovoierii simple, se ține seama de acțiunea combinată a momentelor încovoiătoare și a forțelor tăietoare. Forțele tăietoare produc eforturi unitare tangențiale, iar acestea deformații suplimentare de lunecare.

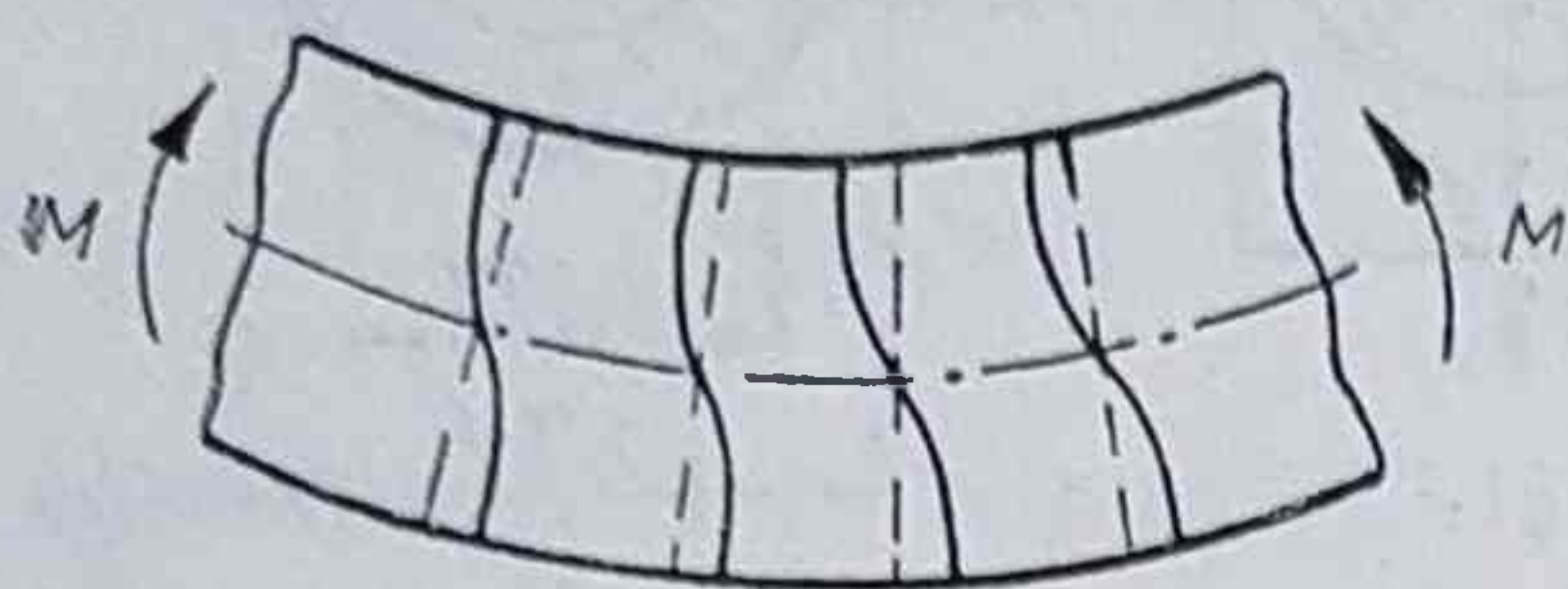


Fig. 22.4

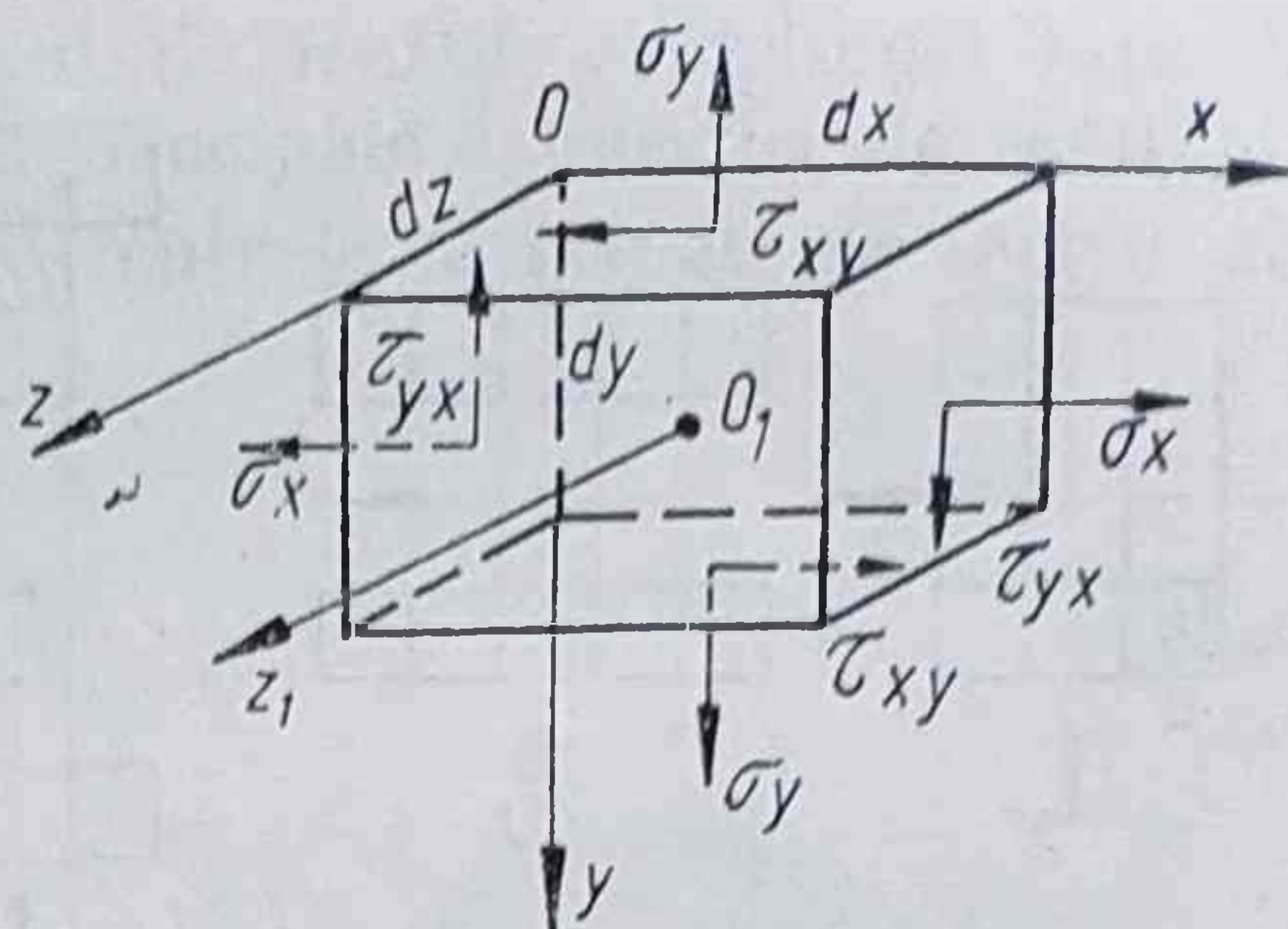


Fig. 22.5

Datorită distribuției neuniforme a eforturilor unitare tangențiale, apare o *deplanare* a secțiunii transversale (fig. 22.4), deci ipoteza lui Bernoulli nu mai poate fi utilizată la deducerea formulei eforturilor unitare.

Se apreciază că la bare la care raportul $\frac{h}{l}$ (între înălțimea secțiunii și deschiderea barei) este mic, calculul eforturilor unitare normale se poate face cu formula lui Navier (22.5) dedusă pentru încovoierea pură. La barele care au raportul $\frac{h}{l}$ relativ mare, formula lui Navier dă valori ale eforturilor unitare normale mai mari decât cele reale.

22.3.1. DUALITATEA EFORTURILOR UNITARE TANGENȚIALE

Se consideră un element de volum paralelipipedic, detașat dintr-un corp elastic pe fețele căruia acționează eforturi unitare normale și tangențiale. În figura 22.5 s-au desenat numai eforturile unitare ce acționează într-un plan paralel cu xOy . Ecuația de momente față de axa O_1z_1 (paralelă cu Oz), care trece prin centrul paralelipipedului, se scrie

$$2\tau_{yx} \cdot dy \cdot dz \frac{dx}{2} - 2\tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \frac{dx}{2} = 0,$$

deci :

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}; \quad (22.13)$$

primul indice arată axa cu care este paralel, iar al doilea — normala la suprafața pe care acționează efortul unitar respectiv.

Relația (22.13) exprimă *dualitatea eforturilor unitare tangențiale*. Într-un corp elastic, pe două plane perpendiculare între ele acționează eforturi unitare tangențiale ale căror componente perpendiculare pe muchia comună a celor două plane sînt egale și orientate simetric.

22.3.2. EFORTURI UNITARE TANGENȚIALE

Fie un element de lungime dx , detașat dintr-o bară sollicitată la încovoiere simplă (fig. 22.6). Pe secțiunea din stînga acționează eforturile M și T , iar pe cea din dreapta $M + dM$ și T .

Se secționează apoi acest element cu un plan paralel cu xOz , la distanța y de acesta, obținîndu-se elementul desenat cu linii mai groase.

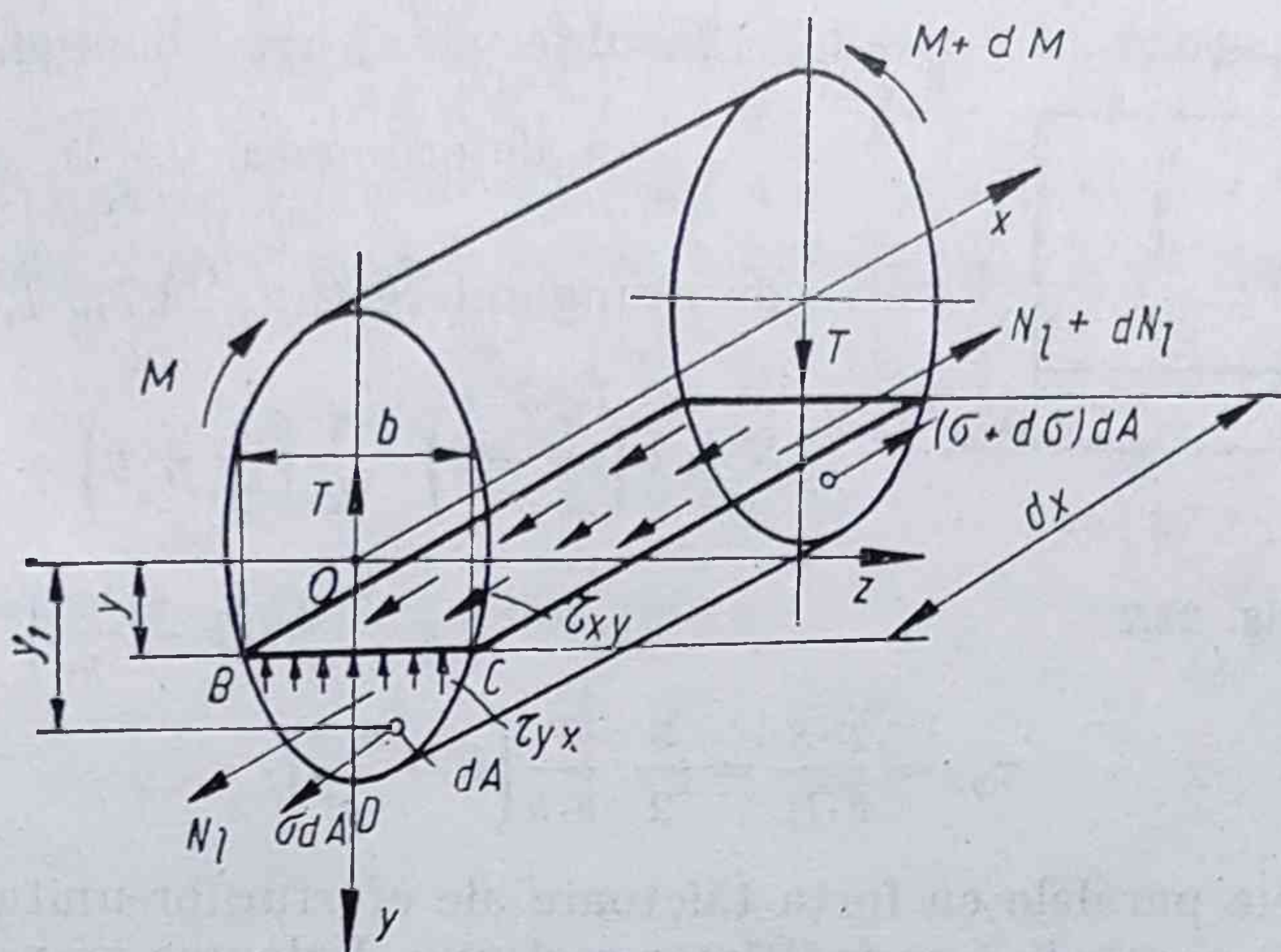


Fig. 22.6

Pe fețele laterale ale acestui element acționează eforturi unitare normale σ , respectiv $\sigma + d\sigma$ și eforturi unitare tangențiale.

Se consideră că (ipoteza lui Juravski) în lungul unei coarde BC , paralele cu axa neutră Oz , componentele τ_{yx} ale eforturilor unitare tangențiale sînt constante.

Datorită dualității eforturilor unitare tangențiale, pe fața superioară longitudinală a elementului acționează eforturile unitare τ_{xy} , egale cu cele din secțiunile frontale, din lungul muchiei comune.

Rezultanta forțelor elementare produse de eforturile unitare normale pe fața din stînga a elementului este :

$$N_l = \int_{BCD} \sigma \cdot dA = \int_{BCD} \frac{M \cdot y_1}{I_z} dA = \frac{M}{I_z} \int_{BCD} y_1 \cdot dA = \frac{M \cdot S}{I_z}, \quad (22.14)$$

unde S este momentul static al suprafeței BCD față de axa Oz .

Pe fața din dreapta a elementului acționează forța :

$$N_l + dN_l = \frac{(M + dM)S}{I_z},$$

iar pe fața superioară, forța longitudinală $\tau_{xy} \cdot b \cdot dx$.

Ecuția de proiecții pe axa Ox a forțelor ce acționează asupra elementului considerat se scrie :

$$N_l + \tau_{xy} \cdot b \cdot dx - (N_l + dN_l) = 0.$$

Se obține :

$$\tau_{xy} = \frac{1}{b} \frac{dN_l}{dx}, \quad (22.15)$$

sau

$$\tau_{xy} = \frac{1}{b} \frac{d}{dx} \left(\frac{M \cdot S}{I_z} \right) = \frac{1}{b} \frac{S}{I_z} \frac{dM}{dx}.$$

Deoarece $\frac{dM}{dx} = T$ și $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, rezultă formula lui Juravski :

$$\tau_{yx} = \frac{T \cdot S}{b \cdot I_z}. \quad (22.16)$$

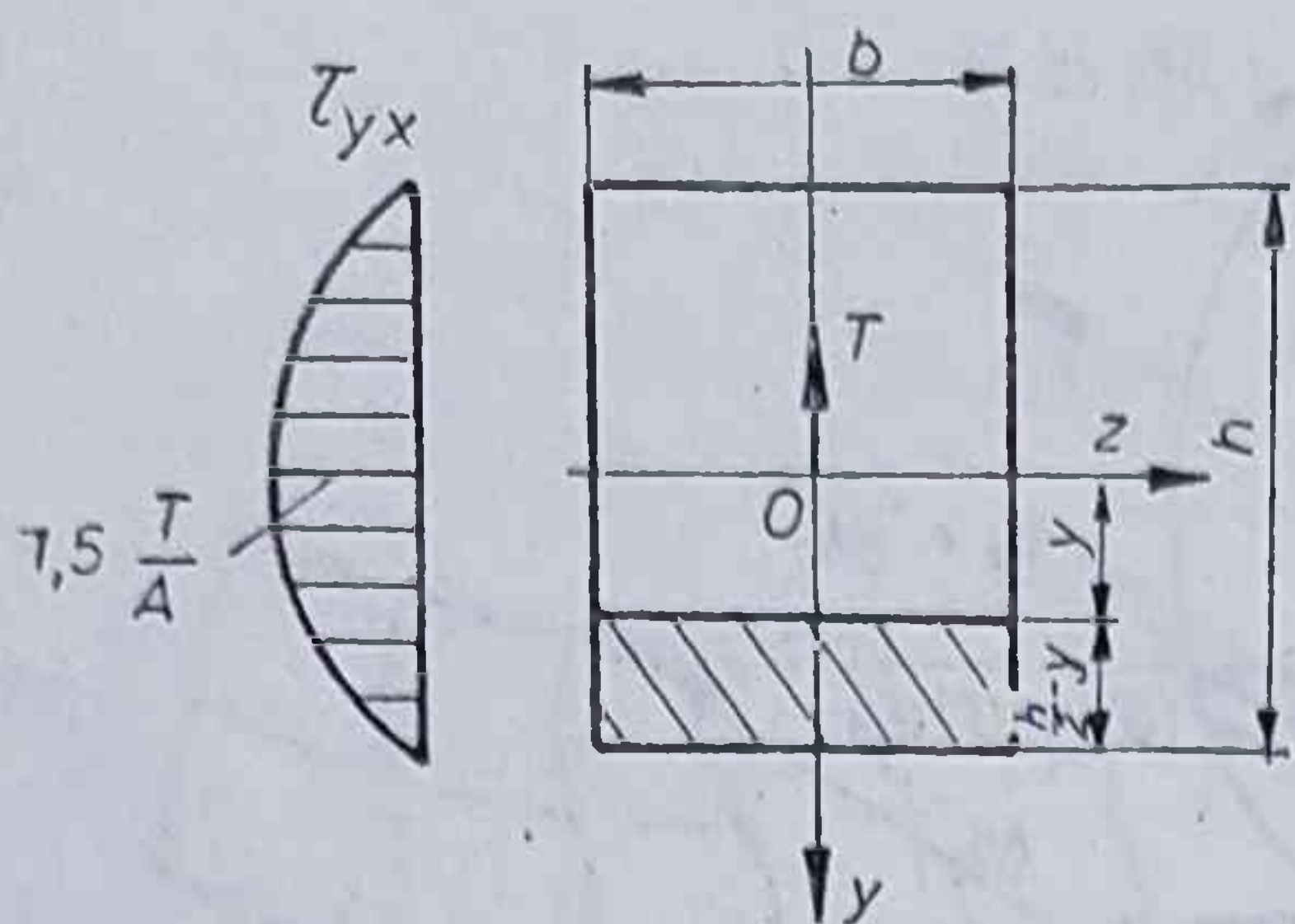


Fig. 22.7

Se observă că τ_{yx} depinde de raportul $\frac{S}{b}$, deci de ordonata y . În cazul secțiunii

dreptunghiulare (fig. 22.7), $I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$ și

$$S = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{b \cdot h^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right),$$

deci :

$$\tau_{yx} = \frac{T \cdot S}{b \cdot I_z} = \frac{3}{2} \frac{T}{b \cdot h} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right).$$

Componentele paralele cu forța tăietoare ale eforturilor unitare tangențiale au o distribuție parabolică pe înălțimea secțiunii. Valoarea maximă se produce în lungul axei neutre :

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{T}{A}. \quad (22.17)$$

În cazul secțiunii circulare (fig. 22.8), $b = 2r \sin \theta$; $y = r \cos \theta$; $dy = -r \sin \theta \cdot d\theta$, iar aria suprafeței elementului hașurat este

$$dA = b \cdot dy = -2r^2 \sin^2 \theta \cdot d\theta;$$

deci, momentul static al suprafeței situate sub coarda b , calculat față de axa Oz , este :

$$S = \int_0^\theta y \cdot dA = \int_0^\theta 2r^3 \sin^2 \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta = \frac{2}{3} r^3 \sin^3 \theta.$$

Rezultă :

$$\tau_{yx} = \frac{T \cdot S}{b \cdot I_z} = \frac{T \cdot \frac{2}{3} r^3 \sin^3 \theta}{2r \sin \theta \cdot \frac{r^4}{4}} = \frac{4}{3} \frac{T}{A} \sin^2 \theta,$$

cu valoarea maximă în lungul axei neutre de :

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{T}{A}. \quad (22.18)$$

La secțiunea în formă de I (fig. 22.9), diagrama eforturilor unitare τ_{yx} este formată din arce de parabolă, cu o discontinuitate în dreptul trecerii de la „tălpile“ la „inima“ profilului, unde coarda b are un salt.

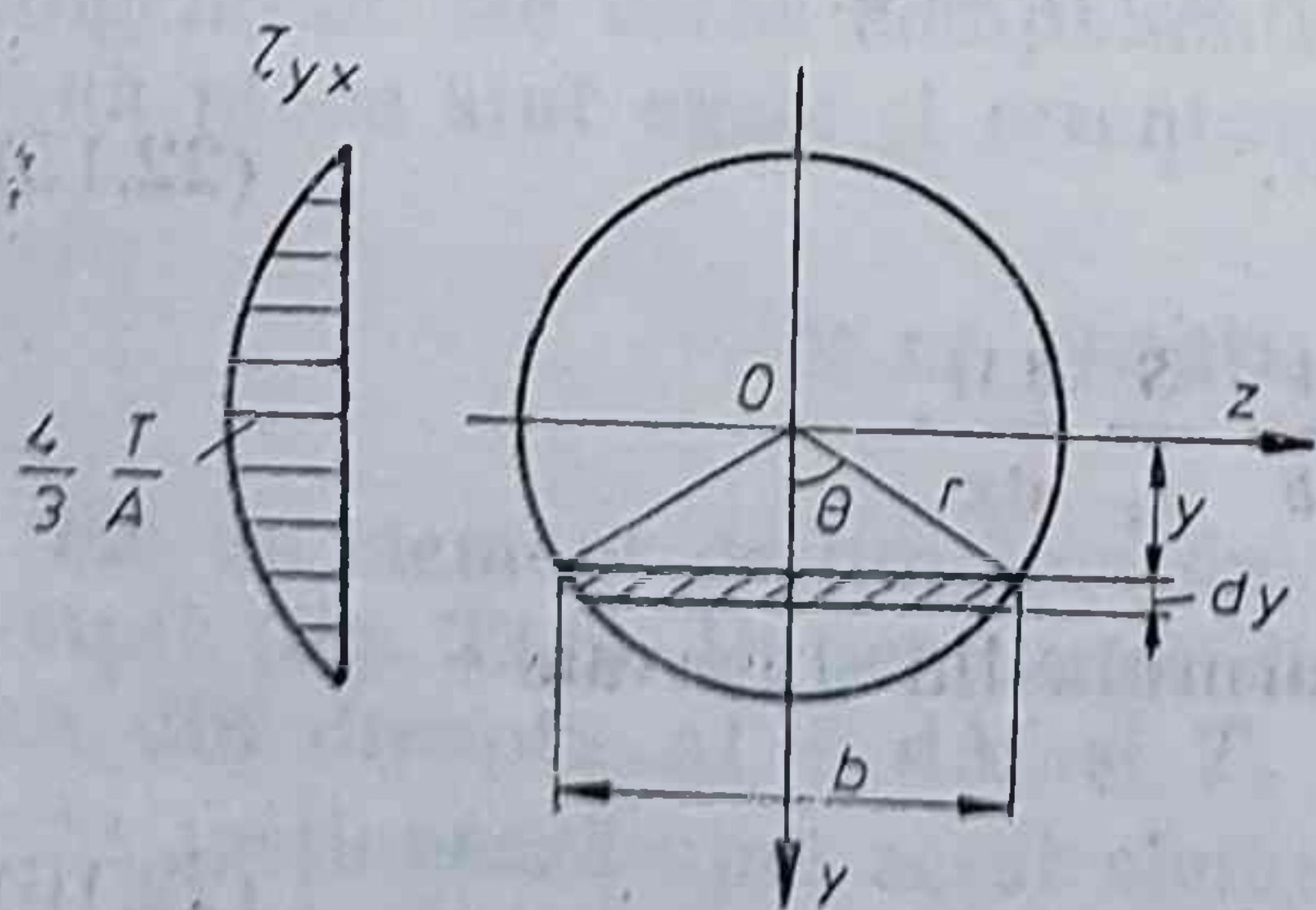


Fig. 22.8

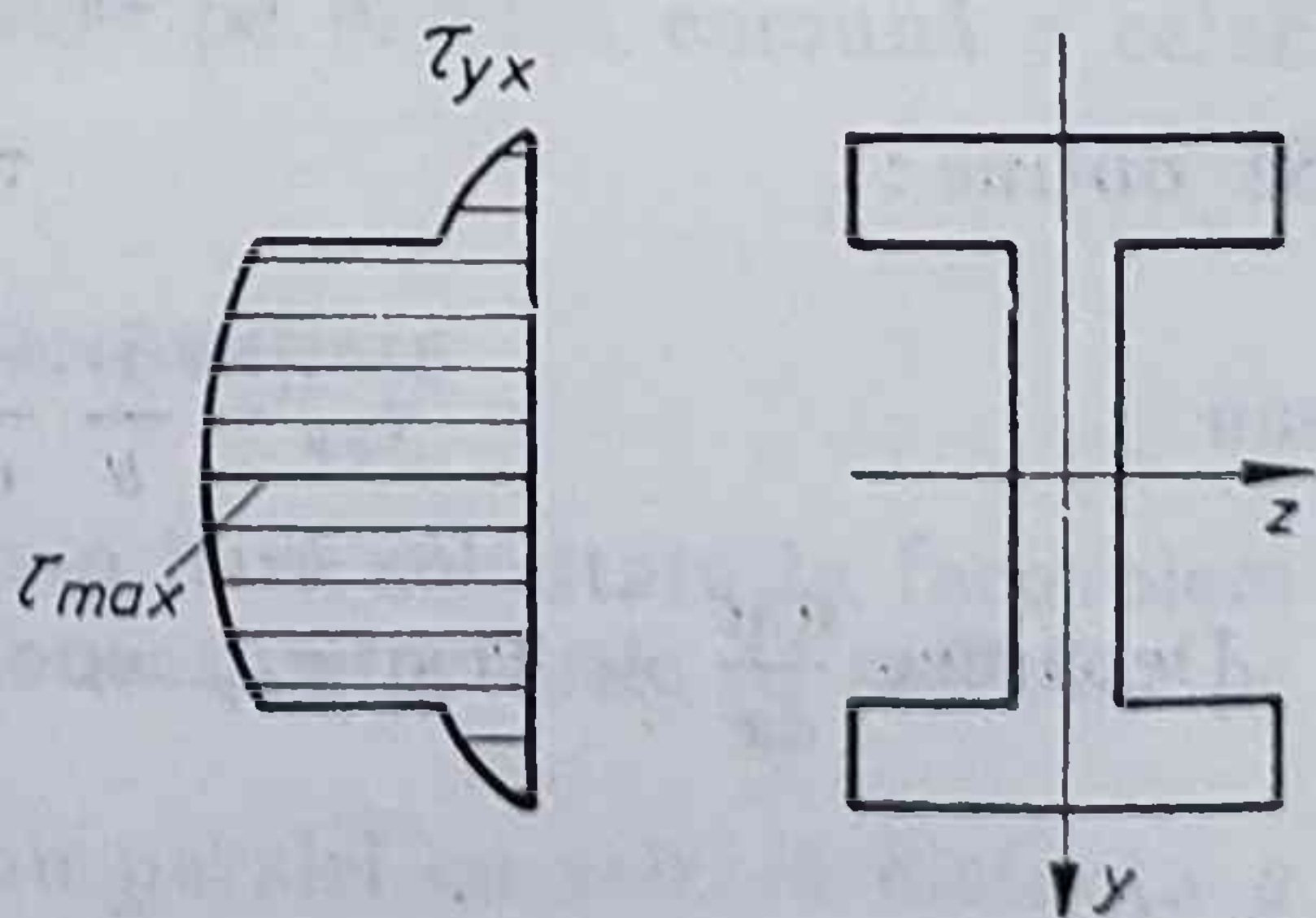


Fig. 22.9

22.3.3. COMPARAȚIE ÎNTRE VALORILE EFORTURILOR UNITARE σ ȘI τ

Fie bara din figura 22.10, cu secțiune dreptunghiulară $b \times h$.
Efortul unitar normal maxim apare în încastrare, avînd valoarea :

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{P \cdot l}{\frac{b \cdot h^3}{6}} = \frac{6P \cdot l}{b \cdot h^3}.$$

Efortul unitar tangențial maxim este :

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{T}{A} = \frac{3P}{2b \cdot h}.$$

Se observă că raportul :

$$\frac{\tau_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{h}{4l},$$

depinde de raportul $\frac{h}{l}$ între înălțimea secțiunii transversale și lungimea

barei. La barele cu raportul $\frac{h}{l} < \frac{1}{10}$, la care de obicei ipoteza lui Bernoulli

este verificată, eforturile unitare tangențiale sînt neglijabile față de cele normale, dimensionarea făcîndu-se numai pe baza momentului încovoietor.

22.3.4. LUNECAREA LONGITUDINALĂ

Se consideră două bare suprapuse (fig. 22.11, a) în consolă, solicitate la încovoiere de forța P .

Dacă barele nu sînt îmbinate și se neglijează frecarea pe suprafețele de contact, deformarea are loc ca în figura 22.11, b. Fibrele de sus ale barei de jos sînt întinse, în timp ce fibrele de jos ale barei de sus sînt comprimate, cele două suprafețe în contact lunecînd una față de cealaltă. Fenomenul se numește *lunecare longitudinală*.

Dacă barele sînt îmbinate, ele lucrează împreună la încovoiere, ca o singură grindă compusă. Elementele de asamblare împiedică lunecarea longitudinală, fiind solicitate la forfecare (fig. 22.11, c). Dimensionarea acestora se face pe baza valorii forței de lunecare longitudinală N_l .

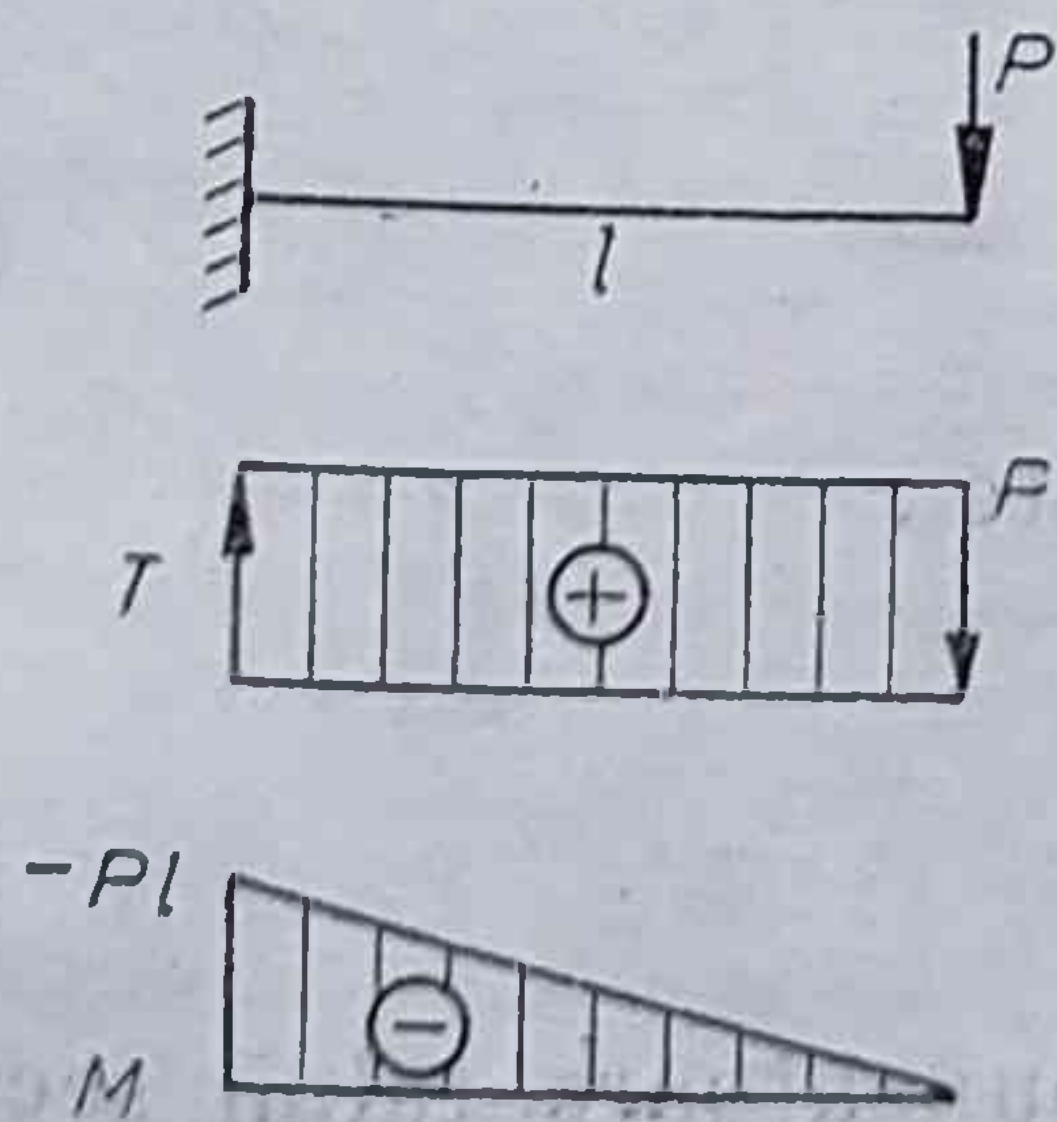


Fig. 22.10

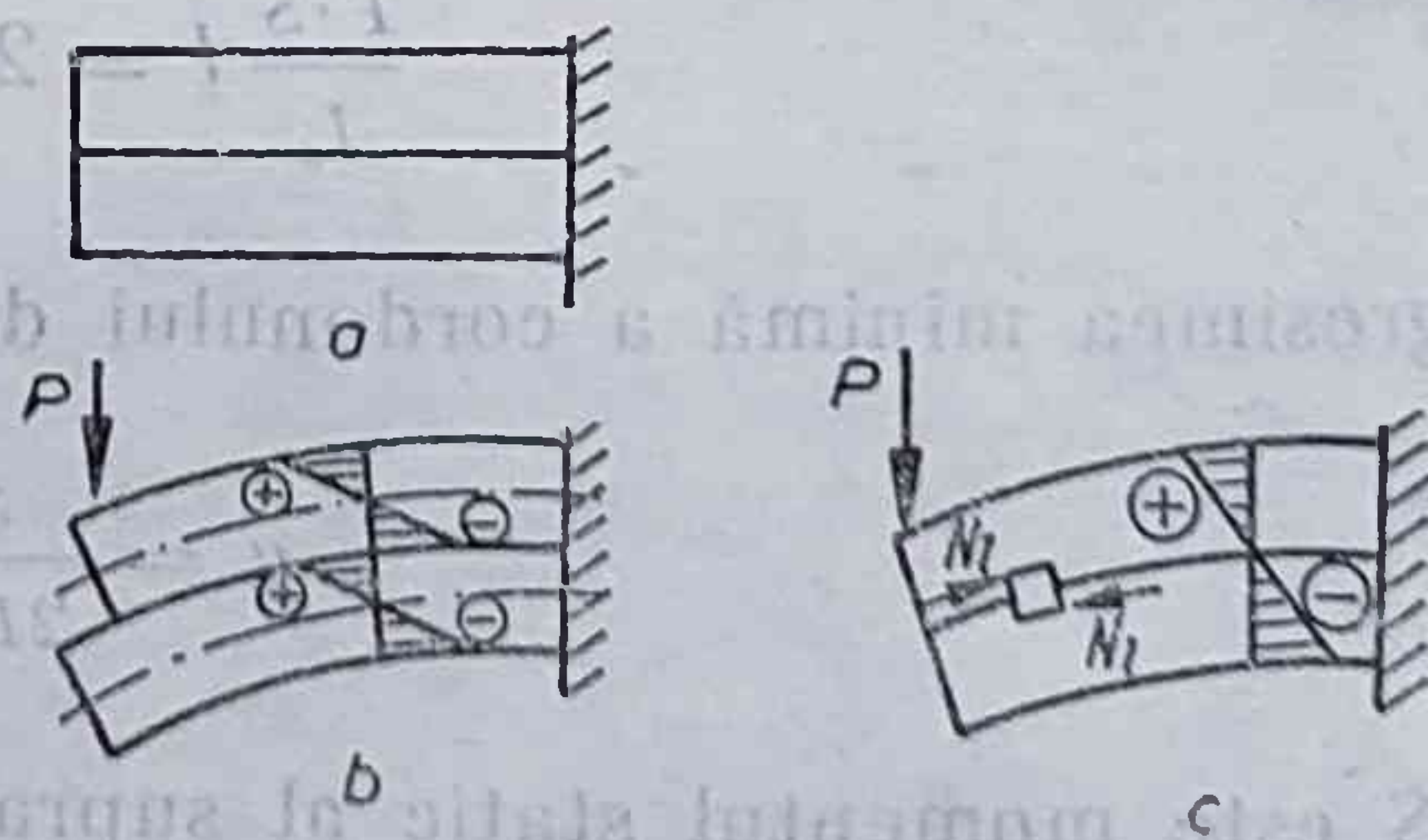


Fig. 22.11

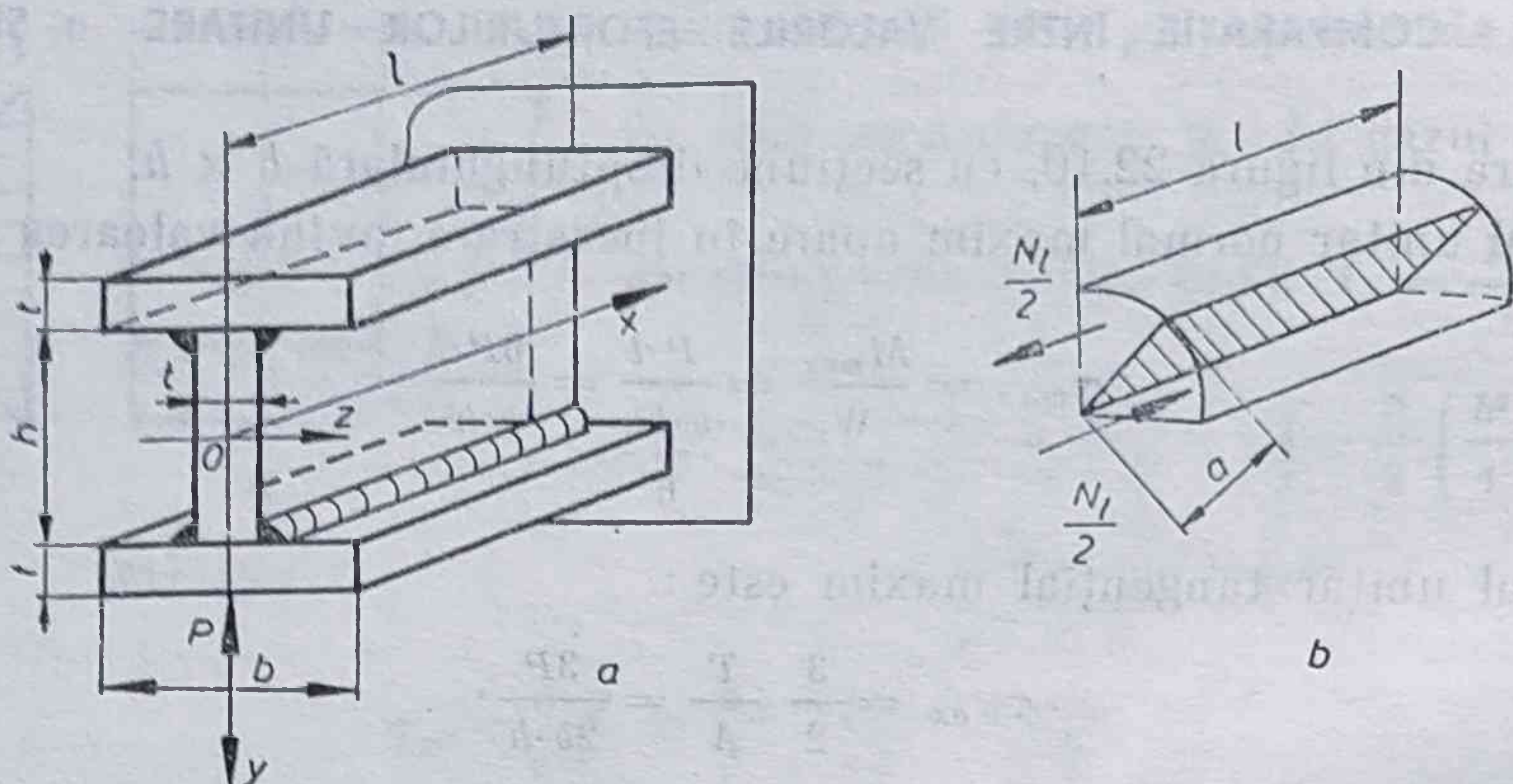


Fig. 22.12

Fie grinda metalică din figura 22.12, *a* îmbinată prin sudare. Conform relațiilor (22.15) și (22.16), forța de lunecare are expresia :

$$N_l = \int_l \tau_{yx} \cdot b \cdot dx = \frac{T \cdot S}{I_z} l,$$

unde : $S = b \cdot t \frac{h+t}{2}$; $I_z = \frac{b(h+2t)^3}{12} - \frac{(b-t)h^3}{12}$; $T = P$.

Cordonul de sudură este solicitat la forfecare (fig. 22.12, *b*). În planul de forfecare (hașurat) se dezvoltă eforturi unitare tangențiale. Considerînd că acestea sînt uniform distribuite, rezultă :

$$\tau = \frac{\frac{N_l}{2}}{a \cdot l} = \frac{N_l}{2a \cdot l},$$

deci forța capabilă a unui cordon continuu de sudură este :

$$N_{cap} = \tau_{as} \cdot a \cdot l,$$

unde τ_{as} este rezistența admisibilă la forfecare a cordonului de sudură.

Egalînd forța de lunecare cu forța capabilă a două cordoane de sudură, rezultă :

$$\frac{T \cdot S}{I_z} l = 2 \tau_{as} \cdot a \cdot l,$$

deci, grosimea minimă a cordonului de sudură este :

$$a = \frac{S \cdot T}{2 I_z \cdot \tau_{as}},$$

unde *S* este momentul static al suprafeței corespunzătoare tălpii secțiunii, calculat față de axa *Oz*.

22.3.5. FORMA OPTIMĂ A BARELOR SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE

În lungul unei bare solicitate la încovoiere simplă, momentul încovoietor variază. Dacă bara are secțiune constantă, atunci numai în secțiunea periculoasă efortul unitar maxim este egal cu rezistența admisibilă la încovoiere. Rezultă o supradimensionare a barei în celelalte secțiuni.

O soluție mai rațională din punct de vedere al economiei de material o constituie barele de secțiune variabilă. Forma tehnologică se realizează prin variația în trepte a diametrului. Astfel, la bara din figura 22.13, tronsonul 1 se dimensionează pe baza momentului M_1 , tronsonul 2 — pe baza momentului M_2 și tronsonul 3 — pe baza momentului M_3 . Față de soluția cu secțiune constantă în lungul barei (linie întreruptă), se obține o bară mai ușoară, cu costul suplimentar al prelucrării.

Se pot proiecta bare cu secțiune variabilă realizate astfel încât în orice secțiune efortul unitar maxim să fie egal cu rezistența admisibilă. Acestea se numesc grinzi de egală rezistență; trebuie îndeplinită condiția :

$$W_z(x) = \frac{M(x)}{\sigma_a}, \quad (22.19)$$

deci modulul de rezistență axial W_z să aibă aceeași lege de variație în lungul barei ca și momentul încovoietor.

Fie bara din figura 22.14, de grosime constantă h și lățime variabilă $z(x) = \frac{b}{l} x$.

Relația (22.19) se scrie :

$$\frac{z \cdot h^3}{6} = \frac{P \cdot x}{\sigma_a},$$

deci :

$$z = \frac{6P}{\sigma_a \cdot h^3} x,$$

astfel că variația liniară a lățimii duce la îndeplinirea condiției de egală rezistență la încovoiere.

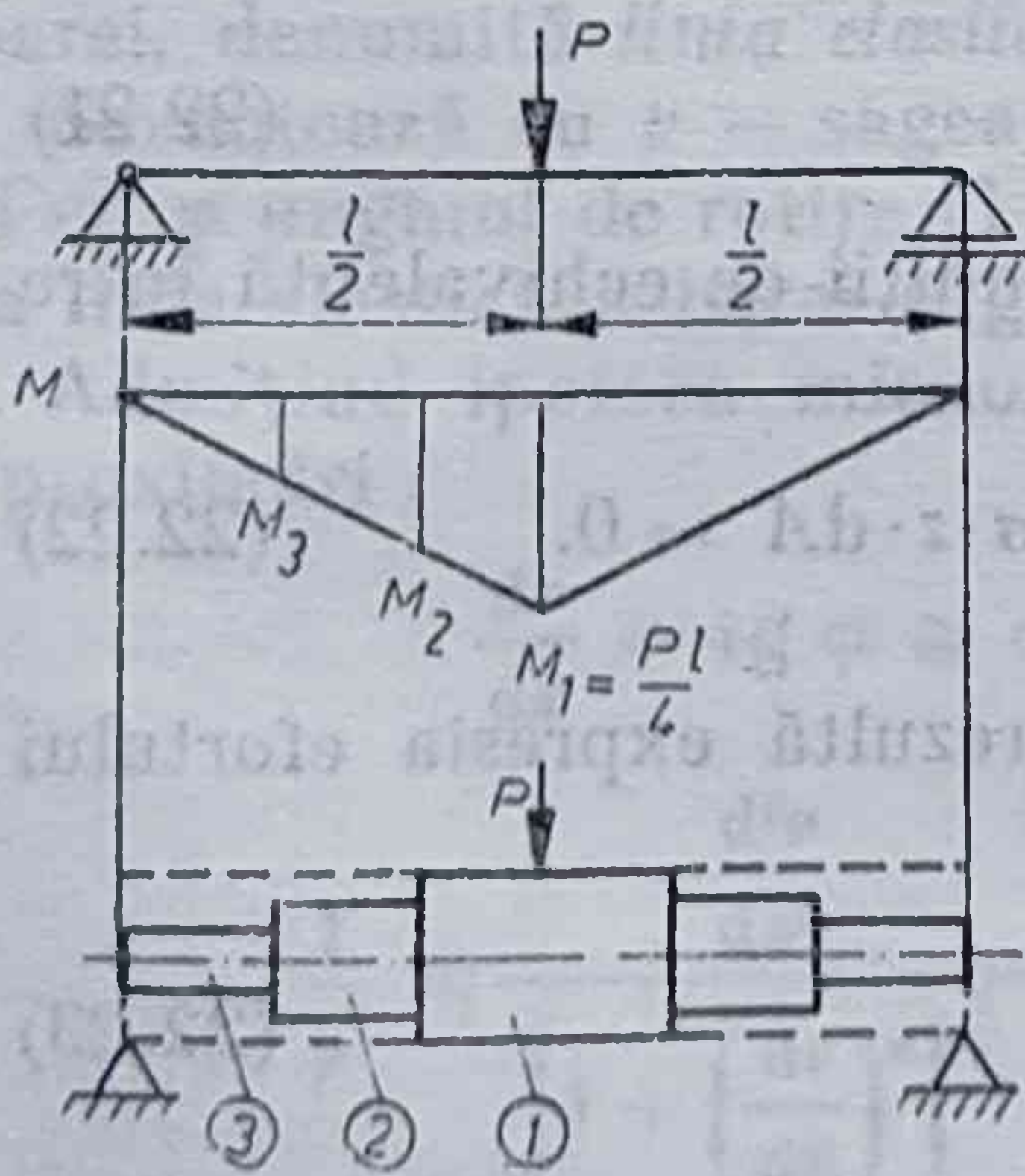


Fig. 22.13

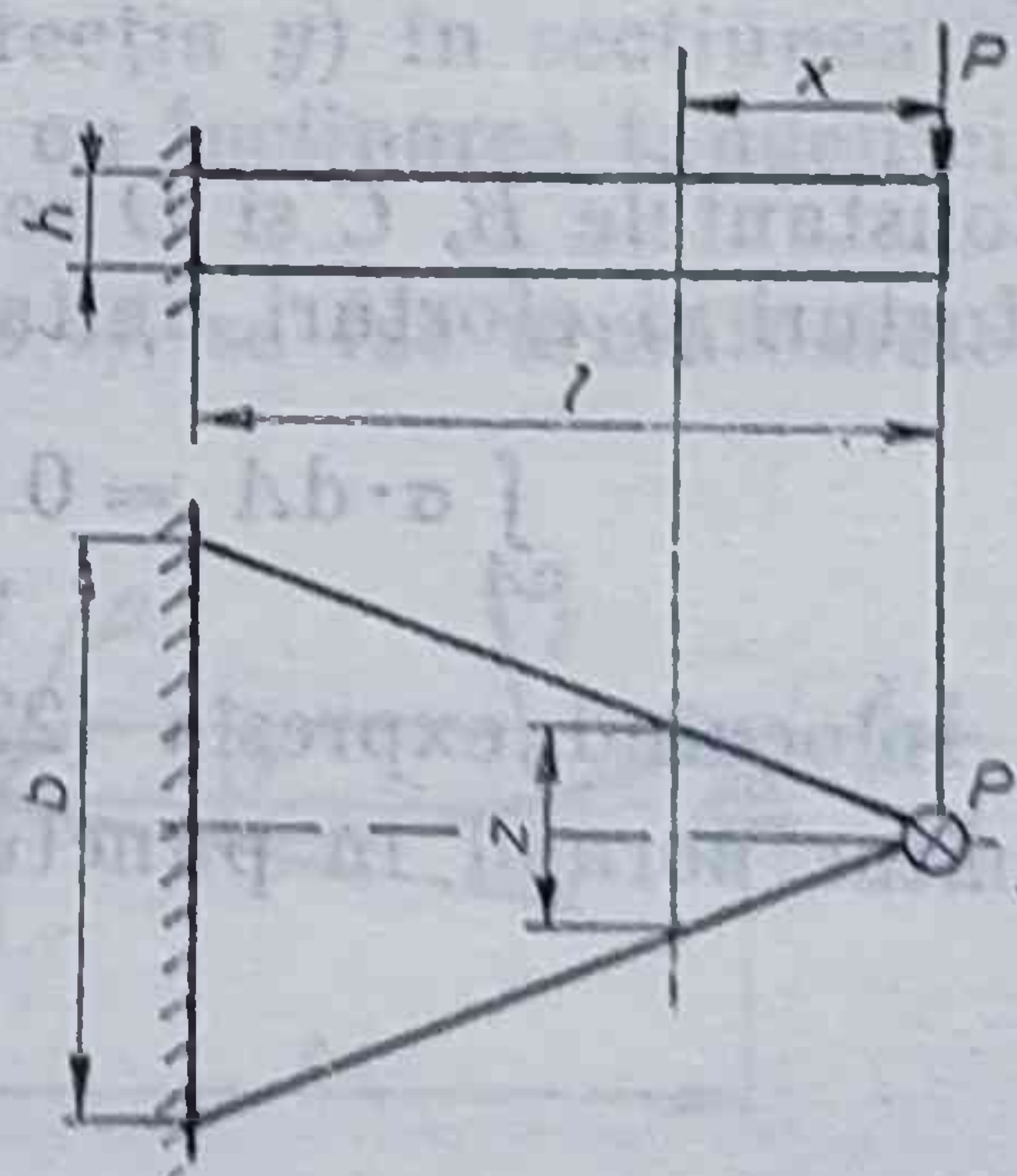


Fig. 22.14

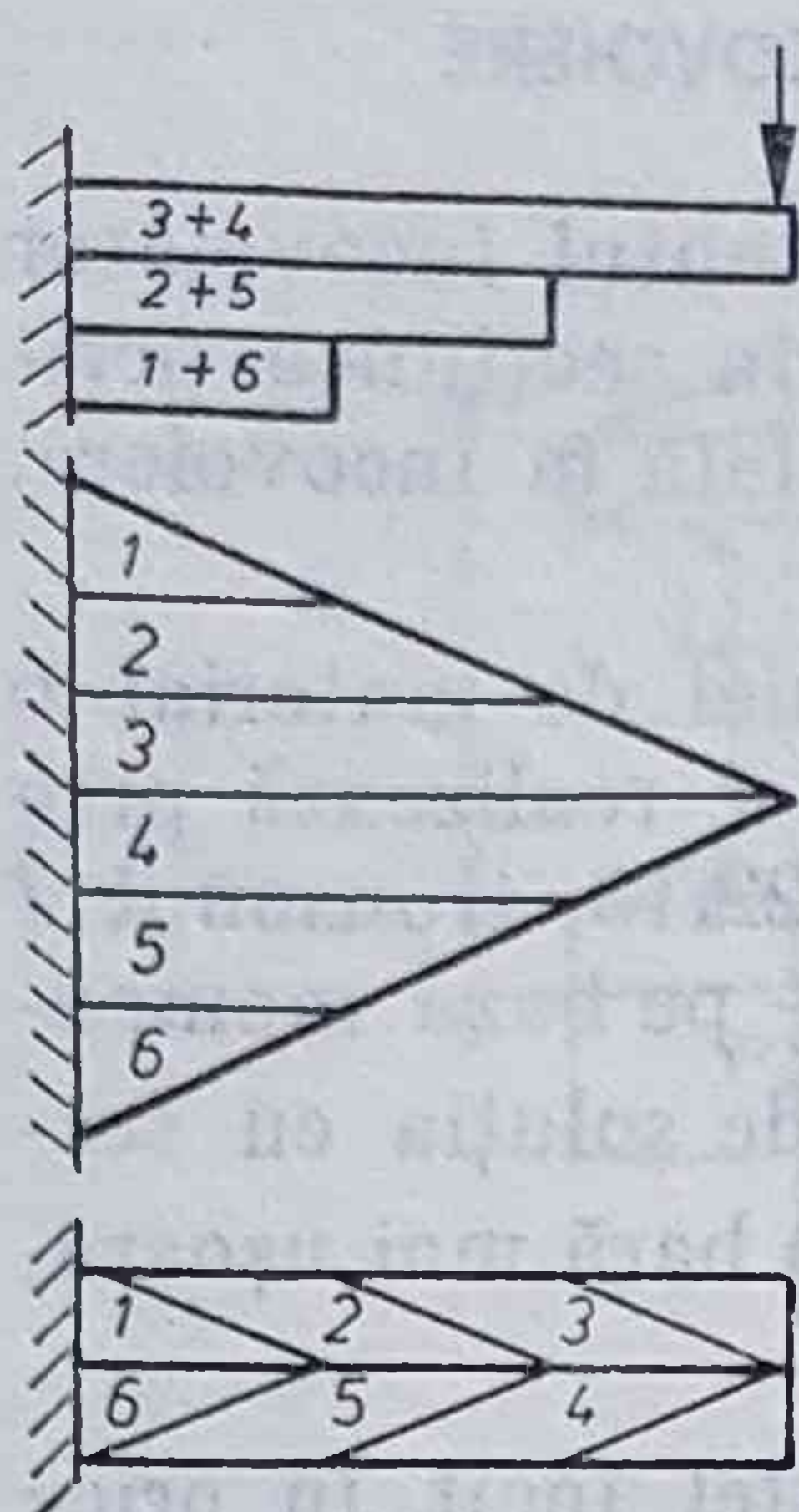


Fig. 22.15

Forma din figura 22.14 este netehnologică. Prin tăierea barei în fișii și suprapunerea fișiiilor, ca în figura 22.15, se realizează arcul cu foi.

22.3.6. ENERGIA DE DEFORMAȚIE LA ÎNCOVOIERE

Pentru un element de bară de lungime dx , solicitat la încovoiere de momentul M , rotirea relativă a secțiunilor din capăt este (22.4)

$$d\varphi = \frac{M dx}{E \cdot I_z}.$$

Lucrul mecanic efectuat de cuplul M pe rotirea elastică $d\varphi$ se înmagazinează în elementul de bară sub formă de energie potențială de deformație :

$$dW = \frac{1}{2} M \cdot d\varphi = \frac{M^2 \cdot dx}{2E \cdot I_z}.$$

Energia acumulată de întreaga bară are expresia :

$$W = \int \frac{M^2 \cdot dx}{2E \cdot I_z}. \quad (22.20)$$

22.4. ÎNCOVOIEREA OBLICĂ A BARELOR DREPTE

Se consideră bara din figura 22.16, a solicitată de sarcina distribuită p situată în planul xOy .

Într-o secțiune oarecare, momentul încovoiator M este dirijat în lungul axei Oz , a cărei direcție nu coincide cu axele centrale principale de inerție 1 și 2 ale secțiunii (fig. 22.16, b).

Dacă ipoteza lui Bernoulli este valabilă, deformația specifică într-un punct oarecare $N(z, y)$ este o funcție liniară de coordonate. În limitele de aplicabilitate ale legii lui Hooke și eforturile unitare normale au o variație liniară, deci :

$$\sigma = B \cdot y + C \cdot z + D. \quad (22.21)$$

Constantele B , C și D se determină din cele trei condiții de echivalență între eforturi și eforturi unitare :

$$\int_A \sigma \cdot dA = 0; \quad \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = -M; \quad \int_A \sigma \cdot z \cdot dA = 0. \quad (22.22)$$

Înlocuind expresia (22.21) în relațiile (22.22), rezultă expresia efortului unitar normal în punctul N :

$$\sigma = \frac{z \cdot I_{zy} - y \cdot I_{yz}}{I_z \cdot I_y - I_{zy}^2} M, \quad (22.23)$$

unde M este dirijat în sens contrar axei Oz .

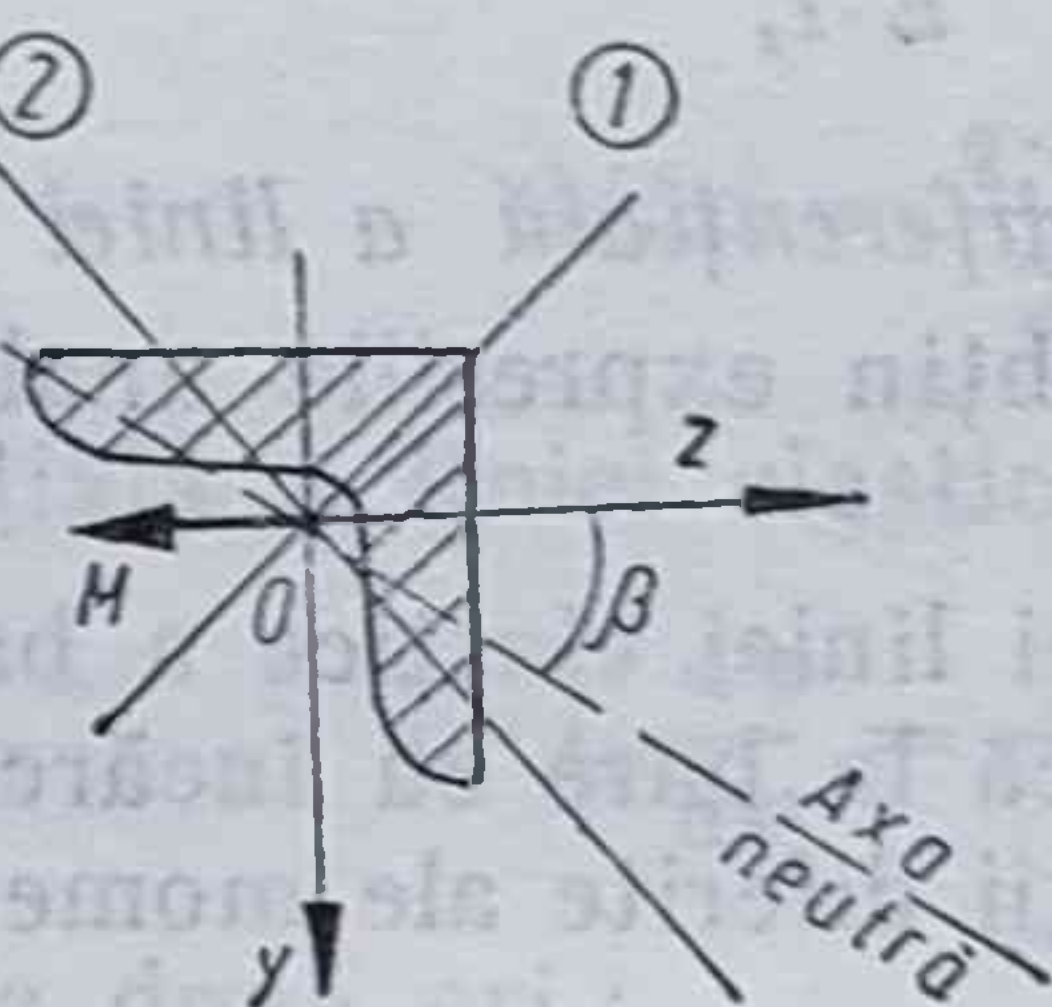
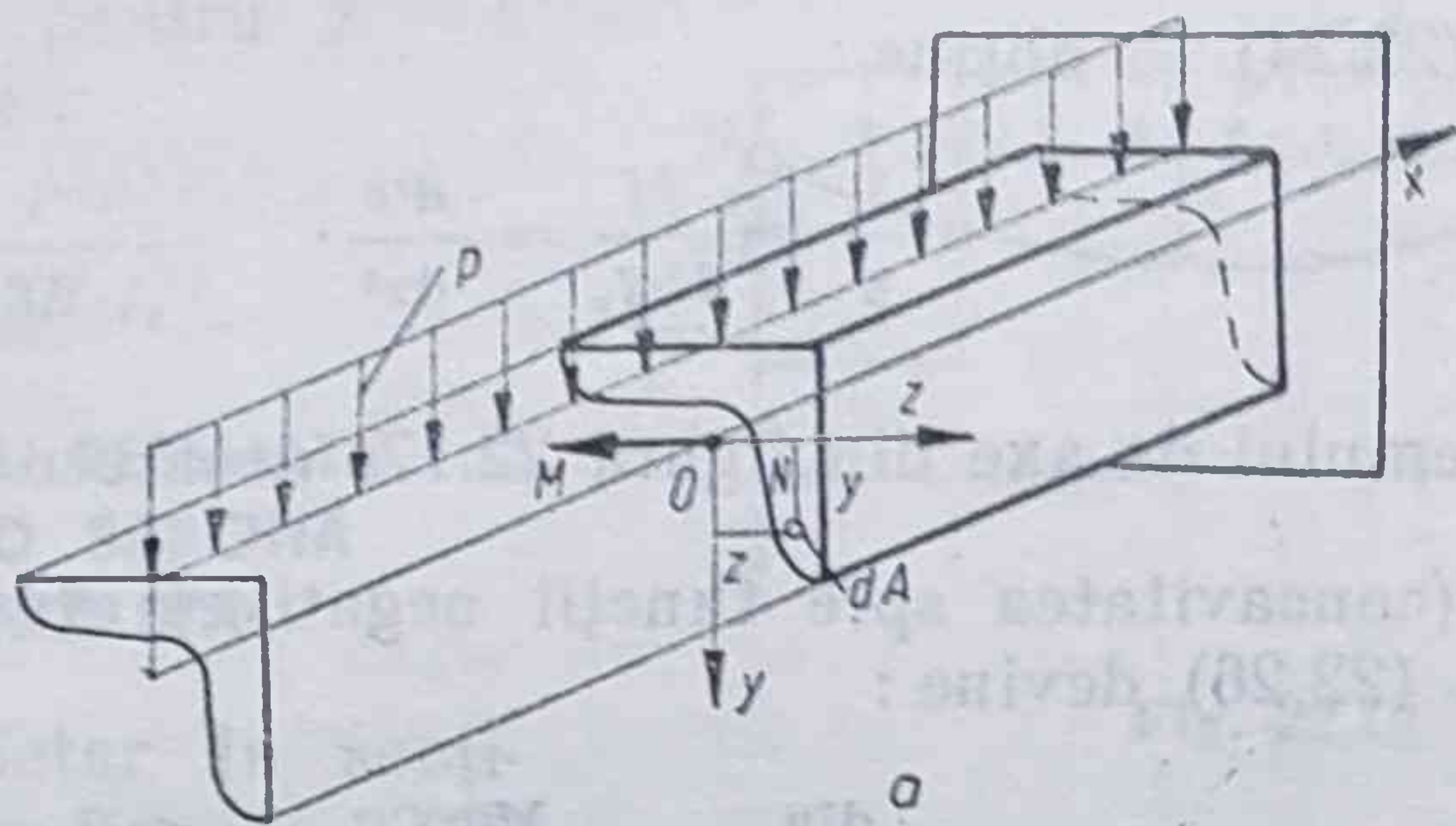


Fig. 22.16

Ecuatia axei neutre se obtine anulind expresia (22.23).

Se obtine : $y = \frac{I_{zy}}{I_y} z$,

deci panta dreptei respective este $\operatorname{tg} \beta = \frac{I_{zy}}{I_y}$ (v. fig. 22.16, b).

Planul care contine axa deformata a barei este perpendicular pe axa neutra. El nu coincide cu planul fortelor, care este perpendicular pe vectorul M . De aici denumirea de incovoiere oblica.

22.5. DEFORMATIILE BARELOR DREPT SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE

Admitind valabilitatea ipotezei lui Bernoulli, studiul deformatiilor barelor drepte solicitate la incovoiere se reduce la studiul formei deformate a axei barei, denumita *linia elastica* a barei.

Se noteaza cu v — sageata barei (deplasarea pe directia y) in sectiunea x si cu φ unghiul de rotire al sectiunii transversale, egal cu inclinarea tangentei la linia elastica a barei (fig. 22.17).

Admitind ipoteza micilor deformatii (v. subcap. 18.4), se fac urmatoarele aproximari :

$$\frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \cong \varphi, \quad (22.24)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \cong \frac{d^2v}{dx^2}.$$

(22.25)

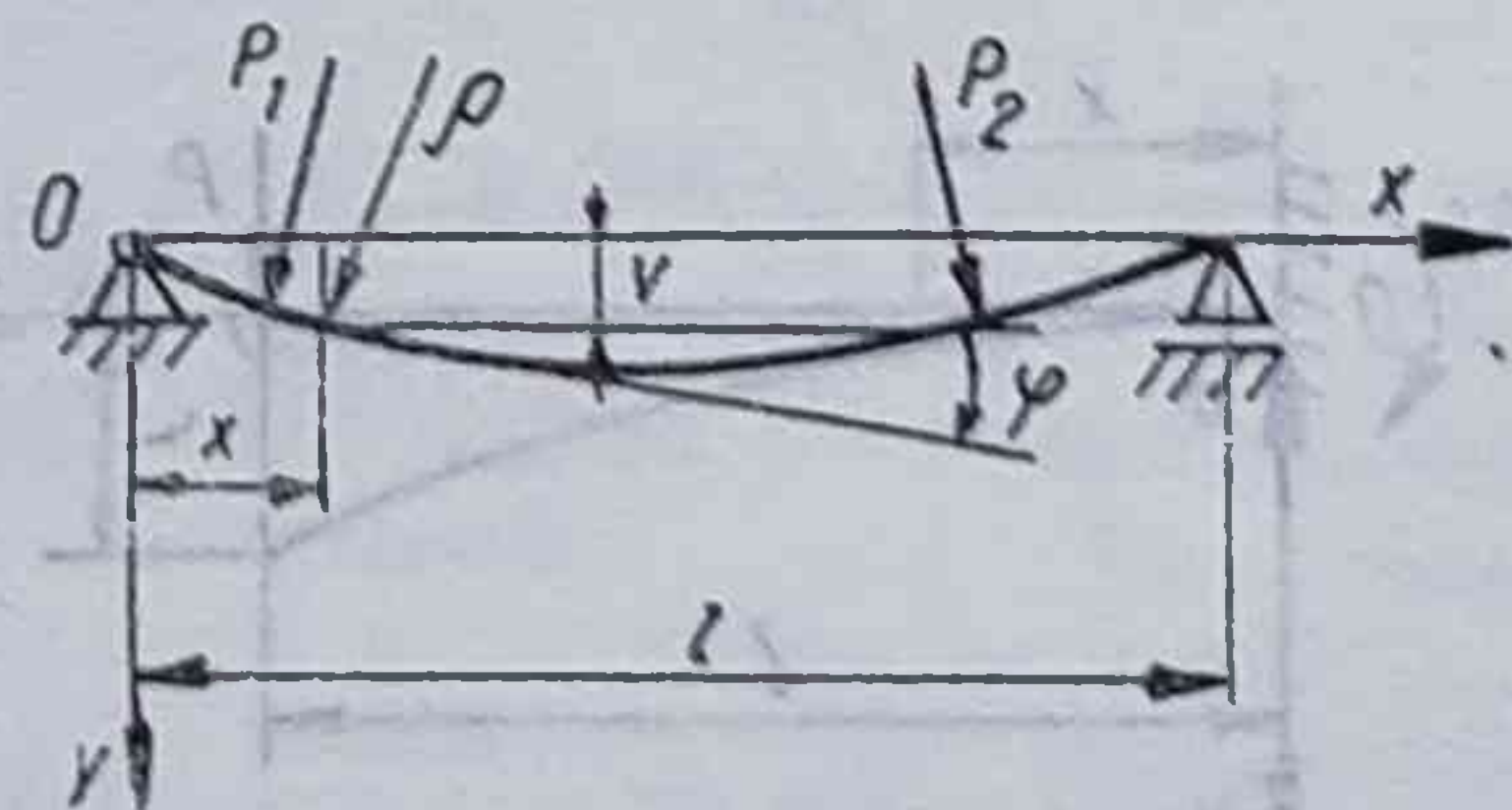


Fig. 22.17

Din relația (22.24) se obține :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I_z} = \frac{d^2 v}{dx^2}. \quad (22.26)$$

În cazul sistemului de axe din figura 22.17, deoarece derivata a doua $\frac{d^2 v}{dx^2}$ este negativă (concavitatea spre funcții negative) când momentul M este pozitiv, relația (22.26) devine :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = - \frac{M(x)}{E \cdot I_z}. \quad (22.27)$$

Relația (22.27) se numește *ecuația diferențială a liniei elastice a barei*.

Prin integrarea acestei ecuații se obțin expresiile analitice ale pantei și săgeții în orice secțiune a barei.

Metoda integrării analitice a ecuației liniei elastice a barei, prezentată în continuare prin două exemple, se aplică la bare cu încărcare relativ simplă, cu maximum două deschideri cu ecuații diferite ale momentului încovoietor.

22.5.1. BARA ÎN CONSOLĂ ÎNCĂRCATĂ CU O FORȚĂ ÎN CAPĂT

Se consideră bara din figura 22.18. Momentul încovoietor în secțiunea x are expresia :

$$M(x) = -P \cdot l + P \cdot x.$$

Ecuația diferențială a liniei elastice este :

$$E \cdot I_z \frac{d^2 v}{dx^2} = -M(x) = P \cdot l - P \cdot x.$$

Prin două integrări succesive se obține :

$$E \cdot I_z \frac{dv}{dx} = E \cdot I_z \cdot \varphi = P \cdot l \cdot x - \frac{P \cdot x^2}{2} + C_1,$$

$$E \cdot I_z \cdot v = P \cdot l \frac{x^2}{2} - \frac{P \cdot x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2.$$

Constantele de integrare C_1 și C_2 se determină pe baza condițiilor la limită ; în încăstrare, panta și săgeata sînt nule :

$$\varphi|_{x=0} = 0 ; \quad v|_{x=0} = 0.$$

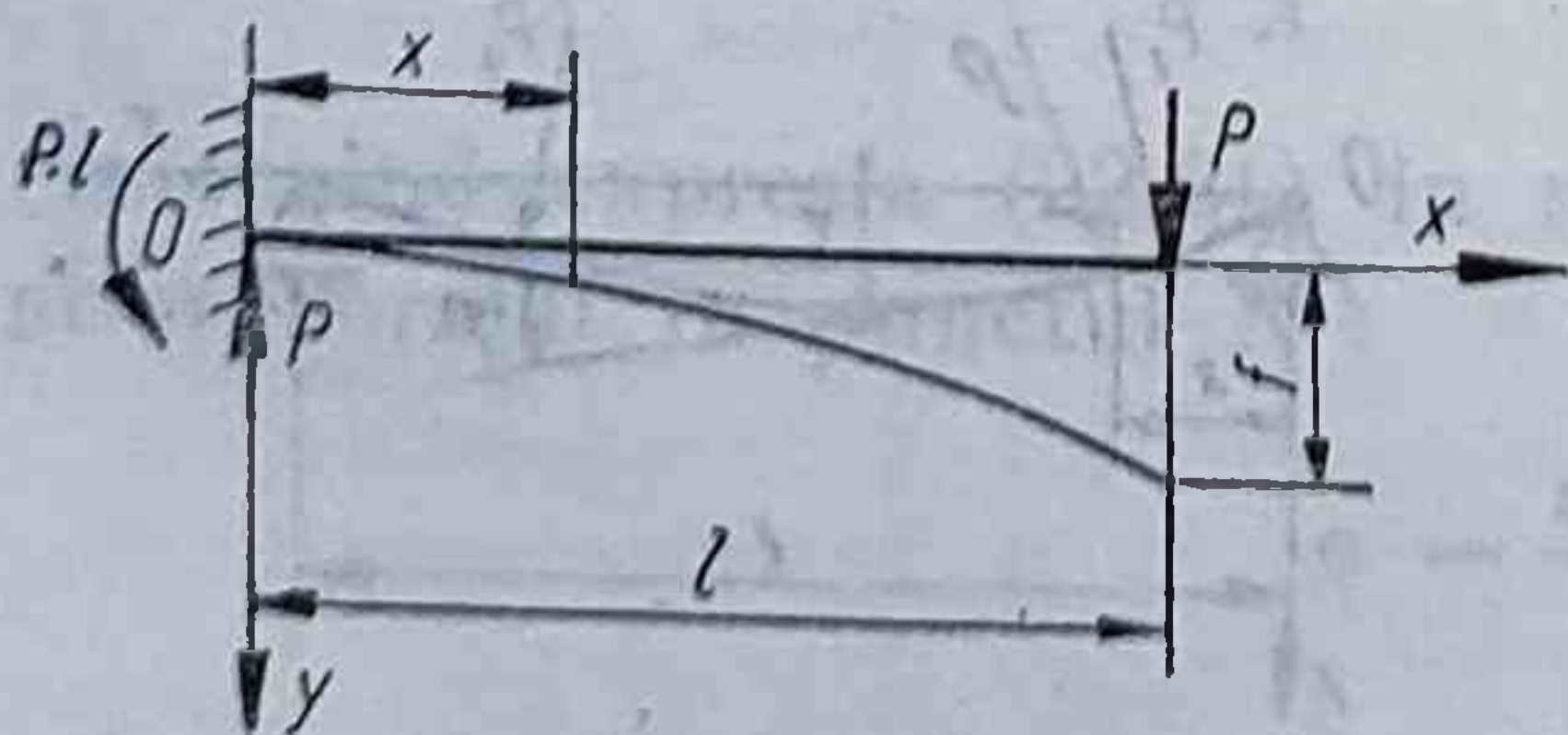


Fig. 22.18

Rezultă $C_1 = C_2 = 0$, deci expresiile pantei și săgeții devin :

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{P \cdot l}{E \cdot I_z} \left(x - \frac{x^2}{2l} \right), \\ v &= \frac{P \cdot l^3}{E \cdot I_z} \left(\frac{x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{6l^3} \right). \end{aligned} \quad (22.28)$$

În capătul barei, pentru $x = l$, săgeata maximă este :

$$v_{max} = f = \frac{P \cdot l^3}{3E \cdot I_z}$$

22.5.2. BARA SIMPLU REZEMATĂ INCĂRCATĂ CU O SARCINĂ UNIFORM DISTRIBUITĂ

Momentul încovoietor în secțiunea x a barei din figura 22.19 are expresia

$$M(x) = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

Ecuatia diferențială a liniei elastice este :

$$E \cdot I_z \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{q \cdot l}{2} x + \frac{q \cdot x^2}{2}$$

Se integrează de două ori :

$$E \cdot I_z \cdot \varphi = -\frac{q \cdot l \cdot x^2}{4} + \frac{q \cdot x^3}{6} + C_1$$

$$E \cdot I_z \cdot v = -\frac{q \cdot l \cdot x^3}{12} + \frac{q \cdot x^4}{24} + C_1 \cdot x + C_2$$

apoi se determină constantele de integrare din condițiile ca pe reazeme săgeata să fie nulă :

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0.$$

Prima condiție dă $C_2 = 0$, iar a doua $C_1 = \frac{q \cdot l^3}{24E \cdot I_z}$.

Rezultă ecuațiile de deformații :

$$\varphi = \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I_z} \left(\frac{1}{24} + \frac{x^3}{6l^3} - \frac{x^2}{4l^2} \right),$$

$$v = \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_z} \left(\frac{x}{24l} + \frac{x^4}{24l^4} - \frac{x^3}{12l^3} \right) = \frac{q}{24E \cdot I} (l^3 \cdot x + x^4 - 2l \cdot x^3). \quad (22.29)$$

Săgeata maximă la mijlocul barei (pentru $x = \frac{l}{2}$) este :

$$f = \frac{5q \cdot l^4}{384E \cdot I_z}$$

Unghiul pe reazemul din stînga (pentru $x = 0$) este

$$\varphi_1 = \frac{q \cdot l^3}{24E \cdot I_z}$$

Alte metode pentru calculul deformațiilor sînt prezentate în capitolul 27.

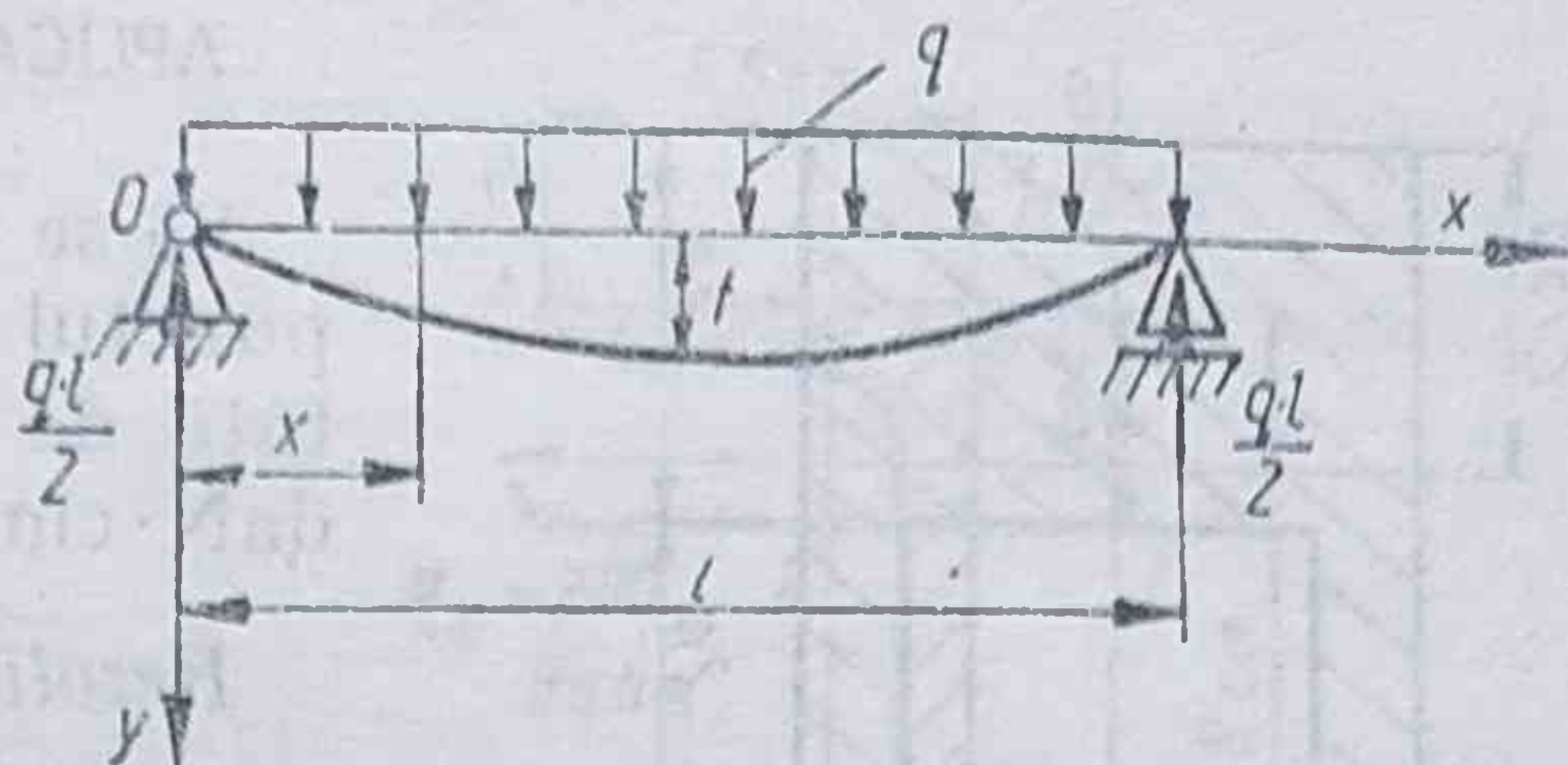


Fig. 22.19

APLICAȚIA 1

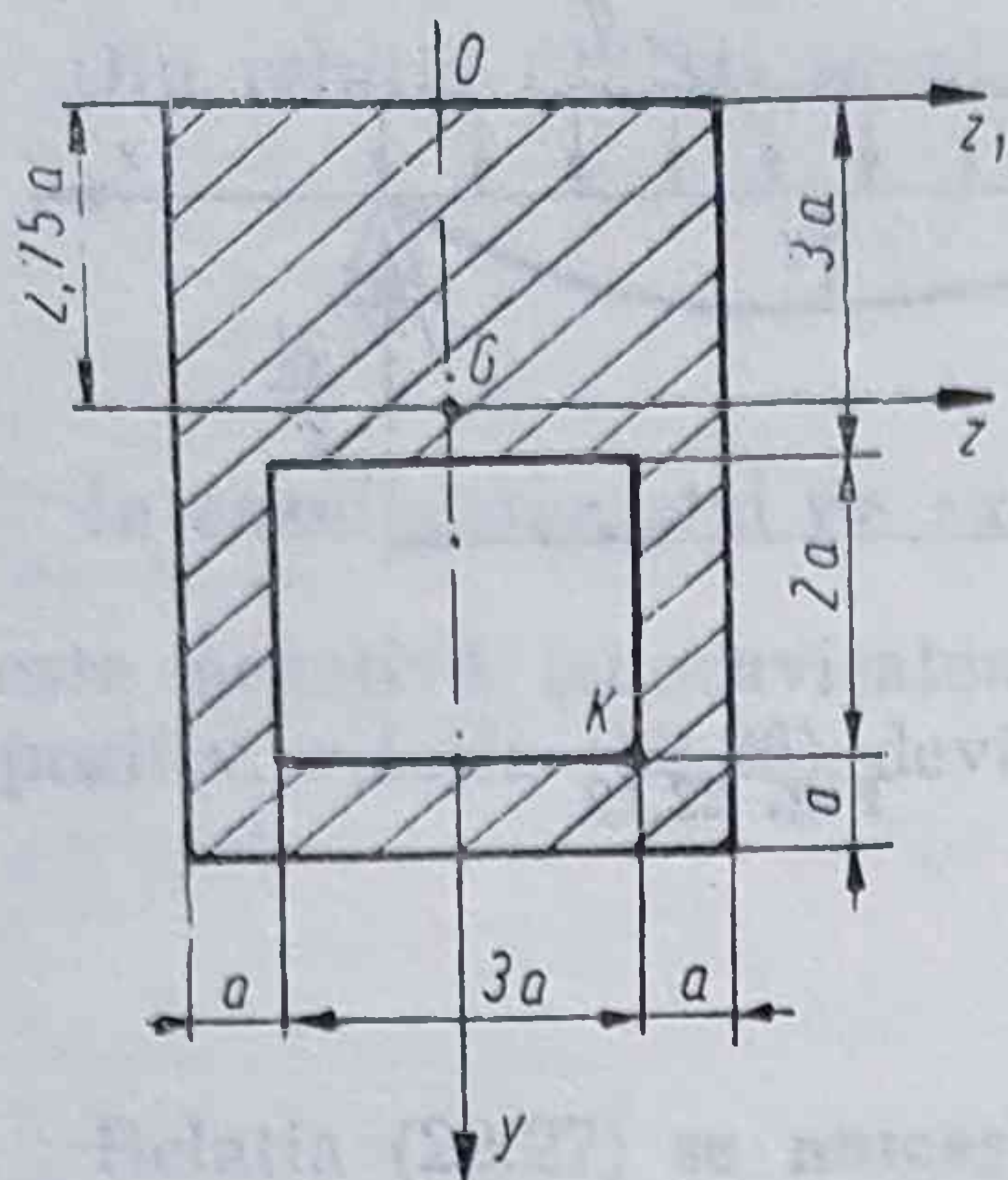


Fig. 22.20

Să se calculeze efortul unitar normal σ_K în punctul K al secțiunii din figura 22.20, solici-tată de un moment încovoietor $M_z = 5\,000$ daN·cm, dacă $a = 1$ cm.

Rezolvare

Se determină poziția centrului de greutate al figurii. Luînd ca axă de referință Oz_1 , latura de sus a figurii, rezultă :

$$y_G = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} = \frac{30a^2 \cdot 3a - 6a^2 \cdot 4a}{30a^2 - 6a^2} = 2,75a.$$

Se calculează momentul de inerție față de axa Gz , utilizînd formula lui Steiner :

$$I_z = \frac{5a(6a)^3}{12} + 30a^2 \frac{a^2}{16} - \frac{3a \cdot 8a^3}{12} - 6a^2 \cdot \frac{25a^2}{16} = 80,5a^4.$$

Din formula lui Navier rezultă

$$\sigma_K = \frac{M \cdot y_K}{I_z} = \frac{5000 \cdot 2,25}{80,5} = 139,75 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

APLICAȚIA 2

Să se dimensioneze bara din figura 19.12, a din oțel cu $\sigma_a = 800$ daN/cm², avînd secțiunea din figura 22.21.

Rezolvare

Din figura 19.12, a rezultă $M_{max} = 25$ daN·m, deci

$$W_{z_{nec}} = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = \frac{2500}{800} = 3,125 \text{ cm}^3.$$

Se calculează poziția centrului de greutate al secțiunii din figura 22.21 față de axa z' :

$$y_G = \frac{6a^2 \cdot 0,75a + 2a^2 \cdot 2a}{8a^2} = 1,0625a.$$

Momentul de inerție față de axa Gz este :

$$I_z = \frac{4a(1,5a)^3}{12} + 6a^2(0,3125a)^2 + \frac{2a \cdot a^3}{12} + 2a^2(0,9375a)^2 = 3,635a^4,$$

iar modulul de rezistență axial al secțiunii :

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{3,635a^4}{1,4375a} = 2,528a^3.$$

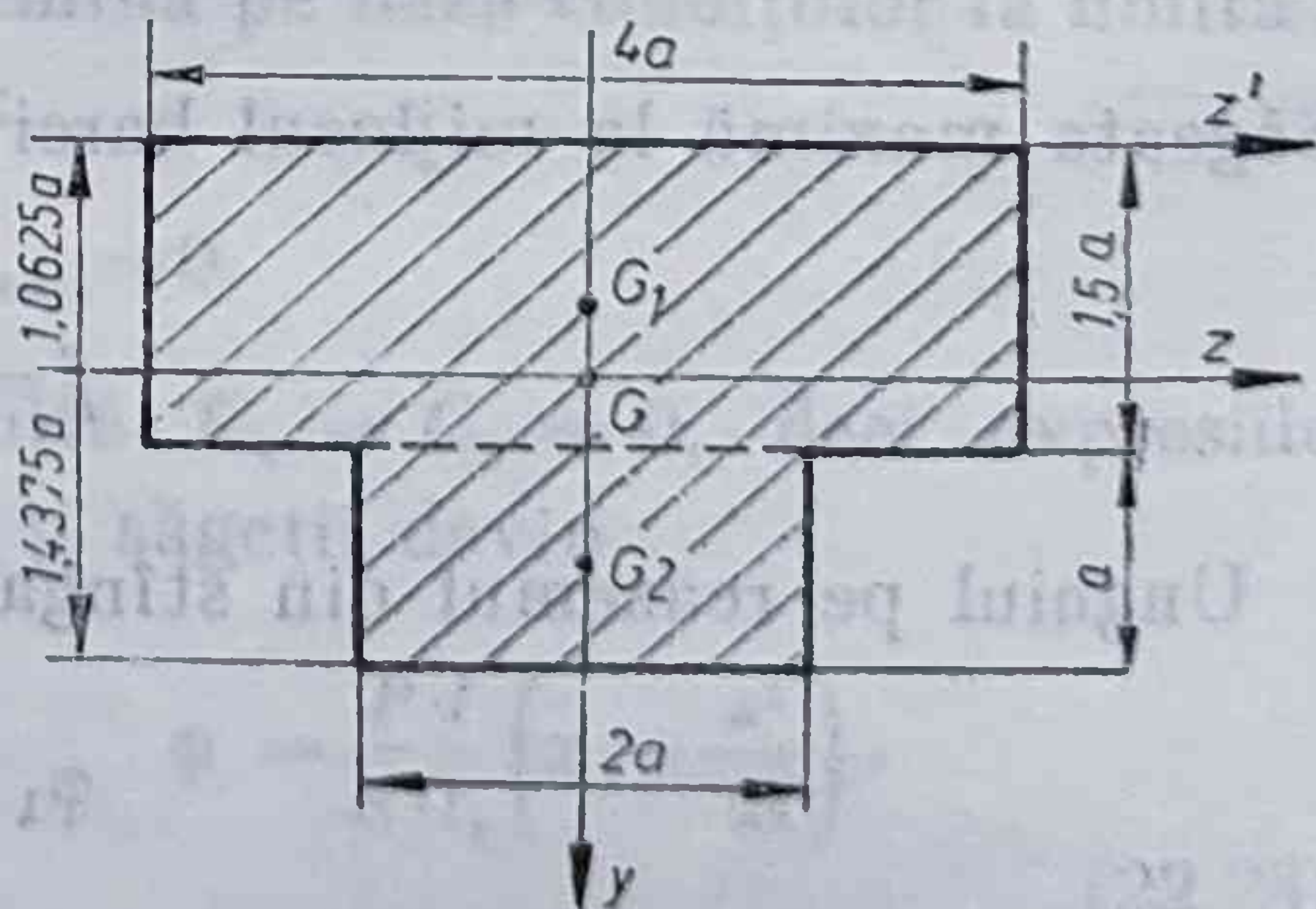


Fig. 22.21

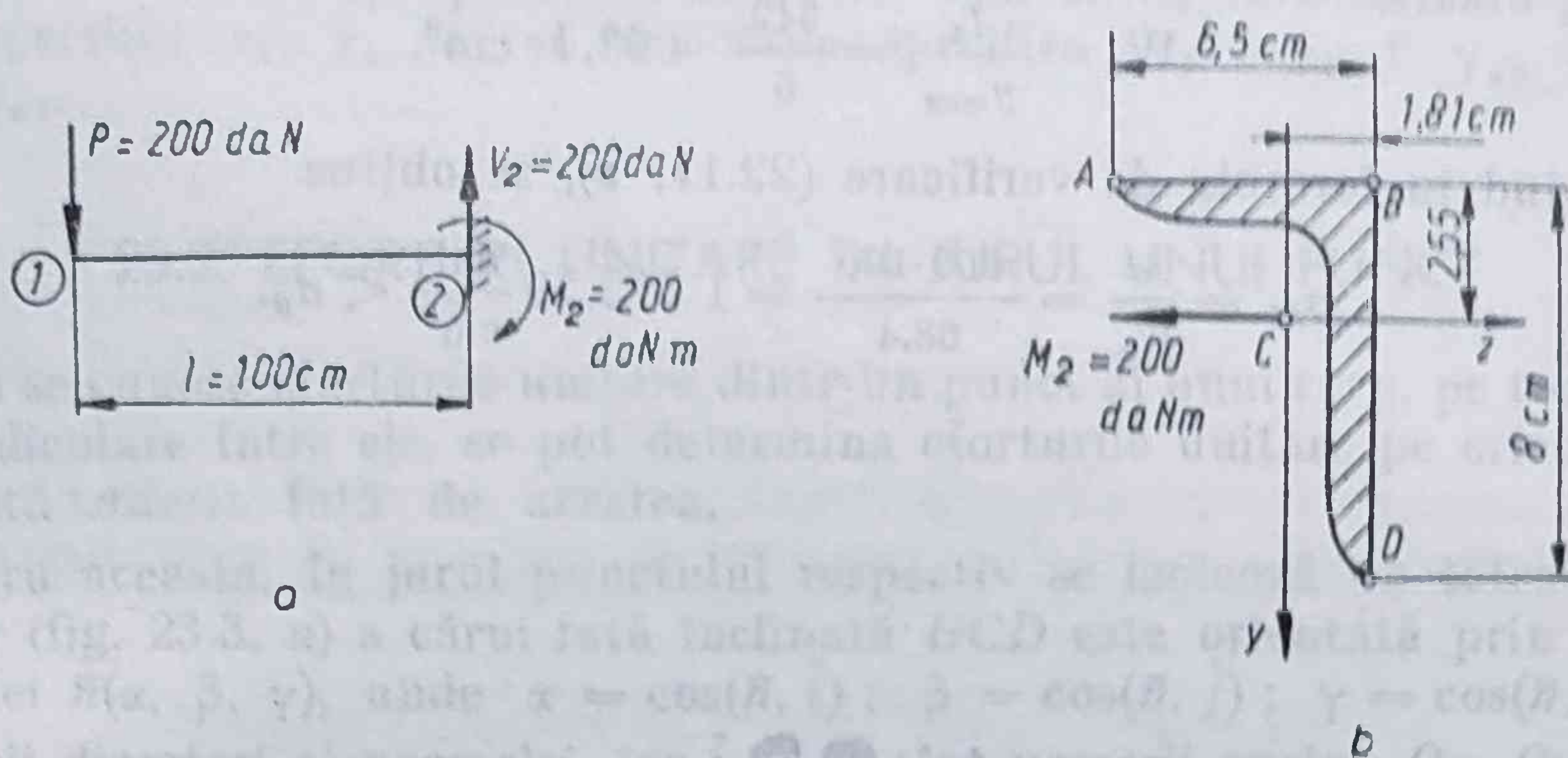


Fig. 22.22

Egalind cele două expresii ale lui W_z , adică $2,528a^3 = 3,125$, rezultă $a = 1,073$ cm, deci se alege

$$a = 11 \text{ mm.}$$

APLICAȚIA 3

Pentru bara din figura 22.22, a, să se calculeze eforturile unitare normale în punctele A, B și D ale secțiunii din încastrare. Bara este din oțel cornier cu aripi neegale LL 80 × 65 × 10 (fig. 22.22, b).

Rezolvare

Pentru profilul LL 80 × 65 × 10, în STAS 425-70 (anexa 6, tabelul 2), se găsesc momentele de inerție ale secțiunii: $I_z = 82,2 \text{ cm}^4$; $I_y = 48,3 \text{ cm}^4$ și se poate calcula $I_{zy} = 36,92 \text{ cm}^4$.

Aplicînd formula (22.23): $\sigma = \frac{z \cdot I_{zy} - y \cdot I_y}{I_z \cdot I_y - I_{zy}^2} M$, se obțin

$$\sigma_A = \frac{-4,69 \cdot 36,92 + 2,55 \cdot 48,3}{82,2 \cdot 48,3 - 36,92^2} 2 \cdot 10^4 = -383,48 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2},$$

$$\sigma_B = \frac{1,81 \cdot 36,92 + 2,55 \cdot 48,3}{82,2 \cdot 48,3 - 36,92^2} 2 \cdot 10^4 = 1457,44 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2},$$

$$\sigma_D = \frac{1,81 \cdot 36,92 - 5,45 \cdot 48,3}{82,2 \cdot 48,3 - 36,92^2} 2 \cdot 10^4 = -1506,68 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

APLICAȚIA 4

Să se verifice grinda reprezentată în figura 19.12, e, realizată din două profile I 10 așezate ca în figura 22.23, dacă $\sigma_a = 1400 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare

Din figura 19.12, e rezultă: $|M_{max}| = 900 \text{ daN} \cdot \text{m}$.

În anexa 6, tabelul 4, pentru profilul I 10 se găsește momentul de inerție $I'_z = 171 \text{ cm}^4$. Pentru secțiunea grinzii, momentul de inerție I_z va fi:

$$I_z = 2I'_z = 342 \text{ cm}^4,$$

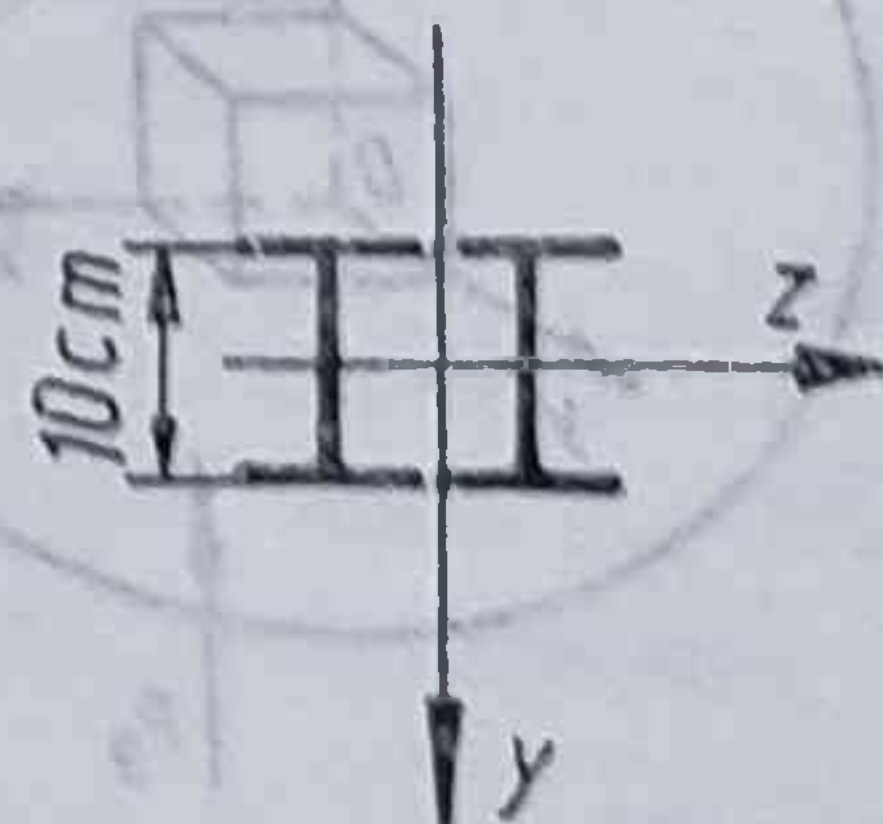


Fig. 22.23

iar

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{342}{5} = 68,4 \text{ cm}^3.$$

Înlocuind în formula de verificare (22.11, b), se obține

$$\sigma_{ef} = \frac{M}{W_z} = \frac{900 \cdot 100}{68,4} = 1\,315,79 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} < \sigma_a.$$

23.

ELEMENTE DE TEORIA ELASTICITĂȚII

23.1. STAREA GENERALĂ DE EFORTURI UNITARE ȘI DE DEFORMAȚIE

Se consideră un corp elastic în echilibru static sub acțiunea forțelor exterioare P_1, P_2, P_3 (fig. 23.1). Dacă se decupează din interiorul corpului un paralelipiped elementar de laturi dx, dy, dz , pe fiecare față a acestui element de volum va acționa un efort unitar de direcție oarecare, ce poate fi descompus în trei componente paralele cu axele $Oxyz$, reprezentînd cîte un efort unitar normal și două eforturi unitare tangențiale (fig. 23.2). Eforturile unitare normale σ au un indice corespunzător axei cu care sînt paralele, în timp ce eforturile unitare tangențiale τ au doi indici, primul reprezentînd axa cu care sînt paralele, al doilea corespunzînd axei normale la secțiune.

Prin urmare, în cazul general de solicitare, starea de eforturi unitare se caracterizează prin trei eforturi unitare normale $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ și șase eforturi unitare tangențiale, care, conform principiului dualității (v. § 22.3.1), sînt egale două cîte două

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

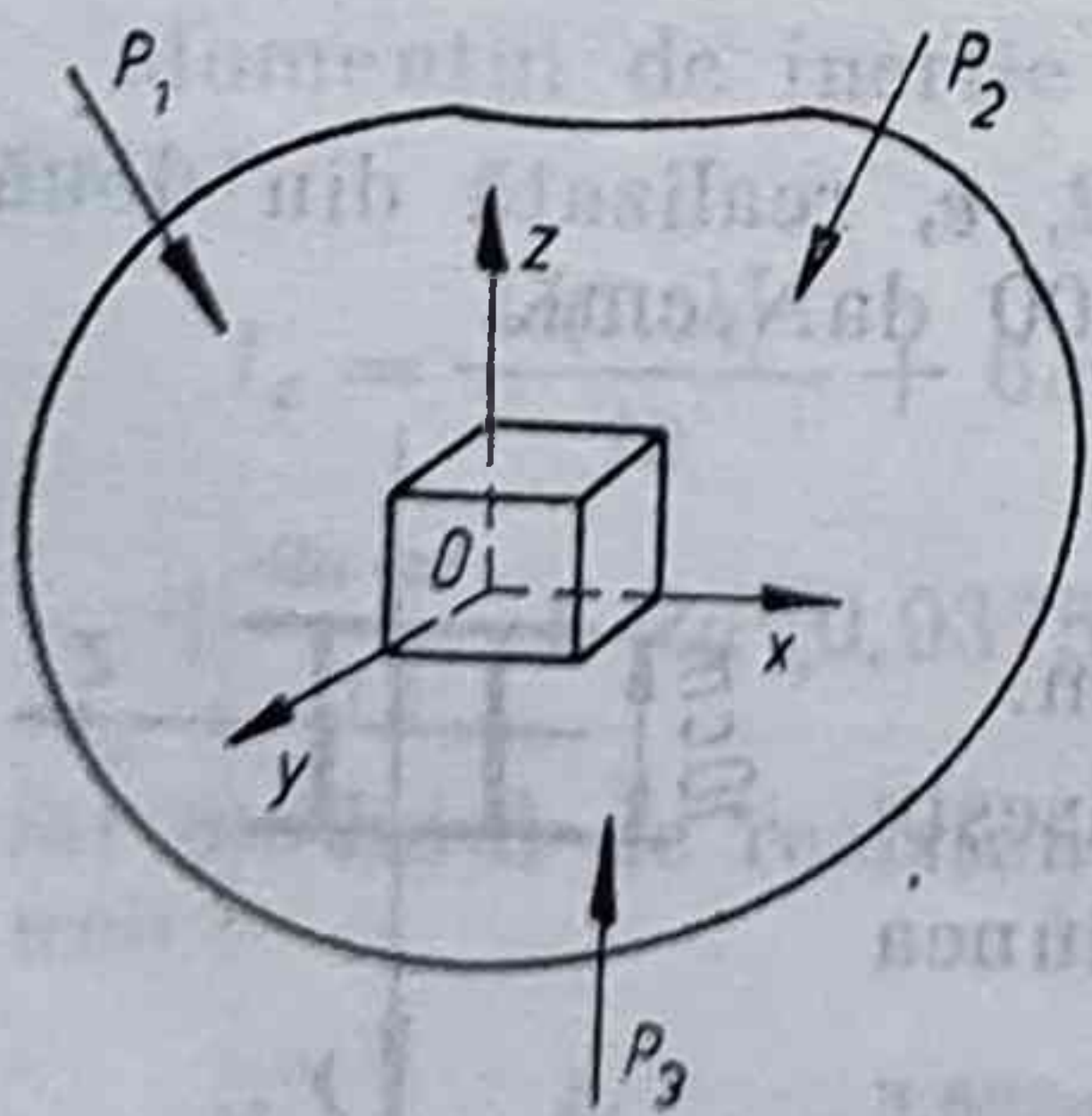


Fig. 23.1

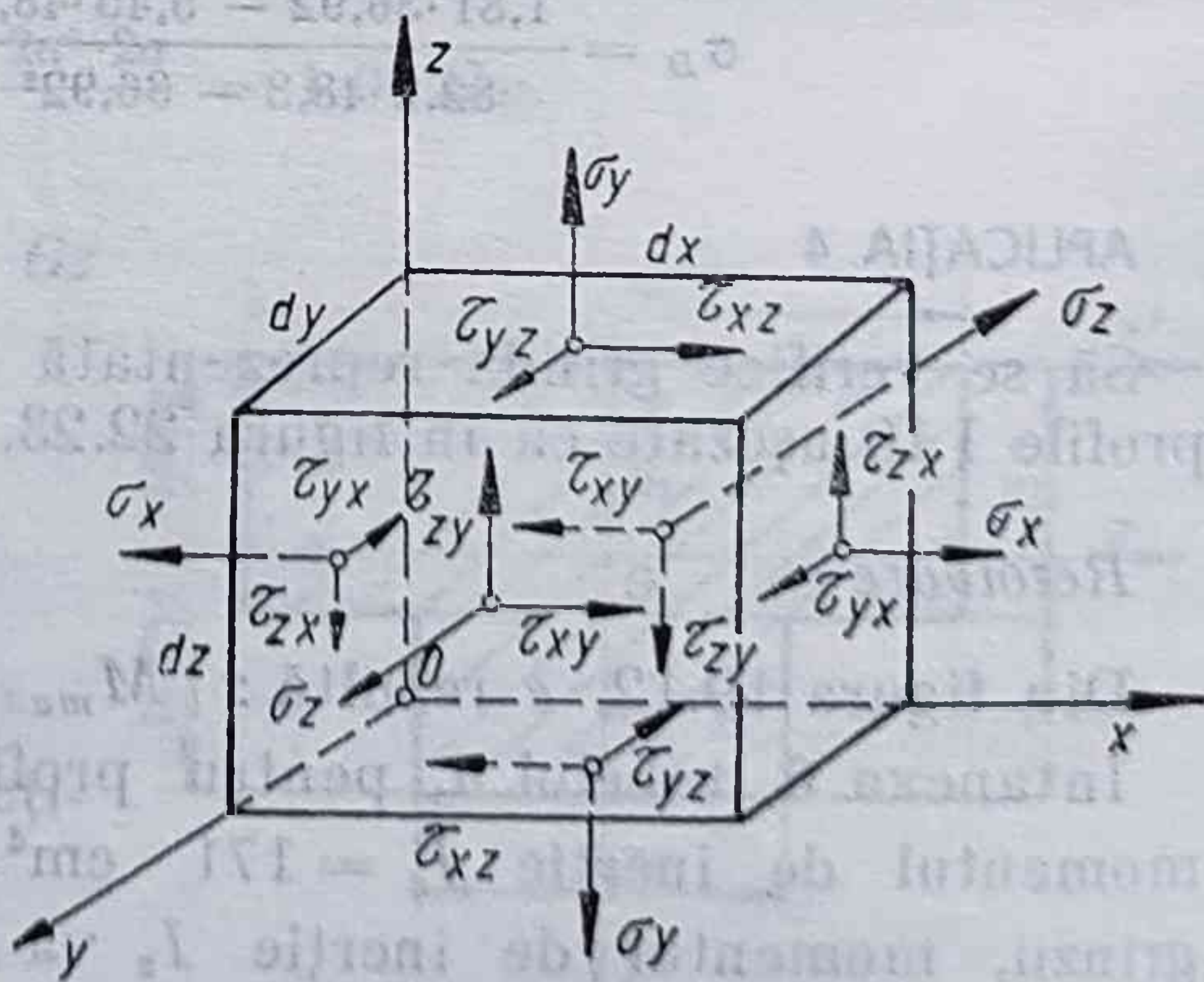


Fig. 23.2

Concomitent în corp apare și o stare de deformație, caracterizată prin lungirile specifice $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ și lunecările specifice $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$; $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$; $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$.

23.2. EFORTURI UNITARE ÎN JURUL UNUI PUNCT

Dacă se cunosc eforturile unitare dintr-un punct al unui corp, pe trei direcții perpendiculare între ele, se pot determina eforturile unitare pe orice direcție orientată diferit față de acestea.

Pentru aceasta, în jurul punctului respectiv se izolează un tetraedru elementar (fig. 23.3, a) a cărui față înclinată BCD este orientată prin versorul normalei $\bar{n}(\alpha, \beta, \gamma)$, unde $\alpha = \cos(\bar{n}, \bar{i})$; $\beta = \cos(\bar{n}, \bar{j})$; $\gamma = \cos(\bar{n}, \bar{k})$ sînt cosinuşii directori ai normalei, iar $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sînt versorii axelor Ox, Oy, Oz .

Se presupune că se cunosc eforturile unitare normale și tangențiale pe cele trei fețe ale tetraedrului din planele de coordonate și se cere determinarea efortului unitar \bar{p} de componente p_x, p_y, p_z ce acționează pe fața BCD .

Pentru exprimarea componentelor lui \bar{p} în funcție de $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, se scrie echilibrul forțelor ce acționează asupra tetraedrului elementar $OBCD$. Dacă dA este aria suprafeței BCD , ariile suprafețelor OCD, ODB și OBC au expresiile :

$$dA_x = \alpha \cdot dA; \quad dA_y = \beta \cdot dA; \quad dA_z = \gamma \cdot dA. \quad (23.1)$$

Ecuatia de proiecții a forțelor pe axa Ox (fig. 23.3, b) este :

$$p_x \cdot dA = \sigma_x \cdot dA_x + \tau_{xy} \cdot dA_y + \tau_{xz} \cdot dA_z, \quad (23.2)$$

sau, înlocuind (23.1) în (23.2) :

$$p_x = \sigma_x \cdot \alpha + \tau_{xy} \cdot \beta + \tau_{xz} \cdot \gamma. \quad (23.3)$$

La fel, din ecuațiile de proiecții pe axele Oy și Oz , rezultă :

$$p_y = \tau_{yx} \cdot \alpha + \sigma_y \cdot \beta + \tau_{yz} \cdot \gamma, \quad (23.4)$$

$$p_z = \tau_{zx} \cdot \alpha + \tau_{zy} \cdot \beta + \sigma_z \cdot \gamma.$$

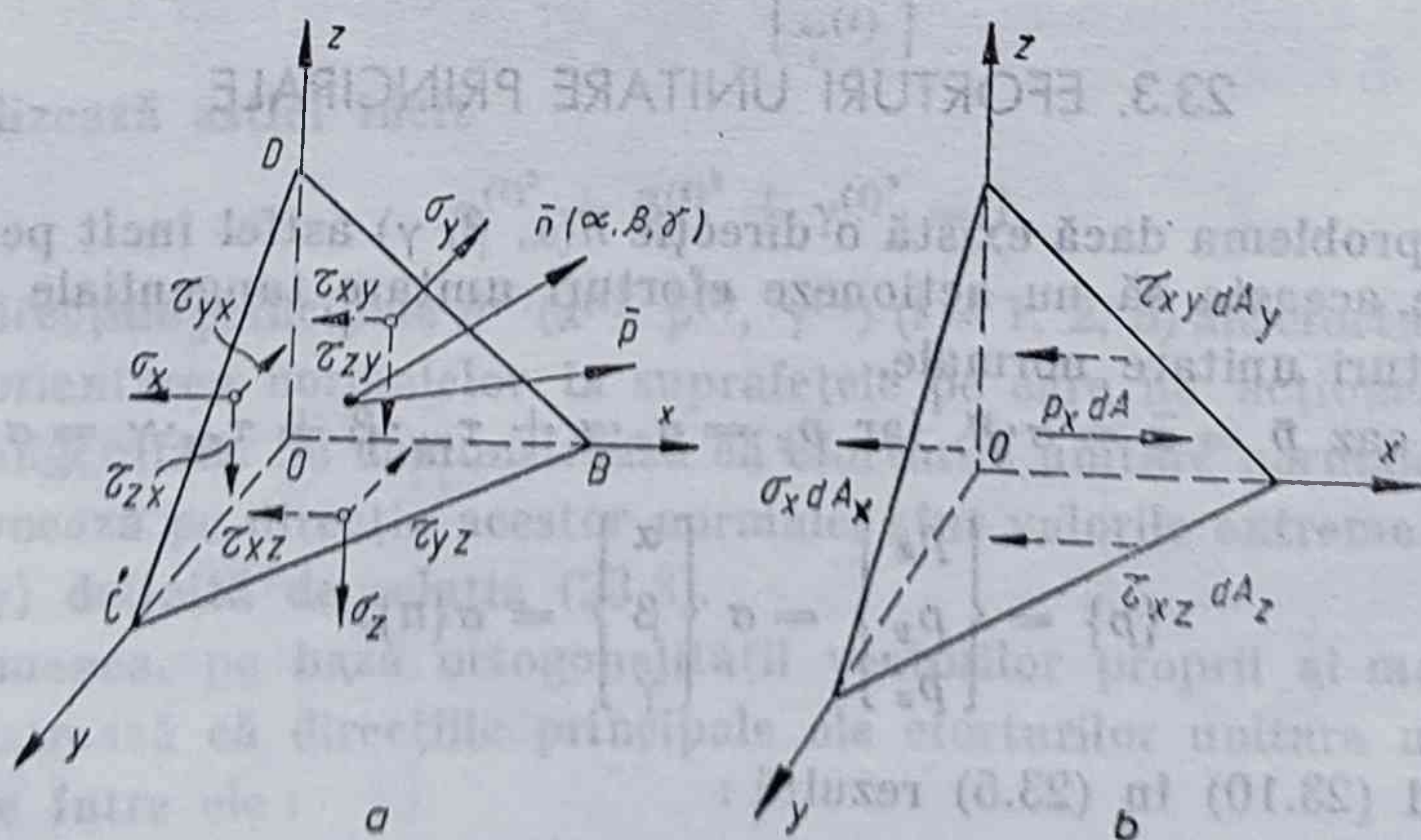


Fig. 23.3

Expresiile (23.3) și (23.4) se pot scrie matricial :

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix},$$

sau prescurtat :

$$\{p\} = [T_\sigma]\{n\}. \quad (23.5)$$

Se descompune efortul unitar \bar{p} în componenta normală σ_n și cea tangențială τ_n . Efortul unitar normal σ_n este egal cu proiecția lui \bar{p} pe direcția versorului \bar{n}

$$\sigma_n = \bar{p} \cdot \bar{n} = \{p\}^T \{n\} = p_x \cdot \alpha + p_y \cdot \beta + p_z \cdot \gamma. \quad (23.6)$$

Din relația (23.5) se obține, prin transpunere,

$$\{p\}^T = \{n\}^T [T_\sigma]^T = \{n\}^T [T_\sigma], \quad (23.7)$$

unde s-a utilizat proprietatea de simetrie a matricei eforturilor unitare $[T_\sigma]$, rezultat direct al principiului dualității eforturilor unitare tangențiale.

Înlocuind (23.7) în (23.6) se obține :

$$\begin{aligned} \sigma_n = \{n\}^T [T_\sigma] \{n\} &= \sigma_x \cdot \alpha^2 + \sigma_y \cdot \beta^2 + \sigma_z \cdot \gamma^2 + \\ &+ 2\tau_{xy} \cdot \alpha \cdot \beta + 2\tau_{yz} \cdot \beta \cdot \gamma + 2\tau_{zx} \cdot \gamma \cdot \alpha. \end{aligned} \quad (23.8)$$

Efortul unitar tangențial τ_n este egal cu proiecția lui \bar{p} pe planul secțiunii înclinate $\tau_n = |\bar{p} \times \bar{n}|$.

$$\begin{aligned} \text{Dar : } \bar{p} \times \bar{n} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = (p_y \cdot \alpha - p_z \cdot \beta) \bar{i} + (p_z \cdot \alpha - p_x \cdot \gamma) \bar{j} + \\ &+ (p_x \cdot \beta - p_y \cdot \alpha) \bar{k}, \end{aligned}$$

$$\text{deci : } \tau_n = \sqrt{(p_y \cdot \alpha - p_z \cdot \beta)^2 + (p_z \cdot \alpha - p_x \cdot \gamma)^2 + (p_x \cdot \beta - p_y \cdot \alpha)^2}. \quad (23.9)$$

23.3. EFORTURI UNITARE PRINCIPALE

Se pune problema dacă există o direcție $\bar{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ astfel încît pe suprafața normală pe aceasta să nu acționeze eforturi unitare tangențiale $\tau_n = 0$, ci numai eforturi unitare normale.

În acest caz $\bar{p} = \bar{\sigma} = \sigma \cdot \bar{n}$, iar $p_x = \sigma_x \cdot \alpha + \tau_{xy} \cdot \beta + \tau_{xz} \cdot \gamma = \sigma \cdot \alpha$,

$$\text{deci : } \{p\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = \sigma \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \sigma \{n\}. \quad (23.10)$$

Înlocuind (23.10) în (23.5) rezultă :

$$[T_\sigma] \{n\} = \sigma \{n\}. \quad (23.11)$$

Relația (23.11) definește problema de valori proprii a matricei $[T_\sigma]$, în care σ sînt valorile proprii, iar $\{n\}$ vectorii proprii. Se poate scrie :

$$[[T_\sigma] - \sigma[I]] \{n\} = \{0\}, \quad (23.12)$$

unde $[I]$ este matricea unitate.

Pentru ca sistemul algebric omogen (23.12) să aibă soluții nebanale, se pune condiția anulării determinantului coeficienților

$$\det[[T_\sigma] - \sigma[I]] = 0. \quad (23.13)$$

Relația (23.13), numită *ecuația caracteristică*, se scrie desfășurat :

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad (23.14)$$

reprezentînd o ecuație algebrică de gradul trei, de forma :

$$\sigma^3 - J_1 \cdot \sigma^2 + J_2 \cdot \sigma - J_3 = 0, \quad (23.15)$$

unde :

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$J_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \quad (23.16)$$

$$J_3 = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{zx}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} = \det[T_\sigma].$$

Soluțiile ecuației (23.15), care se notează $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, sînt *valorile proprii* ale matricei eforturilor unitare $[T_\sigma]$ și se numesc *eforturi unitare normale principale*. Lor le corespund *direcțiile principale* $\{n^{(i)}\}$ care satisfac relația ;

$$[[T_\sigma] - \sigma_i[I]] \{n^{(i)}\} = \{0\}, \quad (23.17)$$

și care reprezintă *vectorii proprii* ai matricei $[T_\sigma]$.

Vectorii

$$\{n^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} \alpha^{(i)} \\ \beta^{(i)} \\ \gamma^{(i)} \end{Bmatrix}$$

se normalizează astfel încît

$$\alpha^{(i)^2} + \beta^{(i)^2} + \gamma^{(i)^2} = 1. \quad (23.18)$$

Deci, direcțiile principale $\bar{n}^{(i)}(\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}, \gamma^{(i)})$ ($i = 1, 2, 3$) ale eforturilor unitare definesc orientarea normalelor la suprafețele pe care nu acționează eforturi unitare tangențiale. Se demonstrează că eforturile unitare normale principale, care acționează pe direcția acestor normale, sînt valorile extreme ale funcției $\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma)$ definită de relația (23.8).

De asemenea, pe baza ortogonalității vectorilor proprii ai matricei $[T_\sigma]$, se demonstrează că direcțiile principale ale eforturilor unitare normale sînt ortogonale între ele :

$$\{n^{(i)}\}^T \{n^{(j)}\} = 0, \quad i \neq j. \quad (23.19)$$

Rezultă că, dacă se izolează dintr-un corp elastic un element de volum paralelipedic avînd muchiile paralele cu direcțiile principale ale eforturilor unitare normale, pe fețele elementului acționează numai eforturi unitare normale de valori $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Se poate arăta că eforturile unitare tangențiale τ_n au valori extreme în planele bisectoare ale planelor definite de direcțiile principale ale eforturilor unitare normale. Aceste valori extreme sînt definite de

$$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_2 = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}; \quad \tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (23.20)$$

23.4. STAREA PLANĂ DE EFORTURI UNITARE

În cazul stării plane de eforturi unitare, se consideră eforturi unitare paralele numai cu două dintre axele de coordonate, independente de a treia variabilă (fig. 23.4).

23.4.1. EFORTURI UNITARE ÎN JURUL UNUI PUNCT

Se pune și aici problema variației eforturilor unitare în jurul unui punct. Pentru aceasta se consideră un element de volum prismatic cu baza triunghiulară (fig. 23.5). Se presupun cunoscute eforturile unitare $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ pe fețele paralele cu axele de coordonate și se cere calcularea eforturilor unitare σ și τ pe fața CD înclinată cu unghiul α .

Se notează cu A aria suprafeței CD , deci suprafața OD are aria $A \sin \alpha$, iar suprafața OC are aria $A \cos \alpha$.

Se scriu ecuațiile de proiecții ale forțelor pe direcția lui σ și a lui τ :

$$\sigma \cdot A - \sigma_x \cdot A \cos^2 \alpha - \sigma_y \cdot A \sin^2 \alpha - 2\tau_{xy} \cdot A \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\tau \cdot A - \sigma_x \cdot A \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \sigma_y \cdot A \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \tau_{yx} \cdot A \cos^2 \alpha -$$

$$- \tau_{xy} \cdot A \sin^2 \alpha = 0.$$

Ecuția de echilibru a momentelor față de mijlocul feței CD conduce la relația (23.13): $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

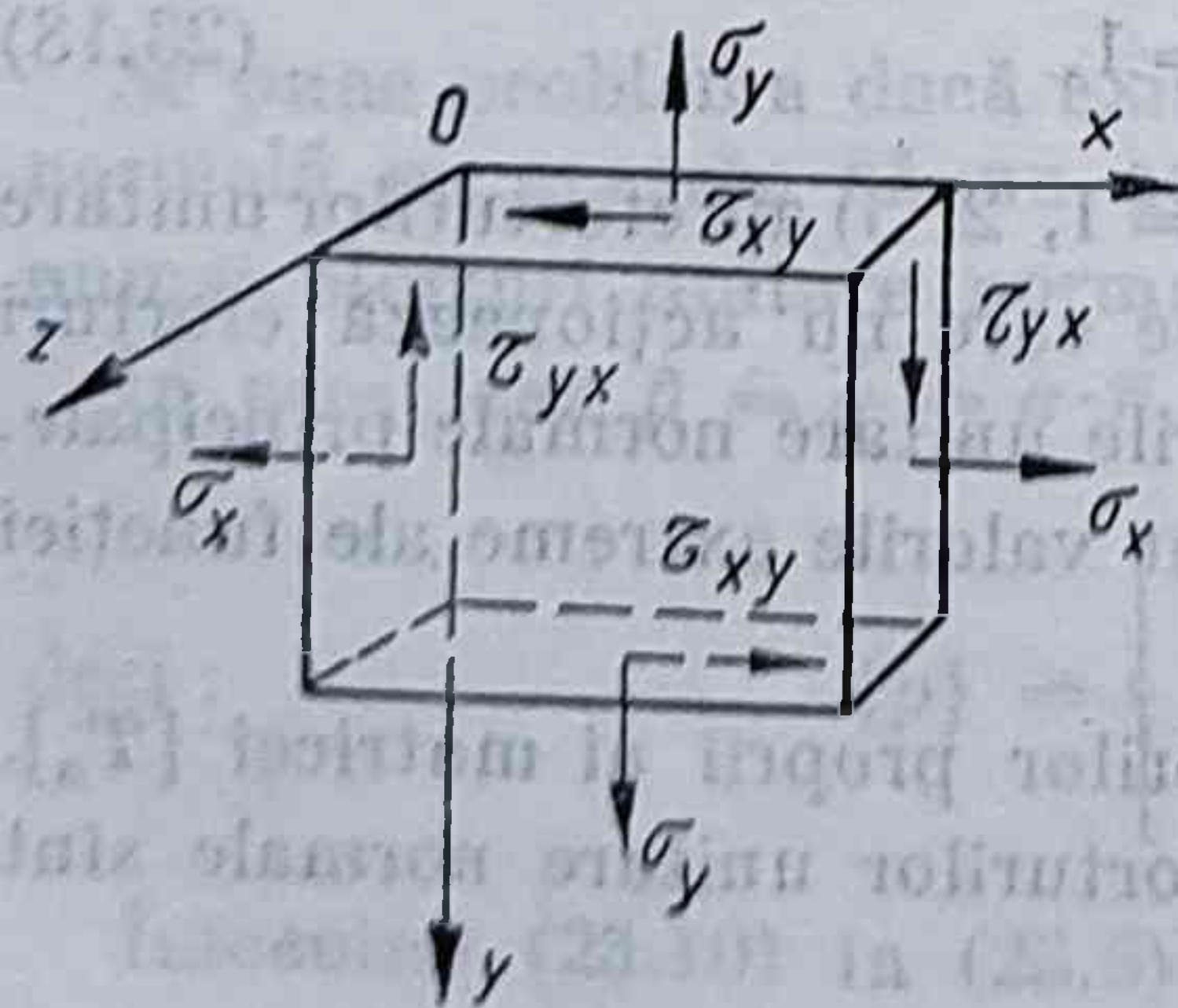


Fig. 23.4

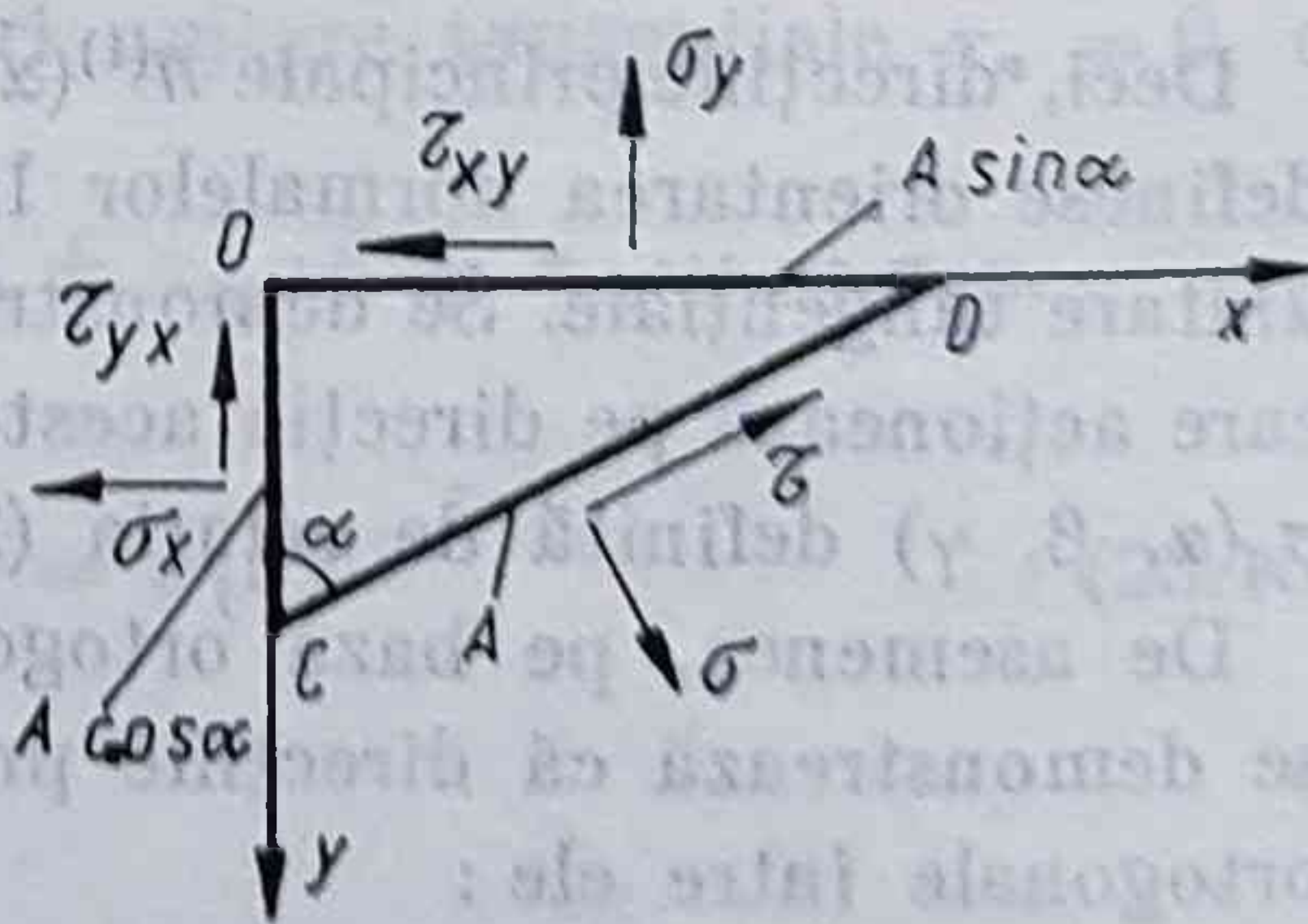


Fig. 23.5

Se obține : $\sigma = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$,

$$\tau = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha),$$

sau : $\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha, \quad (23.21)$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha. \quad (23.22)$$

23.4.2. EFORTURI UNITARE NORMALE PRINCIPALE.

DIRECȚII PRINCIPALE

Valorile extreme ale efortului unitar normal σ se obțin anulând derivata sa în raport cu unghiul α

$$\frac{d\sigma}{d(2\alpha)} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = -\tau = 0. \quad (23.23)$$

Rezultă : $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (23.24)$

relație care definește *direcțiile principale* ale eforturilor unitare normale. Pentru $0 \leq 2\alpha \leq 2\pi$, între cele două soluții $2\alpha_1$ și $2\alpha_2$ există relația $2\alpha_2 = 2\alpha_1 + \pi$; $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$, deci direcțiile principale sînt perpendiculare între ele.

Înlocuind valorile unghiului α date de relația (23.24) în (23.21) se obțin *eforturile unitare principale* :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (23.25)$$

Valorile extreme ale efortului unitar tangențial τ se obțin din relația :

$$\frac{d\tau}{d(2\alpha)} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha = 0,$$

care se mai scrie :

$$\operatorname{tg} 2\alpha' = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha}. \quad (23.26)$$

Rezultă $2\alpha' = 2\alpha \pm \frac{\pi}{2}$, deci $\alpha' = \alpha \pm \frac{\pi}{4}$, astfel că eforturile unitare tangențiale extreme apar în secțiuni înclinate cu 45° față de direcțiile principale și au valorile :

$$\tau_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (23.27)$$

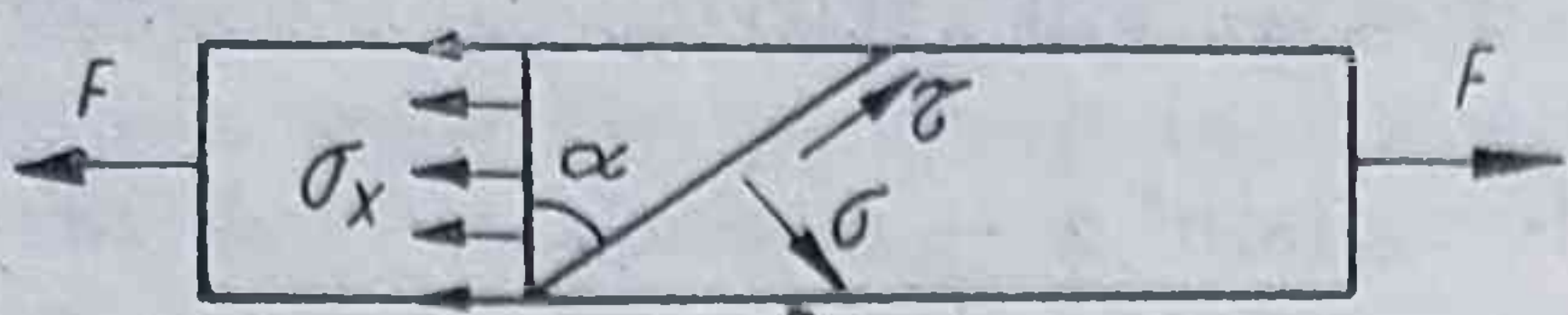


Fig. 23.6

23.4.3. CAZURI PARTICULARE ALE STĂRII PLANE DE EFORTURI

Starea liniară de eforturi unitare. Se pune problema determinării eforturilor unitare σ și τ pe o secțiune înclinată a unei bare solicate la întindere (fig. 23.6). Detașind un element de volum prismatic se observă, prin comparație cu figura 23.5, că $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$.

Înlocuind aceste valori în expresiile (23.21) se obține :

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\alpha) = \sigma_x \cos^2 \alpha ; \quad \tau = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha.$$

Eforturile unitare normale principale sînt $\sigma_1 = \sigma_x = \frac{F}{A}$ și $\sigma_2 = 0$, pentru $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 90^\circ$.

Eforturile unitare tangențiale maxime apar în secțiuni înclinate la 45° față de axa barei, avînd valoarea :

$$\tau_{1,2} = \pm \frac{\sigma_x}{2} . \quad (23.28)$$

Dacă ruperea barei se datorește eforturilor unitare σ_{max} , atunci ea are loc perpendicular pe axa barei. Dacă ruperea se datorește eforturilor unitare τ_{max} , atunci ea are loc la 45° față de axa barei.

Starea de forfecare pură. Se consideră un element de volum sollicitat ca în figura 23.7. Pe fețele elementului $\tau_{xy} = 0$, iar $\sigma_y = -\sigma_x$. Rezultă că pe o suprafață înclinată cu unghiul α ,

$$\sigma = \sigma_x \cos 2\alpha ; \quad \tau = \sigma_x \sin 2\alpha.$$

Pe fețele unui element orientate la 45° față de primul, deci pentru $\alpha = 45^\circ$, rezultă $\sigma = 0$ și $\tau = \sigma_x$, deci elementul respectiv este sollicitat la *forfecare pură*.

O aplicație practică a acestui rezultat se întîlnește la măsurarea eforturilor unitare tangențiale în arbori sollicitați la răsucire (fig. 23.8). Un element din vecinătatea conturului este sollicitat la forfecare pură (v. § 21.2) dacă laturile sale sînt paralele cu generatoarele, respectiv perpendiculare pe acestea.

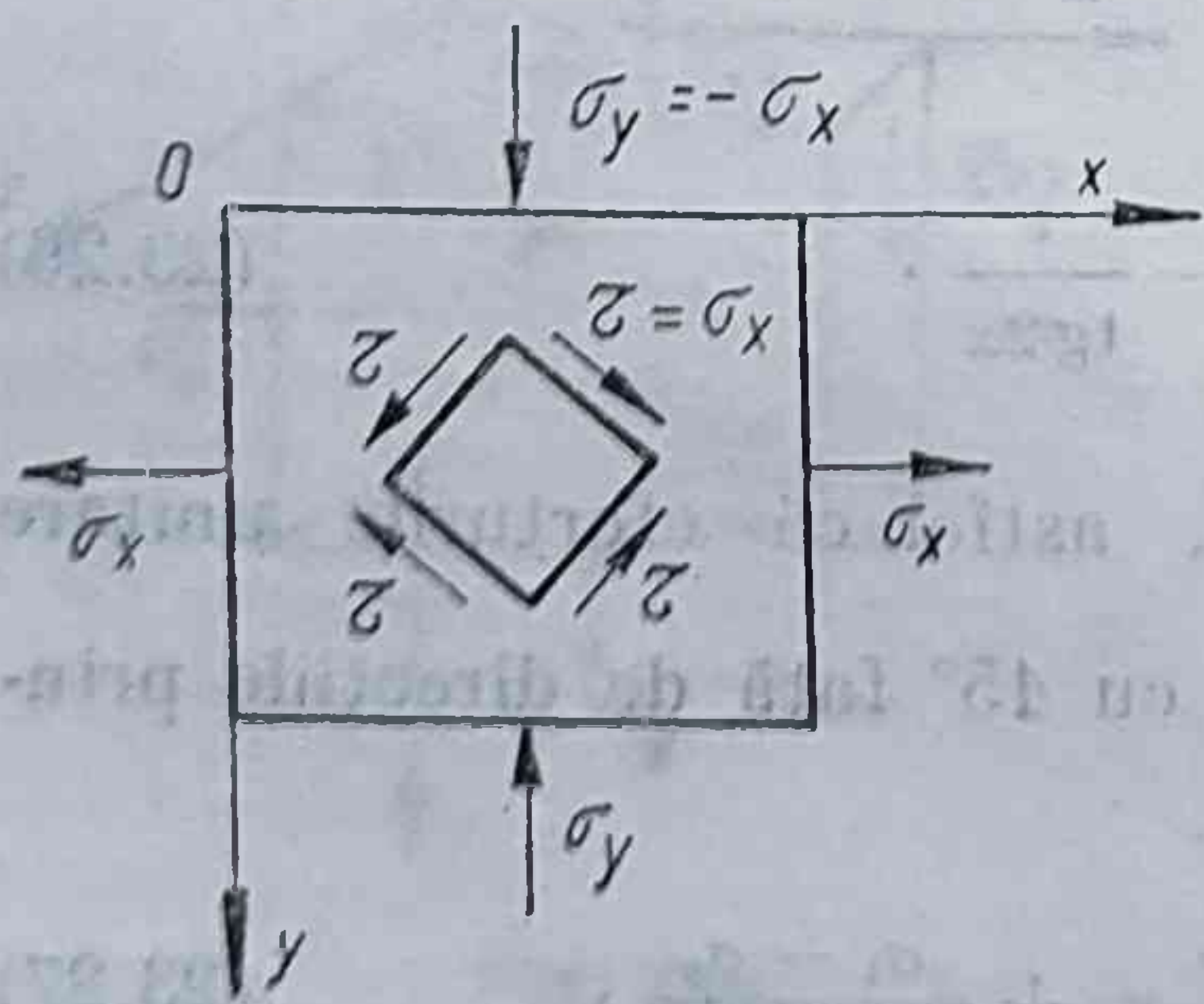


Fig. 23.7

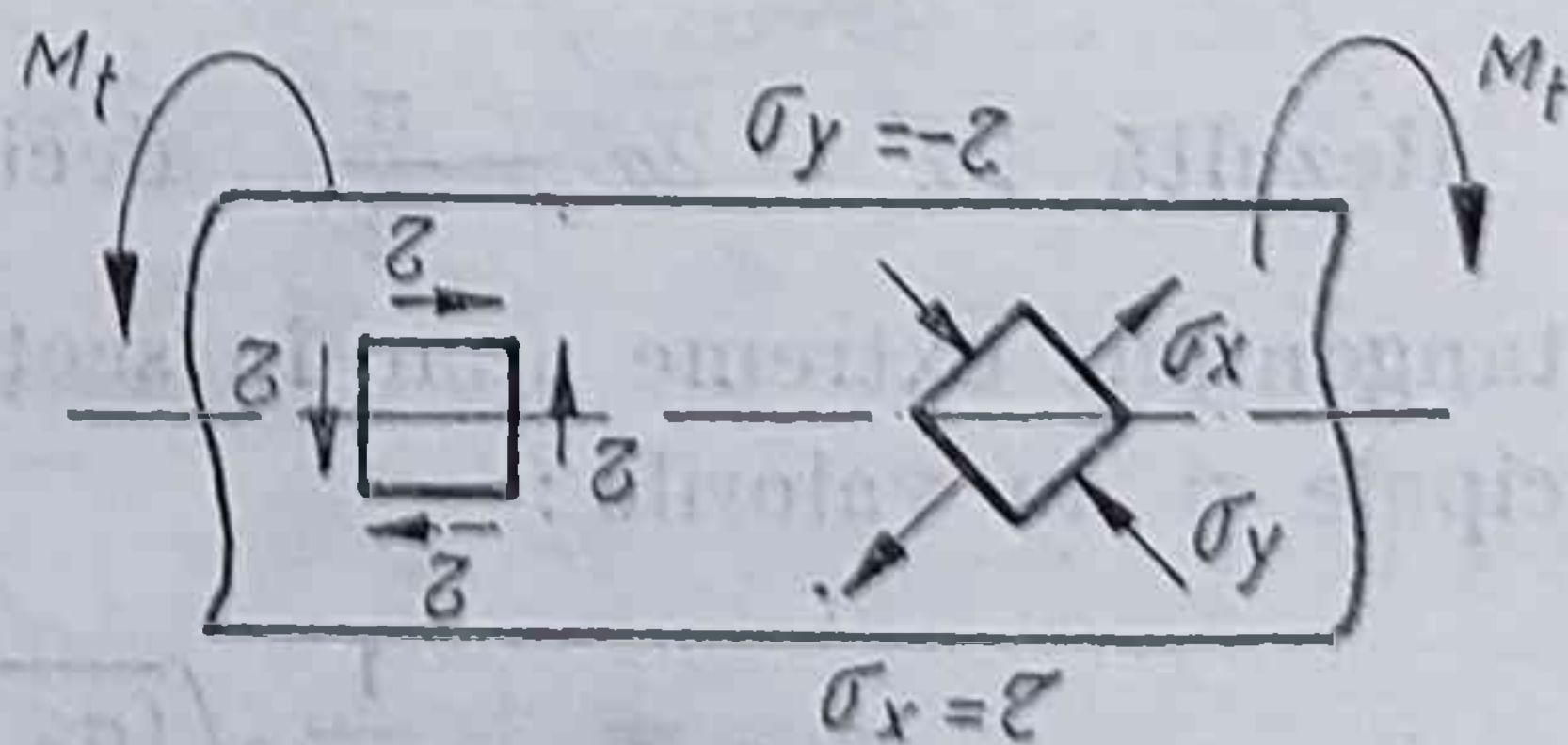


Fig. 23.8

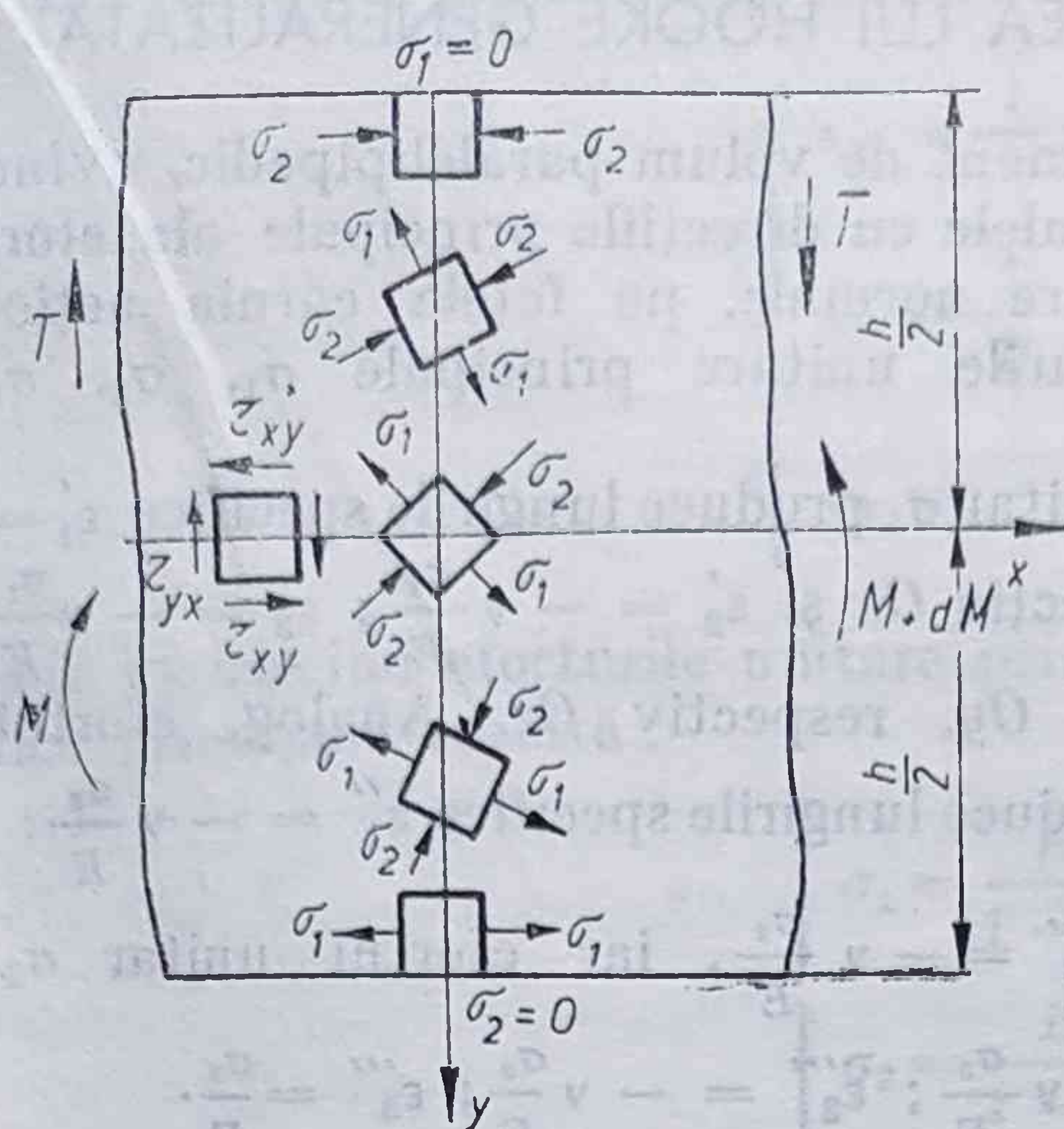


Fig. 23.9

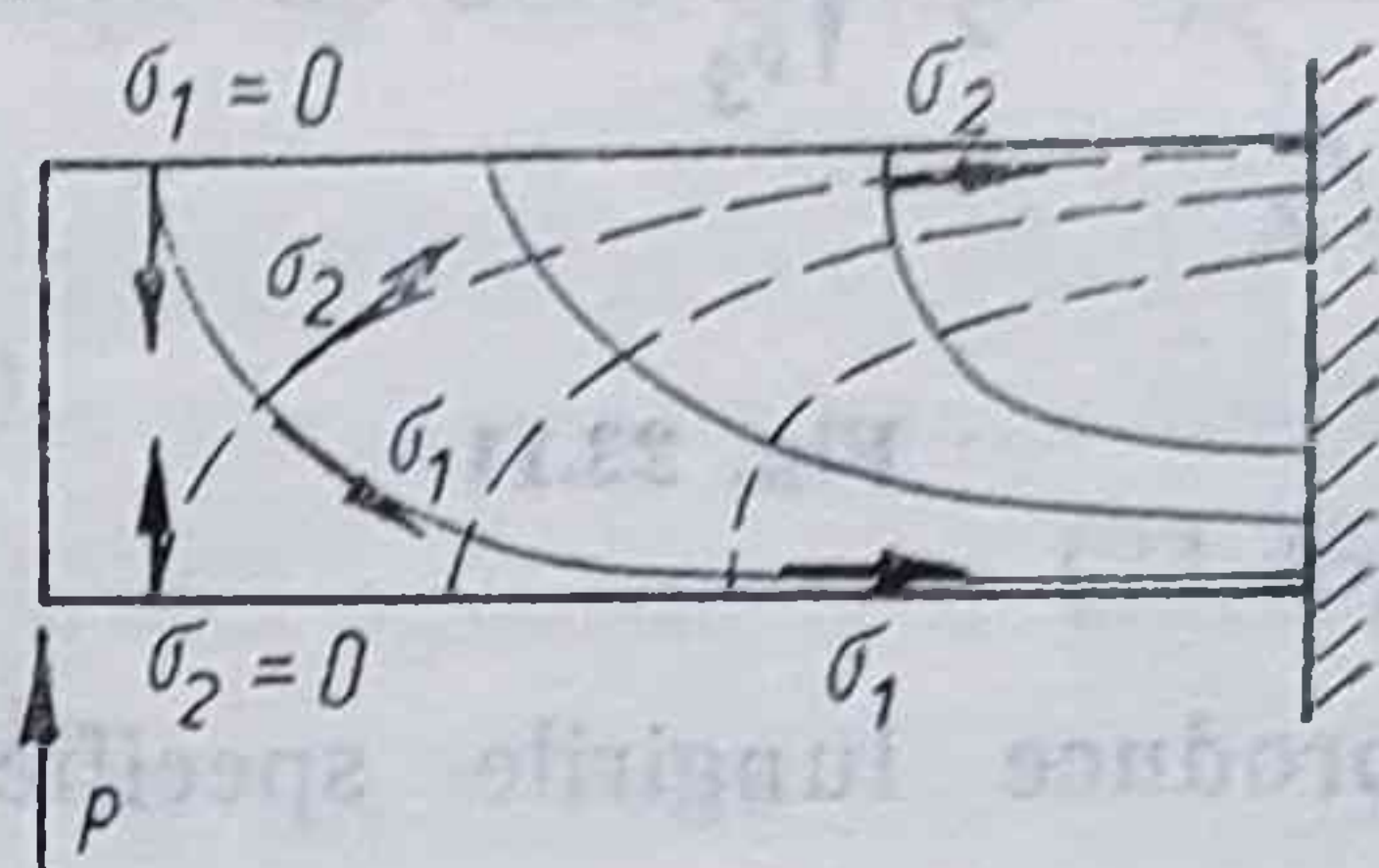


Fig. 23.10

Un element rotit cu 45° față de acesta este solicitat de eforturi unitare normale egale cu eforturile unitare tangențiale produse de răsucire pe fețele primului element. Se înlocuiește măsurarea lui τ cu măsurarea lui σ la 45° față de axa barei, ceea ce se realizează ușor cu ajutorul traductoarelor tenso-metrice rezistive.

Bara solicitată la încovoiere. În cazul barelor solicitate la încovoiere (fig. 23.9), $\sigma_y = 0$, deci relațiile (23.24) și (23.25) devin

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x}, \quad (23.29)$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad (23.30)$$

unde :

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I_z}; \quad \tau_{xy} = \frac{T \cdot S}{b \cdot I_z} = \tau_{xy}(y).$$

La $y = 0$; $\sigma_x = 0$; $\alpha_{1,2} = \pm 45^\circ$; $\sigma_{1,2} = \pm \tau_{xy}$; este cazul forfecării pure, considerat anterior.

La $y = \pm \frac{h}{2}$; $\tau_{xy} = 0$; $\alpha_{1,2} = 0, 90^\circ$; $\sigma_{1,2} = 0, \sigma_x$;

direcțiile principale corespund cu direcțiile axelor de coordonate.

Dacă se parcurge secțiunea transversală în lungul axei Oy , în sens pozitiv, direcțiile principale se rotesc continuu (fig. 23.9) în sens trigonometric.

Determinând în mai multe puncte orientarea direcțiilor principale (fig. 23.10) se pot trasa *liniile izostatice*, care reprezintă înfășurătoarele eforturilor unitare normale principale, formînd o dublă rețea de curbe ortogonale.

La armarea grinzilor de beton se caută ca armăturile de oțel să fie orientate aproximativ pe direcția liniilor izostatice.

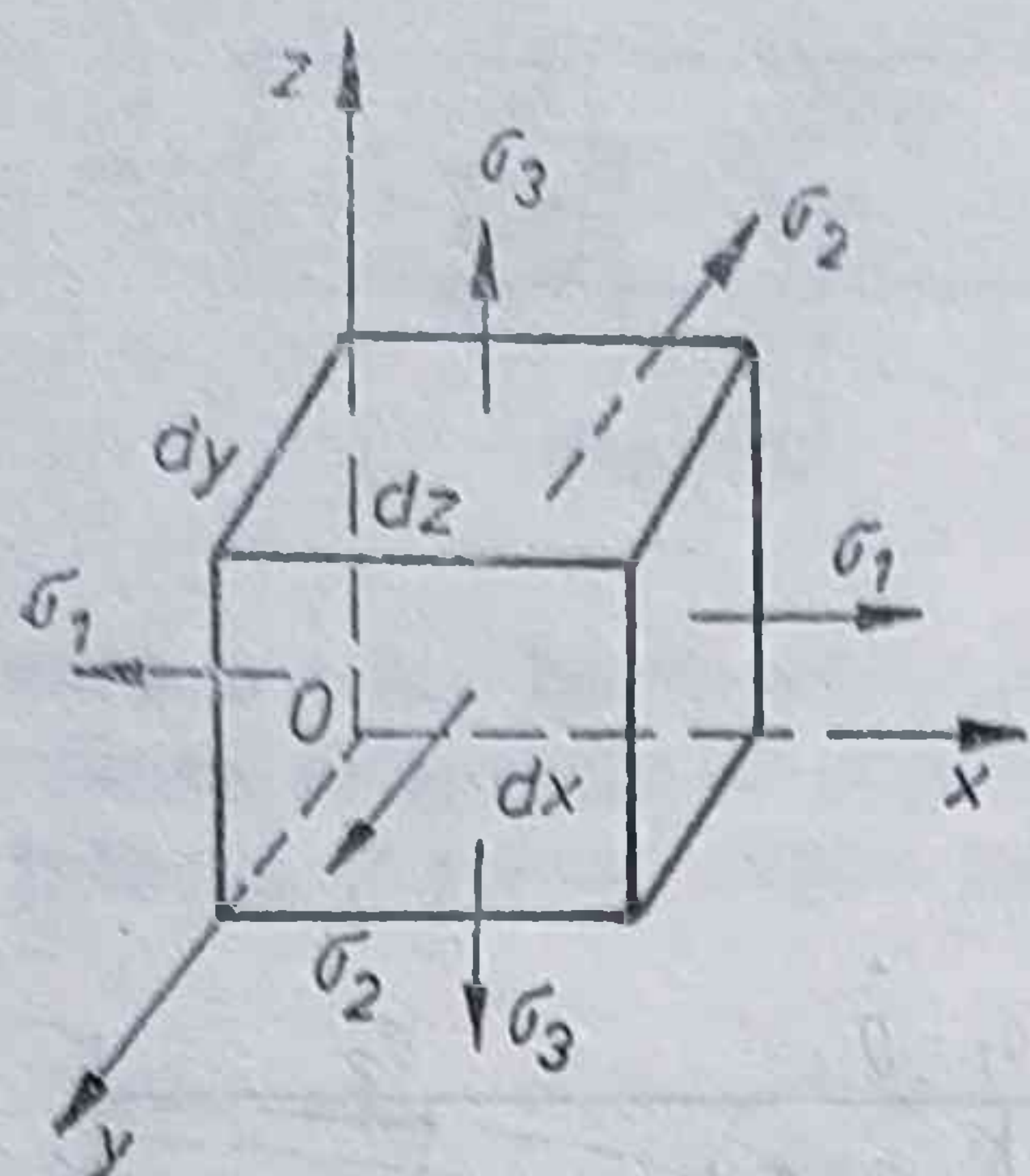


Fig. 23.11

23.5. LEGEA LUI HOOKE GENERALIZATĂ

Fie un element de volum paralelipedic, avînd muchiile paralele cu direcțiile principale ale eforturilor unitare normale, pe fețele căruia acționează eforturile unitare principale σ_1 , σ_2 , σ_3 (fig. 23.11).

Efortul unitar σ_1 produce lungirile specifice $\epsilon'_1 = \frac{\sigma_1}{E}$ pe direcția Ox și $\epsilon'_2 = -\nu \frac{\sigma_1}{E}$; $\epsilon'_3 = -\nu \frac{\sigma_1}{E}$ pe direcțiile Oy , respectiv Oz . Analog, efortul unitar σ_2 produce lungirile specifice $\epsilon''_1 = -\nu \frac{\sigma_2}{E}$;

$\epsilon''_2 = \frac{\sigma_2}{E}$; $\epsilon''_3 = -\nu \frac{\sigma_2}{E}$, iar efortul unitar σ_3

produce lungirile specifice $\epsilon'''_1 = -\nu \frac{\sigma_3}{E}$; $\epsilon'''_2 = -\nu \frac{\sigma_3}{E}$; $\epsilon'''_3 = \frac{\sigma_3}{E}$.

Lungirile specifice totale pe cele trei direcții sînt :

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \epsilon'_1 + \epsilon''_1 + \epsilon'''_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \epsilon_2 = \epsilon'_2 + \epsilon''_2 + \epsilon'''_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)], \\ \epsilon_3 = \epsilon'_3 + \epsilon''_3 + \epsilon'''_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)], \end{cases} \quad (23.31)$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinal, iar ν este coeficientul de contracție transversală.

Relațiile (23.31) reprezintă *legea lui Hooke generalizată* raportată la direcțiile principale.

În cazul general, legea lui Hooke generalizată se scrie :

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \end{cases} \quad (23.32)$$

la care se adaugă relațiile :

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \quad (23.33)$$

Se demonstrează că între constantele elastice E , G , ν există relația :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (23.34)$$

În cazul stării plane de eforturi unitare, înlocuind $\sigma_3 = 0$ în (23.31), rezultă :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2), \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \cdot \sigma_1), \\ \varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2), \end{cases} \quad (23.35)$$

sau, exprimînd eforturile unitare principale în funcție de deformațiile specifice principale rezultă :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \cdot \varepsilon_2), \\ \sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \cdot \varepsilon_1). \end{cases} \quad (23.36)$$

23.6. ECUAȚIA LUI POISSON

Elementul din figura 23.11 are volumul :

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz.$$

În urma deformației, volumul devine :

$$dV + \Delta dV = dx(1 + \varepsilon_x)dy(1 + \varepsilon_y)dz(1 + \varepsilon_z).$$

Neglijînd produsele $\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y$; $\varepsilon_y \cdot \varepsilon_z$; $\varepsilon_z \cdot \varepsilon_x$; $\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z$ în raport cu ε_x , ε_y , ε_z ,

$$dV + \Delta dV = dx \cdot dy \cdot dz(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z),$$

deci :

$$\Delta dV = dV(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Deformația volumică specifică va fi :

$$e = \frac{\Delta dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (23.37)$$

Înlocuind deformațiile specifice prin expresiile (23.32), rezultă :

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{3(1 - 2\nu)}{E} p, \quad (23.38)$$

unde :

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (23.39)$$

se numește *efort unilar mediu*.

Relația (23.38) se mai scrie :

$$p = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} e \quad (23.40)$$

și se numește *ecuația lui Poisson*.

Constanta de proporționalitate între p și e este *modulul de elasticitate cubică*,

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (23.41)$$

Din relația (23.38) rezultă că, la materialele care au $\nu \approx 0,5$ cum sînt majoritatea cauciucurilor și elastomerilor, $e = 0$, deci materialele nu-și modifică volumul în urma deformației, ci numai forma.

23.7. ENERGIA POTENȚIALĂ DE DEFORMAȚIE

La elementul din figura 23.11, pe direcția axei Ox acționează forța $\sigma_1 \cdot dy \cdot dz$. Cînd aceasta crește de la zero la valoarea nominală, produce o deformație $\epsilon_1 \cdot dx$, deci produce lucrul mecanic elementar $\frac{1}{2} \sigma_1 \cdot dy \cdot dz \cdot \epsilon_1 \cdot dx$ care este egal cu energia acumulată de element :

$$dW = \frac{1}{2} \sigma_1 \cdot \epsilon_1 \cdot dV.$$

Rezultă că energia acumulată în unitatea de volum este :

$$W_1 = \frac{1}{2} \sigma_1 \cdot \epsilon_1.$$

Ținînd seama și de acțiunea celorlalte eforturi unitare σ_2 și σ_3 , se obține :

$$W_1 = \frac{1}{2} (\sigma_1 \cdot \epsilon_1 + \sigma_2 \cdot \epsilon_2 + \sigma_3 \cdot \epsilon_3),$$

sau, utilizînd legea lui Hooke generalizată (23.31),

$$W_1 = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1). \quad (23.42)$$

Dacă elementul de volum este sollicitat pe toate fețele de același efort unitar, deformația are loc numai prin variația volumului. Astfel, aplicînd pe toate fețele efortul unitar mediu

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3},$$

se produce o deformație volumică e , iar *energia specifică de variație a volumului* este :

$$W_{1v} = \frac{p \cdot e}{2} = \frac{p}{2} \frac{3(1-2\nu)}{E} p = \frac{3(1-2\nu)}{2E} p^2 = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9},$$

deci

$$W_{1v} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (23.43)$$

Diferența între energia specifică totală W_1 și cea de variație a volumului W_{1v} reprezintă *energia specifică de variație a formei*.

$$W_{1f} = W_1 - W_{1v} = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) - \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2,$$

sau

$$W_{1f} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (23.44)$$

În cazul solicitării de întindere simplă, înlocuind $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ în relația (23.44), se obține :

$$W_{1f} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_1^2. \quad (23.45)$$

24.

TEORII DE REZISTENȚĂ

La o bară solicitată la întindere, *ruperea* se produce atunci când efortul unitar normal atinge valoarea σ_r , *curgerea* se produce când acesta are valoarea σ_c , atingerea limitei de elasticitate se produce la valoarea σ_e etc. Toate acestea pot fi considerate *stări limită*.

În cazul pieselor supuse la stări plane sau spațiale de eforturi unitare, se pune problema determinării condițiilor în care se atinge o anumită stare limită. Deoarece stările limită se definesc prin valori ale eforturilor unitare determinate experimental, prin încercarea la tracțiune a epruvetelor solicitate unidirecțional, interesează în ce condiții o stare plană sau spațială de eforturi unitare produce în piesă o stare limită analogă celei realizate la întindere simplă.

În limitele comportării elastice a unui material, o anumită stare limită (de exemplu limita de elasticitate) poate fi definită prin cinci mărimi caracteristice :

a) efortul unitar de întindere, σ_e ;

b) lungirea specifică, $\epsilon_e = \frac{\sigma_e}{E}$;

c) efortul unitar tangențial maxim, $\tau_e = \frac{\sigma_e}{2}$;

d) energia specifică totală de deformație, $W_{1e} = \frac{\sigma_e^2}{2E}$;

e) energia specifică de deformație, pentru variația formei, $W_{1f} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_e^2$.

La solicitarea de întindere simplă este suficientă una singură dintre aceste mărimi pentru definirea stării de solicitare, deci a stării limită, deoarece ele sînt atinse simultan.

La solicitarea pe mai multe direcții, atingerea valorii corespunzătoare unei anumite stări limită pentru una dintre cele cinci mărimi (ce definesc o asemenea stare) nu coincide cu atingerea simultană a valorilor corespunzătoare acelei stări pentru celelalte patru mărimi. Definind starea spațială de eforturi unitare dintr-un punct prin eforturile unitare normale principale $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, se pune problema : ce relație trebuie să existe între acestea pentru a se atinge una dintre cele cinci mărimi caracteristice ale stării limită. *Teoriile de rezistență* permit stabilirea acestor relații prin care se definește un *efort unitar echivalent* σ_{ech} al stării plane sau spațiale, care este comparat cu efortul unitar la starea limită de la întinderea simplă.

24.1. TEORIILE CLASICE DE REZISTENȚĂ

I. Teoria efortului unitar normal maxim

Conform teoriei I, *starea limită se atinge atunci cînd efortul unitar normal maxim din corp devine egal cu efortul unitar al stării limită de la solicitarea de întindere simplă.*

De exemplu, limita de elasticitate se atinge atunci cînd

$$\sigma_1 = \sigma_e,$$

deci efortul unitar echivalent este :

$$\sigma_{ech_I} = \sigma_1. \quad (24.1)$$

II. Teoria deformației specifice maxime

Conform teoriei a II-a, *starea limită se atinge atunci cînd lungirea specifică maximă din corp devine egală cu lungirea specifică corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere simplă.*

În cazul limitei de elasticitate,

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \varepsilon_e = \frac{\sigma_e}{E},$$

deci efortul unitar echivalent care se compară cu σ_e este :

$$\sigma_{ech_{II}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3). \quad (24.2)$$

III. Teoria efortului unitar tangențial maxim

Conform teoriei a III-a, *starea limită se atinge atunci cînd efortul unitar tangențial maxim devine egal cu efortul unitar tangențial corespunzător stării limită de la încercarea de întindere simplă.*

Luînd ca stare limită limita de elasticitate, se poate scrie :

$$\tau_{max} = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_e = \frac{\sigma_e}{2},$$

iar efortul unitar echivalent este :

$$\sigma_{ech_{III}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (24.3)$$

IV.a. Teoria energiei totale de deformare

Conform teoriei a IV-a, varianta a, starea limită se atinge atunci când energia de deformare specifică totală egalează energia specifică totală corespunzătoare stării limită de la încercarea de întindere simplă, deci la limita de elasticitate

$$W_1 = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) = W_{1e} = \frac{\sigma_e^2}{2E},$$

astfel că efortul unitar echivalent este :

$$\sigma_{ech_{IV. a}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)}, \quad (24.4)$$

relație care, la materiale tenace, se aplică atunci când efortul unitar mediu este pozitiv, $p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) > 0$.

IV.b. Teoria energiei de variație a formei

Conform teoriei a IV-a, varianta b, starea limită se atinge atunci când energia specifică de variație a formei egalează energia specifică de variație a formei corespunzătoare stării limită de la întinderea simplă.

În cazul limitei de elasticitate

$$W_{IV} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = W_{1fe} = \frac{1+\nu}{6E} 2\sigma_e^2,$$

deci efortul unitar echivalent are expresia :

$$\sigma_{ech_{IV. b}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (24.5)$$

Această variantă se aplică atunci când $p < 0$.

24.2. APLICAREA TEORIILOR DE REZISTENȚĂ LA STĂRI PLANE DE EFORTURI UNITARE

Înlocuind $\sigma_3 = 0$ în relațiile (24.1) — (24.5), se obține

$$\begin{aligned} \sigma_{ech_I} &= \sigma_1, \\ \sigma_{ech_{II}} &= \sigma_1 - \nu\sigma_2, \\ \sigma_{ech_{III}} &= \sigma_1 - \sigma_2, \\ \sigma_{ech_{IV. a}} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2}, \\ \sigma_{ech_{IV. b}} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}. \end{aligned} \quad (24.6)$$

Dacă se ia drept stare limită starea corespunzătoare efortului unitar admisibil, calculul de verificare se face impunând condiția :

$$\sigma_{ech} \leq \sigma_a. \quad (24.7)$$

La materiale tenace se recomandă utilizarea relațiilor date de teoriile a III-a și a IV-a, varianta b, iar la materiale fragile, utilizarea teoriei a II-a.

În cazul particular al barelor, înlocuind $\sigma_x = \sigma$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = \tau$ în relația (23.25) se obțin expresiile eforturilor unitare normale principale :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

care prin substituire în (24.6) și alegînd $\nu = 0,3$, valoare ce corespunde oțelului, conduc la :

$$\begin{aligned} \sigma_{ech_I} &= \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \\ \sigma_{ech_{II}} &= 0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \\ \sigma_{ech_{III}} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \\ \sigma_{ech_{IV.a}} &= \sqrt{\sigma^2 + 2,6\tau^2}, \\ \sigma_{ech_{IV.b}} &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \end{aligned} \quad (24.8)$$

În prezent există și alte teorii de rezistență, însă nici una nu poate descrie comportarea tuturor materialelor în orice stare de solicitare.

25.

SOLICITĂRI COMPUSE

În capitolele 20 — 22 s-au studiat cele patru solicitări simple : întinderea (compresiunea), forfecarea, încovoierea și răsucirea. În practică, adesea, acestea apar împreună, producînd *solicitări compuse*.

Dacă în secțiunea barei acționează eforturi care produc eforturi unitare de același fel, acestea se compun algebric, deci problema se rezolvă aplicînd principiul suprapunerii efectelor. Astfel, la întindere și încovoiere se produc eforturi unitare normale, în timp ce la forfecare și răsucire se produc eforturi unitare tangențiale.

Cînd în secțiunea barei acționează eforturi care produc simultan eforturi unitare normale și tangențiale, de exemplu în cazul solicitării la încovoiere și răsucire, sau întindere și răsucire, pentru rezolvarea problemei se utilizează teoriile de rezistență.

25.1. ÎNTINDEREA EXCENTRICĂ

Se consideră bara din figura 25.1, solicitată de forța F paralelă cu axa barei, aplicată în punctul $B(y_0, z_0)$.

Pentru a stabili valorile eforturilor ce acționează într-o secțiune oarecare, se reduce forța în centrul de greutate al secțiunii transversale, rezultînd o

forță axială $N = F$ și un moment încovoietor $M_i = F\sqrt{y_0^2 + z_0^2}$, a cărui direcție nu corespunde cu axele centrale principale ale secțiunii. Pentru simplificarea calculului este utilă descompunerea acestui moment în două componente orientate în lungul axelor: $M_z = F \cdot y_0$; $M_y = F \cdot z_0$.

Într-un punct $C(y, z)$ din cadranul I, eforturile unitare normale produse de cele trei eforturi N , M_z și M_y sînt pozitive și se însumează algebric. Efortul unitar total are expresia:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{M_z \cdot y}{I_z} =$$

$$= \frac{F}{A} + \frac{F \cdot z_0 \cdot z}{I_y} + \frac{F \cdot y_0 \cdot y}{I_z}$$

sau

$$\sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_0 \cdot z}{i_y^2} + \frac{y_0 \cdot y}{i_z^2} \right), \quad (25.1)$$

unde s-au înlocuit razele de inerție

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \text{ și } i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}.$$

Axa neutră, definită ca locul geometric al punctelor în care $\sigma = 0$, are ecuația:

$$1 + \frac{z_0 \cdot z}{i_y^2} + \frac{y_0 \cdot y}{i_z^2} = 0, \quad (25.2)$$

care poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{z}{z_0} + \frac{y}{y_0} = 1. \quad (25.2, a)$$

Cunoscînd poziția axei neutre, se duc tangente la conturul secțiunii paralele cu axa neutră, obținînd punctele în care efortul unitar normal total σ are valori extreme. Înlocuind coordonatele acestor puncte în expresia (25.1) se află σ_{max} și σ_{min} și se poate construi diagrama eforturilor unitare normale (v. fig. 25.1).

APLICAȚIA 1

Să se determine locul geometric al punctelor de aplicație a unei forțe excentrice pentru care axa neutră corespunzătoare este tangentă la conturul secțiunii circulare (fig. 25.2).

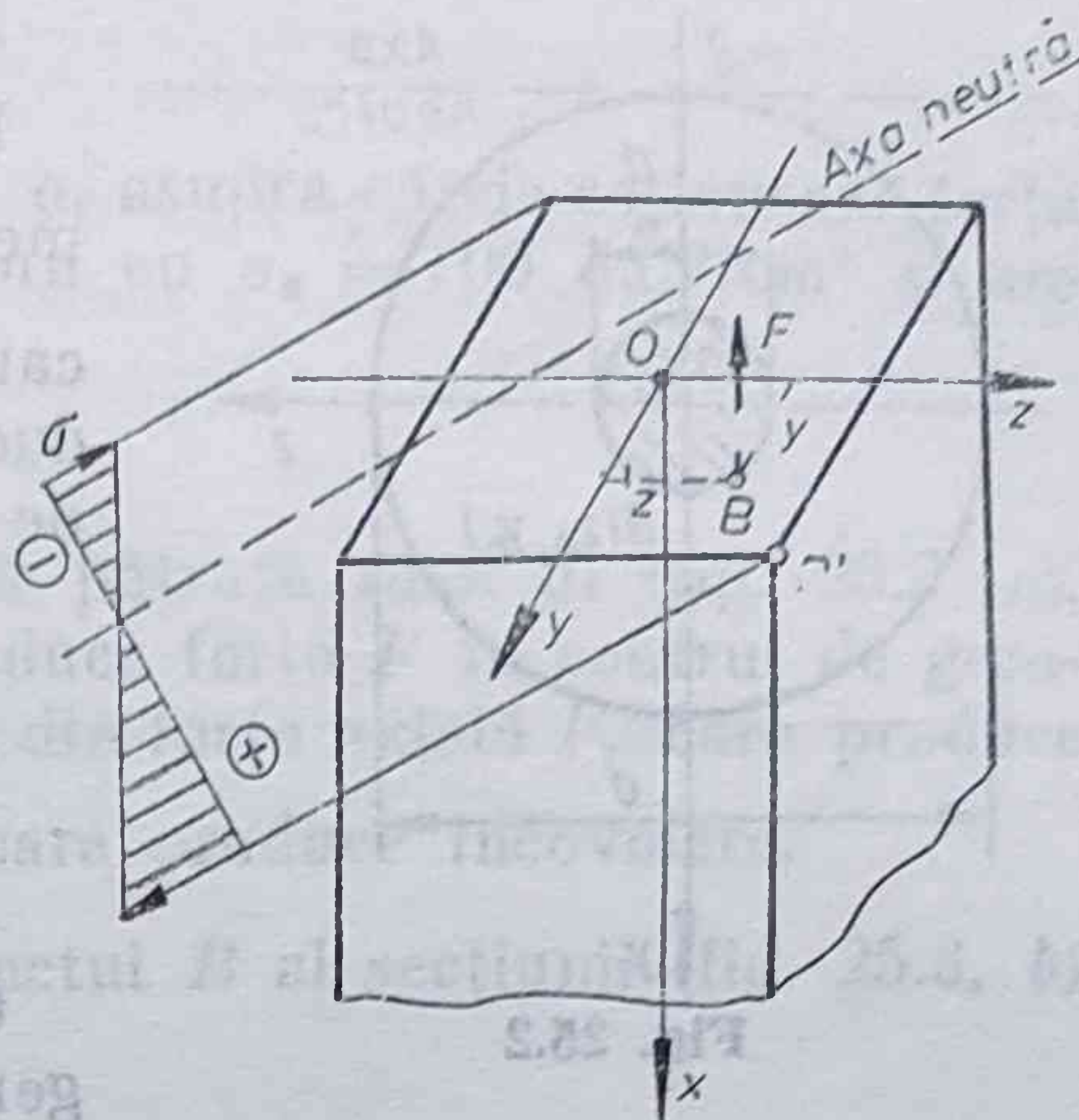


Fig. 25.1

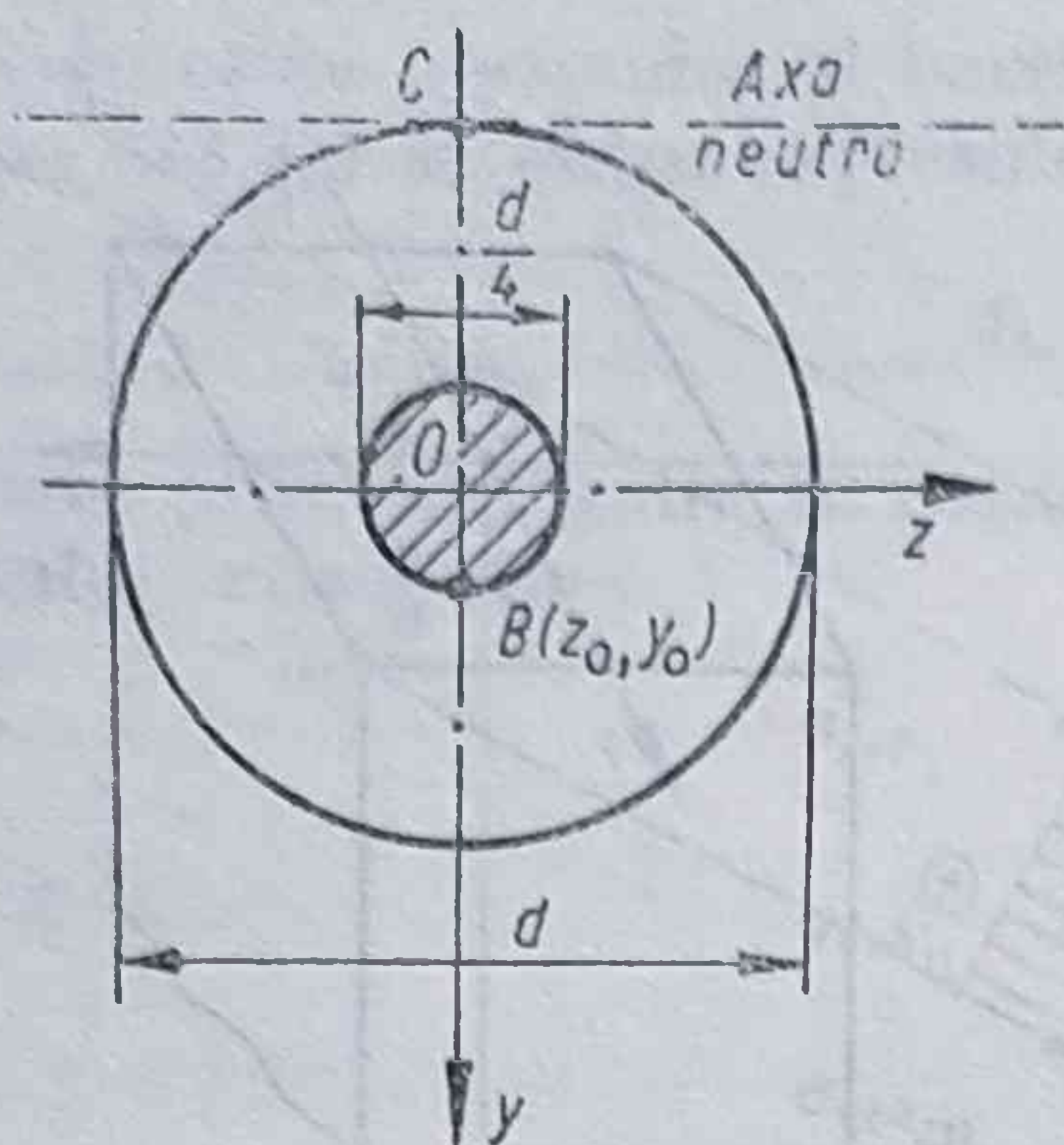


Fig. 25.2

Rezolvare

Fie ecuația tangentei în C la cercul de diametru d (fig. 25.2) $y = -\frac{d}{2}$ care prin identificare cu ecuația generală a axei neutre (25.2) duce la determinarea coordonatelor punctului B de aplicație a forței :

$$z_0 = 0; \quad y_0 = -\frac{d^2}{4y} = -\frac{16}{d} = -\frac{d}{8}.$$

Cînd axa neutră ocupă poziția altor tangente la cerc, punctul B parcurge un cerc de rază $\frac{d}{8}$, numit „sîmbure central”. Cînd forța F este aplicată pe conturul sau în interiorul sîmburelui central, axa neutră este tangentă sau nu intersectează secțiunea, deci eforturile unitare pe toată suprafața au același semn.

APLICAȚIA 2

Dacă bara din figura 25.1 are secțiunea pătrată cu latura a , să se calculeze efortul unitar normal maxim din bară cînd forța F este aplicată în punctul $B'(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$.

Rezolvare

În acest caz $z_0 = y_0 = \frac{a}{2}$; $i_z^2 = i_y^2 = \frac{a^2}{12}$ și din relația (25.1) se obține, în punctul B' ,

$$\sigma_{max} = \frac{7F}{a^2}.$$

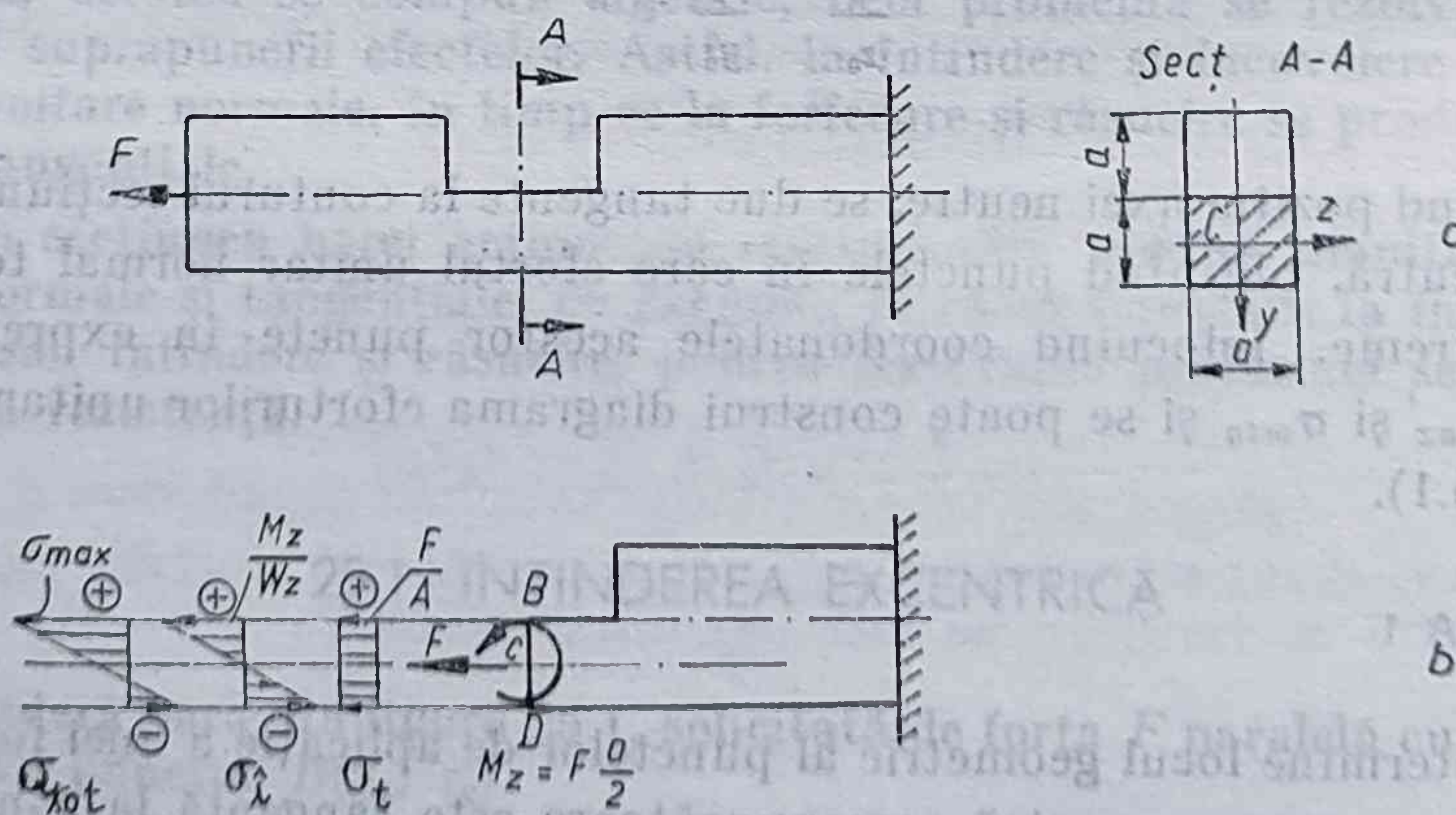


Fig. 25.3

APLICAȚIA 3

Să se dimensioneze grinda din figura 25.3, *a*, asupra căreia acționează forța axială $F = 3\,600$ daN. Grinda este din lemn cu $\sigma_a = 100$ daN/cm² și are secțiunea dreptunghiulară ($a \times 2a$).

Rezolvare

Secțiunea periculoasă ($A - A$), de formă pătrată ($a \times a$) (fig. 25.3, *a*), este solicitată la întindere excentrică. Se reduce forța F în centrul de greutate C al secțiunii slăbite, la tursorul format din forța axială F , care produce întindere, și cuplul de moment $M_z = F \frac{a}{2}$, care produce încovoire.

Efortul unitar normal este maxim în punctul B al secțiunii (fig. 25.3, *b*) și are expresia :

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{F}{a^2} + \frac{F \frac{a}{2}}{\frac{a^3}{6}} = \frac{4F}{a^2}.$$

Egalînd σ_{max} cu σ_a se poate face dimensionarea :

$$\sigma_a = \frac{4F}{a^2}, \text{ de unde } a = \sqrt{\frac{4F}{\sigma_a}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3\,600}{100}} = 12 \text{ cm.}$$

APLICAȚIA 4

Să se verifice cîrligul din figura 25.4, *a* asupra căruia acționează forța $F = 200$ daN. Cîrligul este din oțel cu $\sigma_a = 1\,200$ daN/cm² și are secțiunea circulară cu $d = 2$ cm.

Rezolvare

Secțiunea AB a cîrligului este solicitată la întindere excentrică. Se reduce forța F în centrul de greutate C al secțiunii, la tursorul format din forța axială F , care produce întindere, și cuplul de moment $M_z = F \cdot e$ care produce încovoire.

Efortul unitar normal este maxim în punctul A al secțiunii (fig. 25.4, *b*), și are expresia

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} + \frac{F \cdot e}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}}.$$

Înlocuind, rezultă :

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{4 \cdot 200}{\pi} + \frac{32 \cdot 200 \cdot 4}{\pi \cdot 2^3} \\ &= 1\,082,8 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} < \sigma_a, \end{aligned}$$

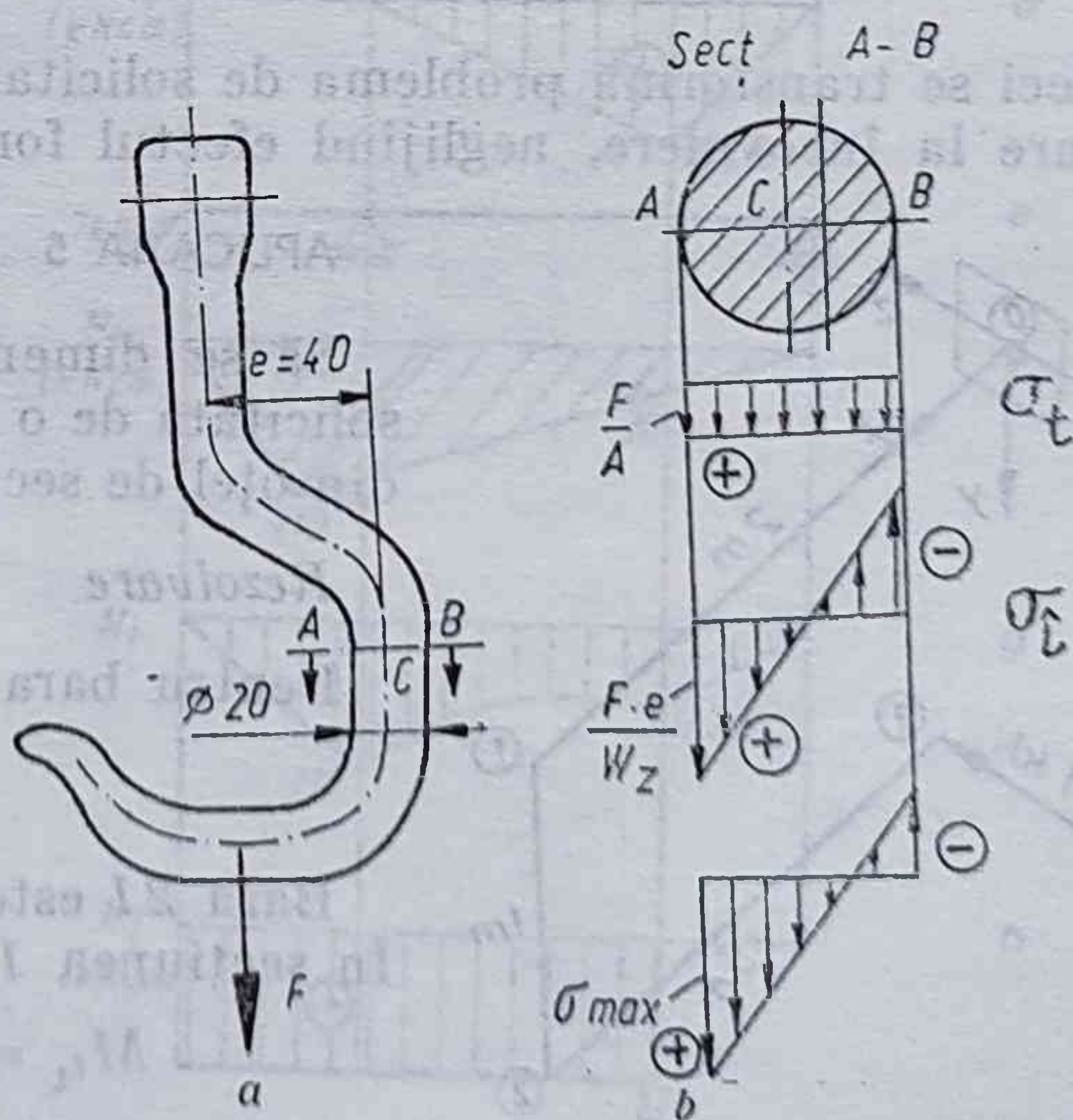


Fig. 25.4

25.2. BARE SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE ȘI RĂSUCIRE

Arborii de secțiune circulară sau inelară, solicitați prin moment încovoietor și moment de răsucire, se calculează utilizând teoriile de rezistență. Astfel, relația teoriei a III-a de rezistență (24.8) se scrie :

$$\sigma_{ech_{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_t}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_t}{W_p}\right)^2}. \quad (25.3)$$

Deoarece la secțiuni axial-simetrice (v.subcap.21.7 și 22.8) între modulele de rezistență există relația :

$$W_p = 2W_z, \quad (25.4)$$

expresia (25.3) se scrie :

$$\sigma_{ech_{III}} = \frac{\sqrt{M_i^2 + M_t^2}}{W_z} = \frac{M_{ie_{III}}}{W_z}, \quad (25.5)$$

unde $M_{ie_{III}}$ este *momentul încovoietor echivalent*.

Conform celor cinci teorii de rezistență, acest moment are expresia :

$$\begin{aligned} M_{ie_I} &= 0,5M_i + 0,5\sqrt{M_i^2 + M_t^2}, \\ M_{ie_{II}} &= 0,35M_i + 0,65\sqrt{M_i^2 + M_t^2}, \\ M_{ie_{III}} &= \sqrt{M_i^2 + M_t^2}, \\ M_{ie_{IV,a}} &= \sqrt{M_i^2 + 0,65M_t^2}, \\ M_{ie_{IV,b}} &= \sqrt{M_i^2 + 0,75M_t^2}. \end{aligned} \quad (25.6)$$

Utilizînd una din relațiile (25.6) rezultă că efectele încovoierii și răsucirii sînt cumulate într-o singură mărime, momentul încovoietor echivalent, cu care se face un calcul obișnuit la încovoiere. Astfel, formula de dimensionare devine :

$$W_{z_{nec}} = \frac{M_{ie}}{\sigma_a}, \quad (25.7)$$

deci se transformă problema de solicitare compusă într-o problemă de solicitare la încovoiere, neglijînd efectul forței tăietoare.

APLICAȚIA 5

Să se dimensioneze bara cotită din figura 25.5, solicitată de o forță perpendiculară pe planul barei, din oțel de secțiune circulară cu $\sigma_a = 800 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare

Pentru bara 23, în secțiunea 2,

$$M_{t_2} = 1,5 \text{ kNm}.$$

Bara 21 este solicitată la încovoiere și răsucire. În secțiunea 1

$$M_{t_1} = 1 \text{ kNm}; \quad M_{i_1} = 1,5 \text{ kNm},$$

deci, pe baza teoriei a III-a de rezistență,

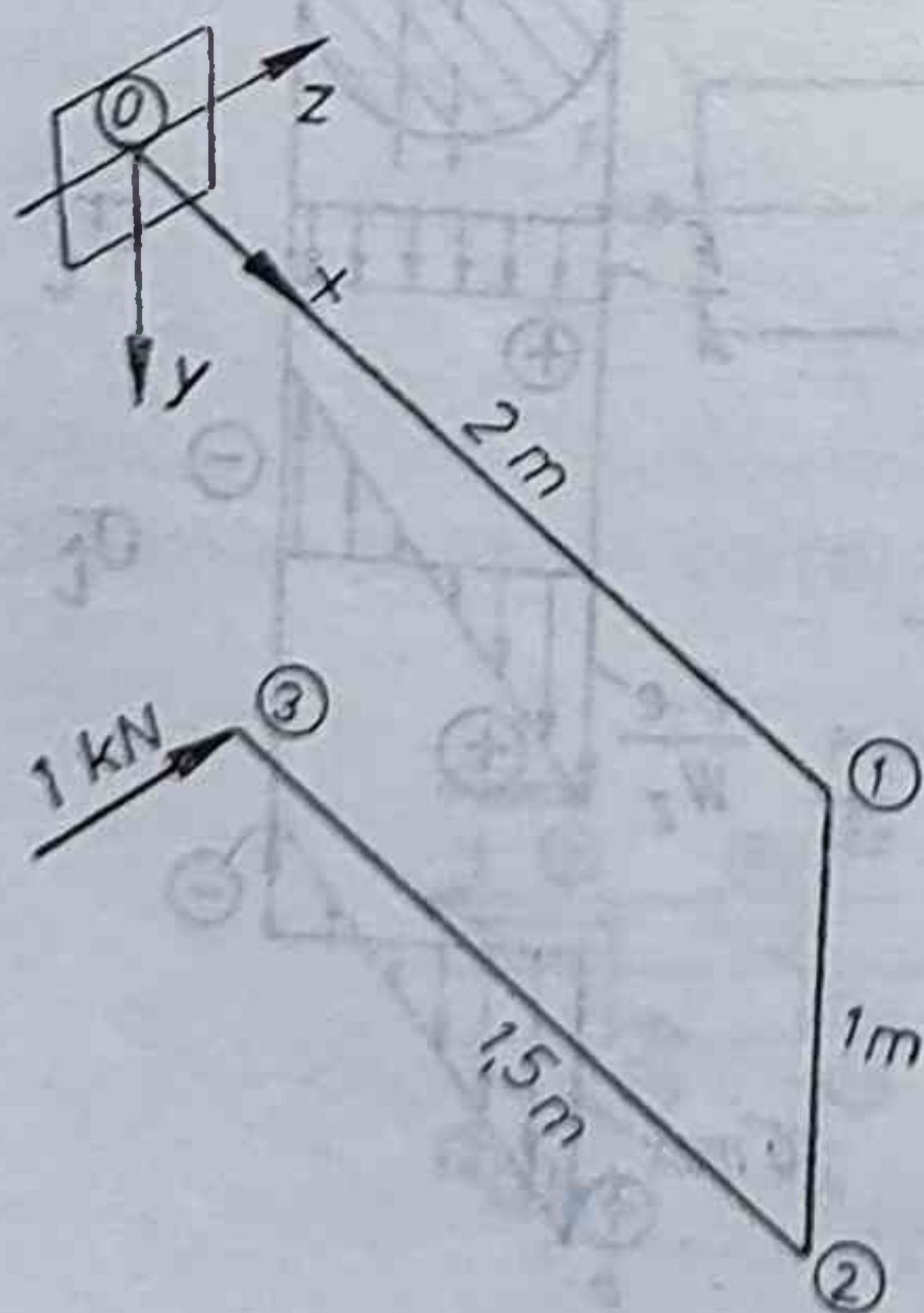


Fig. 25.5

$$M_{te_1} = \sqrt{M_{t_1}^2 + M_{t_1}^2} = \sqrt{3,25} = 1,8 \text{ kNm}.$$

Bara 10 este solicitată la încovoiere și răsucire. În secțiunea 1,

$$M_{t_1} = 1,5 \text{ kNm}; \quad M_{t_1} = 1 \text{ kNm}; \quad M_{te_1} = 1,8 \text{ kNm},$$

iar în secțiunea 0,

$$M_{t_0} = 0,5 \text{ kNm}; \quad M_{t_0} = 1 \text{ kNm}; \quad M_{te_0} = 1,1 \text{ kNm}.$$

Rezultă că secțiunea periculoasă este în punctul 1.

$$W_{z \text{ nec}} = \frac{M_{te_1}}{\sigma_a} = \frac{1,8 \cdot 10^4}{800} = 22,5 \text{ cm}^3 \cong 0,1 d^3,$$

deci se alege $d = 6 \text{ cm}$.

APLICAȚIA 6

Să se dimensioneze arborele din figura 25.6, *a* din oțel, cu $\sigma_a = 800 \text{ daN/cm}^2$ de secțiune circulară.

Rezolvare

Reducînd forțele ce acționează asupra roților în centrul de greutate al secțiunii transversale a arborelui (fig. 25.6, *b*), rezultă că bara este solicitată la răsucire și încovoiere (se neglijează forfecarea). Pentru bara solicitată de forța verticală (fig. 25.6, *c*) se construiește diagrama momentelor încovoiitoare M_{iv} (fig. 25.6, *d*). Pentru bara solicitată numai de forța orizontală (fig. 25.6, *e*) se construiește diagrama momentelor încovoiitoare M_{iH} (fig. 25.6, *f*). Compunînd geometric (vectorial) cele două diagrame, se rabate fiecare moment resultant în planul figurii obținîndu-se diagrama momentelor încovoiitoare M_i (fig. 25.6, *g*). Se construiește diagrama momentelor de răsucire M_t (fig. 25.6, *h*). Secțiunea periculoasă va fi în dreptul reazemului 1, momentul încovoiitor echivalent fiind:

$$M_{te_{III}} = \sqrt{M_i^2 + M_t^2} = \\ = \sqrt{210^2 + 120^2} = 241,8 \text{ kNcm}.$$

Rezultă

$$W_{z \text{ nec}} = \frac{M_{te_{III}}}{\sigma_a} = \frac{241,8 \cdot 100}{800} = 30,2 \text{ cm}^3,$$

$$0,1 d^3 = 30,2;$$

deci: $d = 6,7 \text{ cm}$.

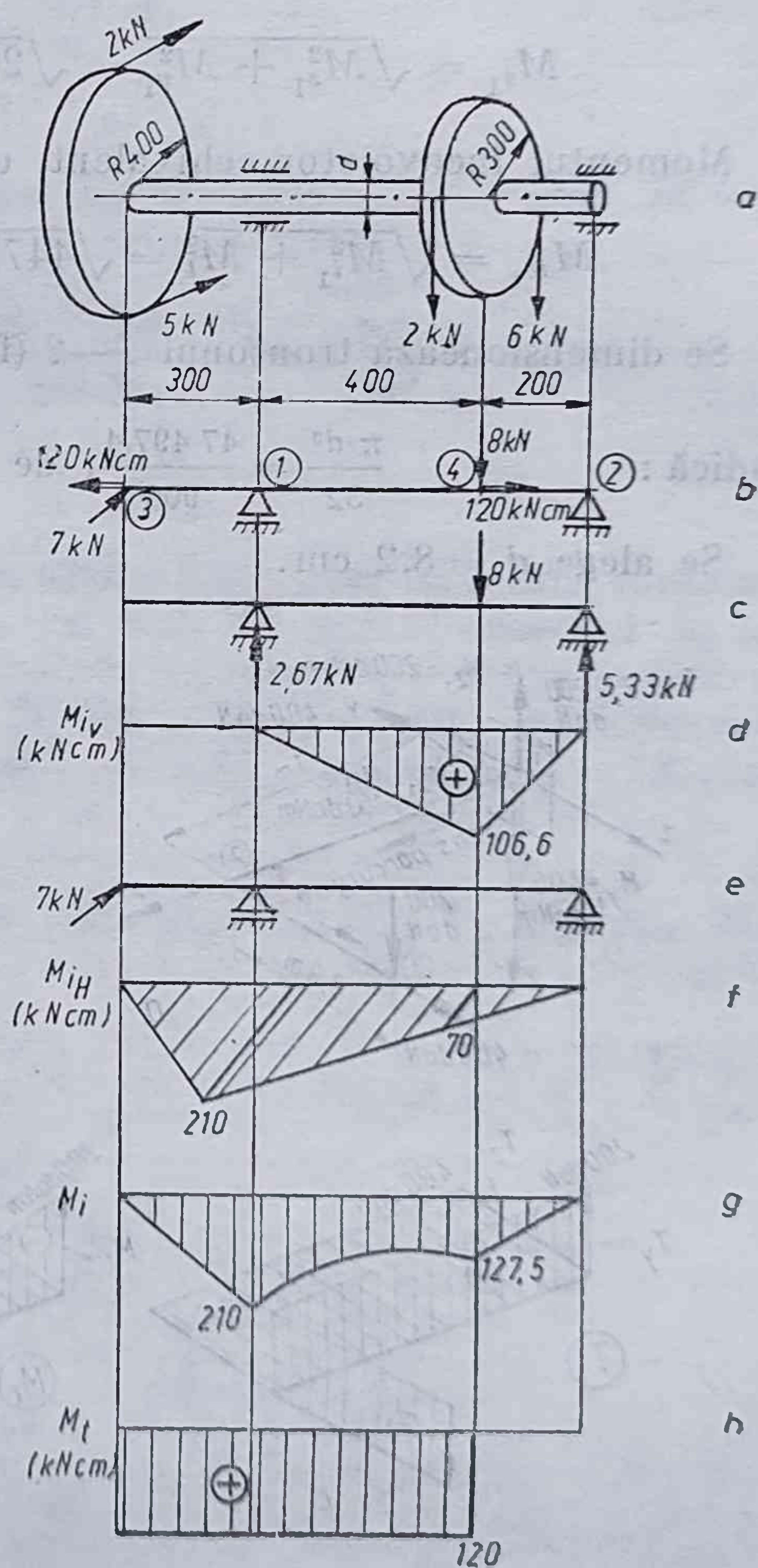


Fig. 25.6

În cazul barelor solicitate la întindere (compresiune) și răsucire, se utilizează relațiile (24.8). Se face o predimensionare a barei la răsucire, apoi se verifică la solicitarea compusă punând condiția ca $\sigma_{ech} \leq \sigma_a$.

APLICAȚIA 7

O bară cotită din oțel, încastrată la o extremitate, este încărcată cu forțe conform figurii 25.7, a. Cunoscînd $\sigma_a = 900 \text{ daN/cm}^2$ se cere să se dimensioneze tronsonul 1—2 de secțiune circulară și să se verifice tronsonul 2—3, considerînd că are aceeași secțiune cu 1—2.

Rezolvare

Se determină reacțiunile și se trasează diagramele N , T_y , T_z , M_z , M_y , M_t , cu respectarea convențiilor de semne (fig. 25.7, b, c, d, e). Sensul de parcurgere a grinzii este arătat în figura 25.7, a.

Tronsonul 1—2 este solicitat la încovoiere cu răsucire, secțiunea periculoasă trecînd prin punctul 1. Secțiunea barei fiind circulară, se calculează momentul încovoietor rezultat :

$$M_{i_1} = \sqrt{M_{z_1}^2 + M_{y_1}^2} = \sqrt{200^2 + 400^2} = 447,214 \text{ daNm.}$$

Momentul încovoietor echivalent, după teoria a III-a de rezistență, este :

$$M_{ie_1} = \sqrt{M_{i_1}^2 + M_t^2} = \sqrt{447,214^2 + 160^2} = 474,974 \text{ daNm.}$$

Se dimensionează tronsonul 1—2 (formula 25.7) : $W_{z_{nec}} = \frac{M_{ie_1}}{\sigma_a}$,

$$\text{adică : } \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{47497,4}{900}, \text{ de unde } d = 8,13 \text{ cm.}$$

Se alege $d = 8,2 \text{ cm}$.

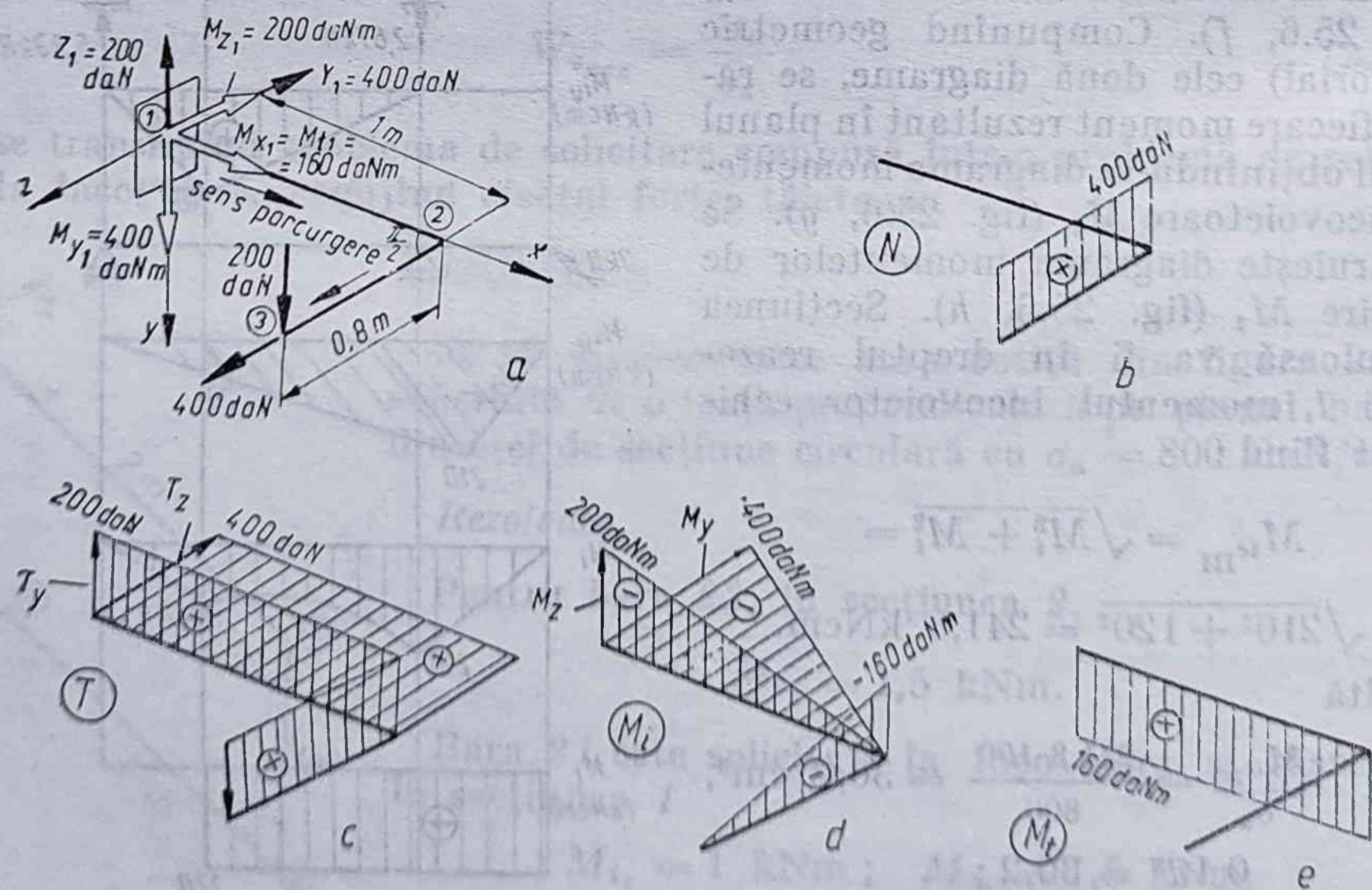


Fig. 25.7

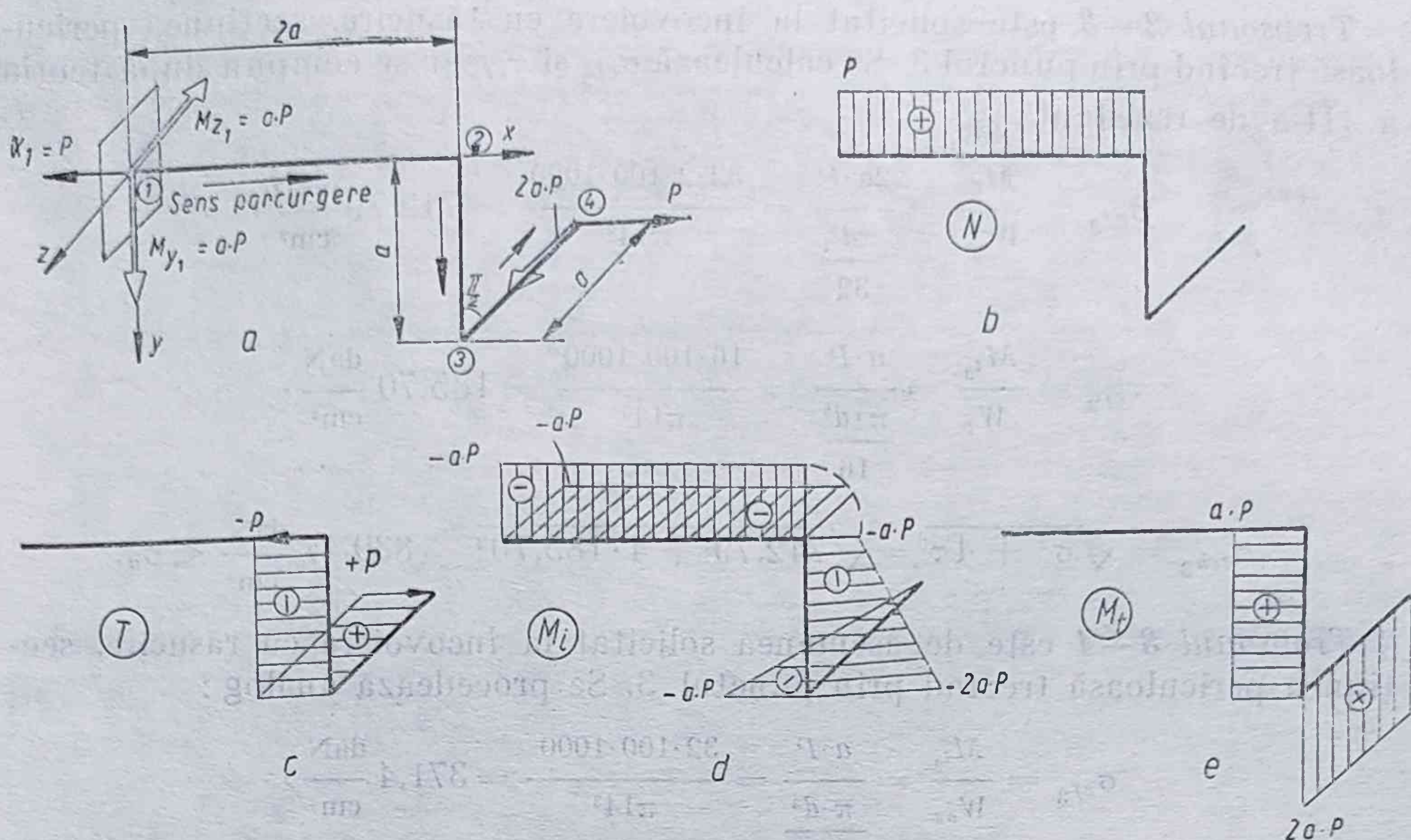


Fig. 25.8

Tronsonul 2—3 se verifică la solicitarea de întindere cu încovoiere, în secțiunea periculoasă 2 :

$$\sigma_{ef2} = \frac{N}{A} + \frac{M_t}{W_{ax}} = \frac{4 \cdot 400}{\pi \cdot 8,2^2} + \frac{32 \cdot 16\,000}{\pi \cdot 8,2^3} = 303,3 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} < \sigma_a,$$

APLICAȚIA 8

O bară cotită din oțel, încastrată la o extremitate, este încărcată conform figurii 25.8, a, unde $P = 1\,000 \text{ daN}$, iar $a = 100 \text{ cm}$. Cunoscînd $\sigma_a = 900 \text{ daN/cm}^2$, să se verifice bara știind că tronsonul 1—2 are secțiunea transversală dreptunghiulară cu $b = 10 \text{ cm}$ și $h = 15 \text{ cm}$, iar tronsoanele 2—3 și 3—4 au secțiuni transversale circulare, ambele cu $d = 14 \text{ cm}$.

Rezolvare

Se determină reacțiunile și se trasează diagramele N , T_y , T_z , M_z , M_y , M_t cu respectarea convențiilor de semne (fig. 25.8, b, c, d, e). Sensul de parcurgere a grinzii este arătat în figura 25.8, a.

Tronsonul 1—2 este solicitat la întindere cu încovoiere oblică, secțiunea transversală fiind dreptunghiulară. N , M_z și M_y sînt constante de-a lungul tronsonului. Se calculează σ_{ef} și se compară cu σ_a :

$$\sigma_{ef1-2} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{P}{b \cdot h} + \frac{P \cdot a}{\frac{b \cdot h^3}{6}} + \frac{P \cdot a}{\frac{h \cdot b^3}{6}};$$

înlocuind, rezultă :

$$\sigma_{ef1-2} = \frac{1\,000}{10 \cdot 15} + \frac{6 \cdot 1\,000 \cdot 100}{10 \cdot 15^3} + \frac{6 \cdot 1\,000 \cdot 100}{15 \cdot 10^3} = 673,32 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} < \sigma_a.$$

Tronsonul 2—3 este solicitat la încovoiere cu răsucire, secțiunea periculoasă trecînd prin punctul 3. Se calculează σ_{ef3} și τ_{ef3} și se compun după teoria a III-a de rezistență :

$$\sigma_{ef3} = \frac{M_{t3}}{W_{ax}} = \frac{2a \cdot P}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{32 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 1000}{\pi 14^3} = 742,79 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2},$$

$$\tau_{ef3} = \frac{M_{t3}}{W_p} = \frac{a \cdot P}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{16 \cdot 100 \cdot 1000}{\pi 14^3} = 185,70 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2},$$

$$\sigma_{ech3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{742,79^2 + 4 \cdot 185,70^2} = 830,47 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} < \sigma_a.$$

Tronsonul 3—4 este de asemenea solicitat la încovoiere cu răsucire, secțiunea periculoasă trecînd prin punctul 3. Se procedează analog :

$$\sigma_{ef3} = \frac{M_{t3}}{W_{ax}} = \frac{a \cdot P}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} = \frac{32 \cdot 100 \cdot 1000}{\pi 14^3} = 371,4 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2},$$

$$\tau_{ef3} = \frac{M_{t3}}{W_p} = \frac{2a \cdot P}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{16 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 1000}{\pi 14^3} = 371,4 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2},$$

$$\sigma_{ech3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{371,4^2 + 4 \cdot 371,4^2} = 830,47 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} < \sigma_a.$$

26.

BARE CURBE PLANE

Se consideră bare curbe plane (avînd axa o curbă plană), solicitate prin forțe coplanare. Se admit valabile ipoteza lui Bernoulli și legea lui Hooke.

26.1. RELAȚII DIFERENȚIALE ÎNTRE EFORTURI

Fie un element infinitezimal, de lungime ds și rază R , obținut prin secționarea unei bare curbe în B și C (fig. 26.1), solicitat de o sarcină distribuită p în direcție radială (înlocuită prin forța concentrată $p \cdot ds$ aplicată la mijlocul clementului BC). Pentru echilibru, în cele două secțiuni s-au introdus eforturile N , T , M , respectiv $N + dN$; $T + dT$; $M + dM$.

Se scriu ecuațiile de echilibru static: ecuațiile de proiecții pe direcțiile forțelor N , T și ecuația de momente față de punctul C :

$$N - (N + dN)\cos d\varphi + (T + dT)\sin d\varphi + p \cdot ds \sin \frac{d\varphi}{2} = 0,$$

$$T - (T + dT)\cos d\varphi - (N + dN)\sin d\varphi - p \cdot ds \cos \frac{d\varphi}{2} = 0,$$

$$M - (M + dM) - NR(1 - \cos d\varphi) + TR \sin d\varphi - p \cdot ds \cdot R \sin \frac{d\varphi}{2} = 0.$$

Înlocuind $\sin d\varphi \cong d\varphi$, $\cos d\varphi \cong 1$, făcând reducerile necesare și neglijând infiniții mici de ordin superior, se obține:

$$-dN + Td\varphi = 0,$$

$$-dT - Nd\varphi - pds = 0,$$

$$-dM + T \cdot R d\varphi = 0.$$

Înlocuind $ds = R d\varphi$, rezultă relațiile diferențiale între eforturi:

$$\frac{dN}{ds} = \frac{T}{R}; \quad \frac{dT}{ds} = -\frac{N}{R} - p; \quad \frac{dM}{ds} = T. \quad (26.1)$$

La bare în formă de arc de cerc, relațiile (26.1) devin:

$$\frac{dN}{d\varphi} = T; \quad \frac{dT}{d\varphi} = -N - p \cdot R; \quad \frac{dM}{d\varphi} = T \cdot R. \quad (26.2)$$

26.2. DIAGrame DE EFORTURI LA BARE CURBE

Se consideră bare în formă de arc de cerc, cu raza R . Eforturile se definesc aplicând metoda secțiunilor.

Forța axială N este egală cu suma proiecțiilor pe tangenta la axa barei a forțelor ce acționează de o parte a secțiunii. *Forța tăietoare* T se calculează făcând suma proiecțiilor pe normala la axa barei a forțelor ce acționează de o parte a secțiunii. *Momentul încovoietor* M este egal cu suma momentelor forțelor (și a cuplurilor) ce acționează de o parte a secțiunii, față de secțiune. Dacă privim bara din centrul de curbura, convențiile de semne privind eforturile coincid cu cele stabilite la bare drepte. Diagramele se construiesc astfel încât ordonatele sînt pe direcția razei (normale la axa barei).

APLICAȚIA 1

Să se construiască diagramale N , T , M la bara semicirculară din figura 26.2, a.

Rezolvare

Se calculează reacțiunile $H_1 = P$; $V_1 = \frac{P}{2}$; $V_2 = \frac{P}{2}$.

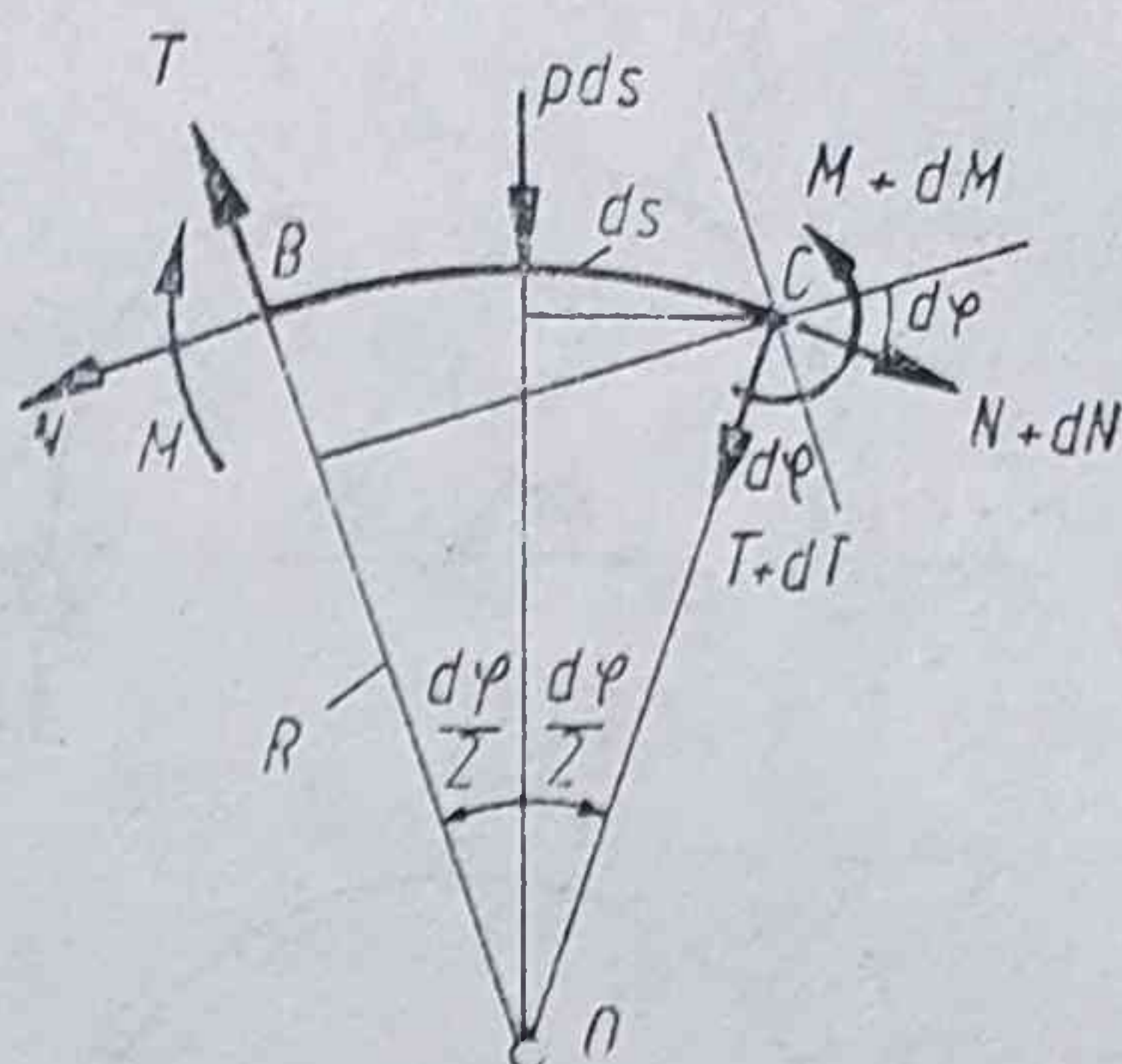


Fig. 26.1

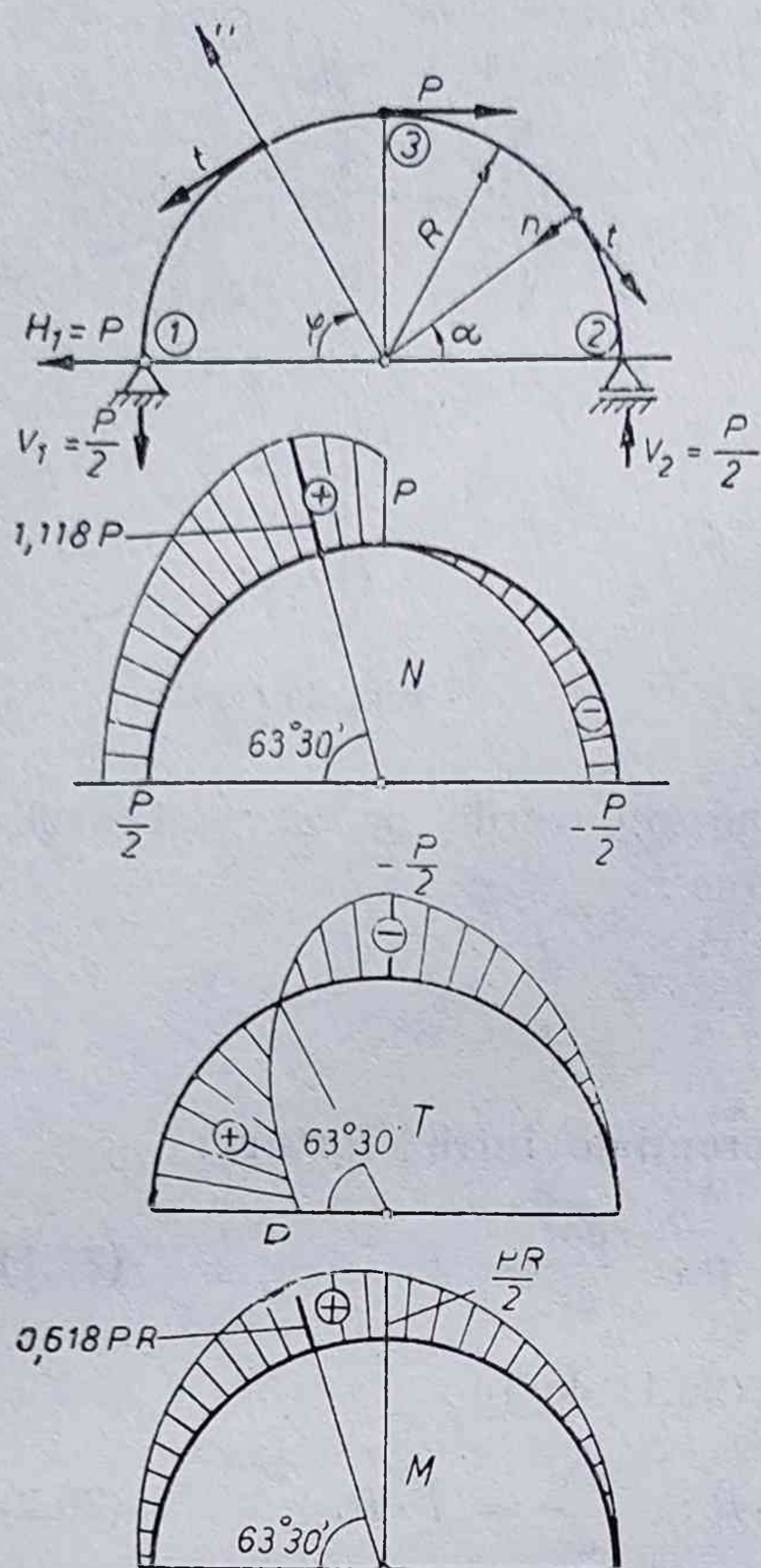


Fig. 26.2

Se trasează aproximativ diagramele N , T , M (fig. 26.2, b , c , d).

Se vede că $T_{13} = 0$ la $\varphi = \arctg 2 = 63^\circ 30'$. În această secțiune se calculează $N_{max} = 1,118 P$ și $M_{max} = 0,618 P \cdot R$, după care se corectează diagramele. (Pentru claritate, la diagramele T și M s-a inversat convenția de semne privind amplasarea diagramelor).

26.3. EFORTURI UNITARE ÎN BARE CURBE

Fie un element de bară curbă, delimitat de două secțiuni plane (între care există unghiul $d\varphi$) și solicitat la încovoiere pură prin momentul M (fig. 26.3). Se notează: R — raza centrului de greutate G , R_1 — raza interioară, R_2 — raza exterioară, r — raza fibrei neutre, e — excentricitatea axei neutre Nz , y — distanța de la axa neutră Nz la o fibră oarecare, d_1 — distanța de la axa neutră la fibra interioară, d_2 — distanța de la axa neutră la fibra exterioară, A — aria suprafeței secțiunii transversale.

Presupunând secțiunea din stînga fixă, sub efectul momentului încovoiător secțiunea din dreapta se rotește (în raport cu cea din stînga) cu unghiul

Se scriu expresiile analitice ale eforturilor într-o secțiune oarecare:

$$N_{13} = P \sin \varphi + \frac{P}{2} \cos \varphi,$$

$$T_{13} = P \cos \varphi - \frac{P}{2} \sin \varphi,$$

$$M_{13} = P \cdot R \sin \varphi - \frac{P}{2} R(1 - \cos \varphi)$$

și

$$N_{32} = -\frac{P}{2} \cos \alpha,$$

$$T_{32} = -\frac{P}{2} \sin \alpha,$$

$$M_{32} = \frac{P}{2} R(1 - \cos \alpha).$$

Se calculează valorile eforturilor în secțiunile 1, 2 și 3:

$$N_1 = \frac{P}{2}; \quad T_1 = P; \quad M_1 = 0,$$

$$N_2 = -\frac{P}{2}; \quad T_2 = 0; \quad M_2 = 0,$$

$$N_{3-\varepsilon} = P; \quad N_{3+\varepsilon} = 0; \quad T_3 = -\frac{P}{2};$$

$$M_3 = \frac{P \cdot R}{2}.$$

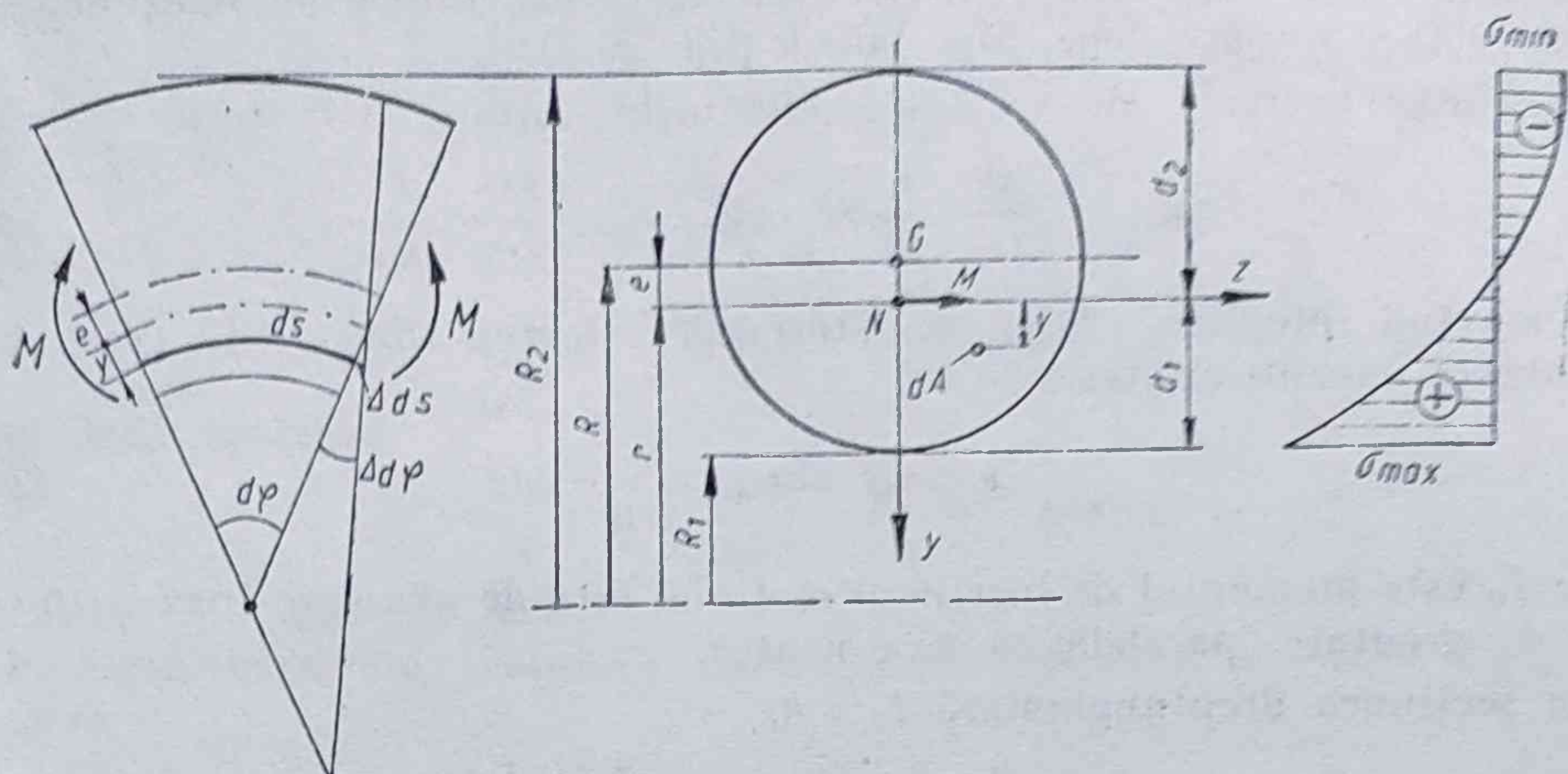


Fig. 26.3

$\Delta d\varphi$. Ca urmare, fibra oarecare de lungime $ds = (r - y)d\varphi$ se lungeste cu $\Delta ds = y \cdot \Delta d\varphi$, deci lungirea specifică a fibrei este :

$$\varepsilon = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{y \cdot \Delta d\varphi}{(r - y)d\varphi},$$

iar efortul unitar normal (tangent la fibră) este

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E \cdot \Delta d\varphi}{d\varphi} \frac{y}{r - y}. \quad (26.3)$$

Deoarece în secțiune nu există forță axială, suma forțelor axiale elementare este nulă :

$$\int_A \sigma \cdot dA = \int_A \frac{E \cdot \Delta d\varphi}{d\varphi} \frac{y \cdot dA}{r - y} = 0,$$

de unde rezultă

$$\int_A \frac{y \cdot dA}{r - y} = 0, \quad (26.4)$$

relație pe baza căreia se determină poziția axei neutre.

Suma momentelor forțelor axiale elementare față de Nz egalează momentul încovoietor M , prin urmare ;

$$\begin{aligned} M &= \int_A y \cdot \sigma dA = \frac{E \cdot \Delta d\varphi}{d\varphi} \int_A \frac{y^2 \cdot dA}{r - y} = - \frac{E \cdot \Delta d\varphi}{d\varphi} \int_A \left(y - \frac{r \cdot y}{r - y} \right) dA = \\ &= - \frac{E \cdot \Delta d\varphi}{d\varphi} \int_A y \cdot dA + \frac{E \cdot \Delta d\varphi}{d\varphi} r \int_A \frac{y \cdot dA}{r - y} = - \frac{E \cdot \Delta d\varphi}{d\varphi} A y_G = \frac{E \cdot \Delta d\varphi}{d\varphi} A \cdot e. \end{aligned}$$

Înlocuind $\frac{E \cdot \Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{A \cdot e}$ în relația (26.3), se obține expresia eforturilor unitare normale :

$$\sigma = \frac{M}{A \cdot e} \frac{y}{r - y}. \quad (26.5)$$

Rezultă că la bare curbe, distribuția eforturilor unitare pe înălțimea secțiunii se face după o lege hiperbolică (fig. 26.3).

În fibrele extreme ale secțiunii, eforturile unitare au valorile :

$$\sigma_{max} = \frac{M}{A \cdot e} \frac{d_1}{R_1}; \quad \sigma_{min} = -\frac{M}{A \cdot e} \frac{d_2}{R_2}. \quad (26.6)$$

Rezolvînd integrala (26.4) se determină valoarea razei r . În general, se calculează excentricitatea :

$$e = R - r \cong \frac{I_G}{A \cdot R}, \quad (26.7)$$

unde I_G este momentul de inerție al secțiunii față de axa care trece prin centrul de greutate, paralelă cu axa neutră.

La secțiunea dreptunghiulară $b \times h$,

$$e \cong \frac{h^2}{12R}.$$

La secțiunea circulară de diametru d , raza fibrei neutre este :

$$r = \frac{d^2}{4(2R - \sqrt{4R^2 - d^2})}. \quad (26.8)$$

În cazul cînd se consideră acțiunea simultană a forței axiale, ca la aplicația 1, efortul unitar maxim se calculează cu formula :

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{A \cdot e} \frac{d_1}{R_1}. \quad (26.9)$$

În general, la elemente curbe solicitarea maximă apare în porțiunea situată spre centrul de curbură.

APLICAȚIA 2

Să se determine forța maximă P cu care se poate încărcă bara semicirculară de la aplicația 1 (fig. 26.2, a), dacă $R = 40$ cm, iar bara este din oțel cu $\sigma_a = 1\,000$ daN/cm², avînd : a) secțiune pătrată, cu latura $a = 8$ cm ; b) secțiune circulară, cu diametrul $d = 8$ cm.

Rezolvare

Forța maximă P se determină din condiția $\sigma_{max} = \sigma_a$. Efortul unitar maxim se calculează cu formula (26.9)

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{A \cdot e} \frac{d_1}{R_1},$$

unde $N = N_{max} = 1,118 P$ și $M = M_{max} = 0,618 P \cdot R$ (în secțiunea periculoasă la $\varphi = 63^\circ 30'$) au fost determinate la aplicația 1.

a) Dacă bara are secțiunea pătrată ($a = 8$ cm), condiția $\sigma_{max} = \sigma_a$ devine ;

$$\frac{1,118P}{a^2} + \frac{0,618P \cdot R}{a^2 \cdot e} \frac{d_1}{R_1} = \sigma_a,$$

unde :

$$e = R - r \cong \frac{I_G}{A \cdot R} = \frac{a^4}{12a^2 \cdot R} = \frac{8^2}{12 \cdot 40} = 0,133 \text{ cm},$$

$$R_1 = R - \frac{a}{2} = 40 - 4 = 36 \text{ cm},$$

$$d_1 = \frac{a}{2} - e = 4 - 0,133 = 3,867 \text{ cm}.$$

Înlocuind, rezultă :

$$\frac{1,118P}{8^2} + \frac{0,618 \cdot 40P}{8^2 \cdot 0,133} \frac{3,867}{36} = 1\,000,$$

de unde $P = 3\,035,63 \text{ daN}$.

b) Dacă bara are secțiunea circulară ($d = 8 \text{ cm}$), condiția $\sigma_{max} = \sigma_a$ se scrie :

$$\frac{4 \cdot 1,118P}{\pi \cdot d^2} + \frac{4 \cdot 0,618P \cdot R}{\pi \cdot d^2 \cdot e} \frac{d_1}{R_1} = \sigma_a,$$

unde :

$$e = R - r = R - \frac{d^2}{4(2R - \sqrt{4R^2 - d^2})} = 40 - \frac{8^2}{4(2 \cdot 40 - \sqrt{4 \cdot 40^2 - 8^2})} = 0,101 \text{ cm},$$

$$R_1 = R - \frac{d}{2} = 40 - 4 = 36 \text{ cm},$$

$$d_1 = \frac{d}{2} - e = 4 - 0,101 = 3,899 \text{ cm}.$$

Înlocuind, rezultă :

$$\frac{4 \cdot 1,118P}{\pi \cdot 8^2} + \frac{4 \cdot 0,618 \cdot 40P}{\pi \cdot 8^2 \cdot 0,101} \frac{3,899}{36} = 1\,000,$$

de unde $P = 1\,819,5 \text{ daN}$.

27.

METODE ENERGETICE PENTRU CALCULUL DEPLASĂRILOR

27.1. ENERGIA POTENȚIALĂ TOTALĂ DE DEFORMAȚIE

În cazul general de solicitare, când în secțiunea transversală acționează eforturile N , T , M_t și M_x , energia de deformare acumulată de o bară dreaptă, în echilibru static, este

$$W = \int_l \frac{N^2 \cdot dx}{2E \cdot A} + \int_l \frac{T^2 \cdot dx}{2\alpha \cdot G \cdot A} + \int_l \frac{M_t^2 \cdot dx}{2E \cdot I_x} + \int_l \frac{M_x^2 \cdot dx}{2G \cdot I_p} \quad (27.1)$$

unde s-au utilizat expresiile (20.5), (22.20) și (21.13). Al doilea termen din membrul drept al relației (27.1) reprezintă energia de deformare acumulată datorită forțelor tăietoare. Coeficientul α ține seama de distribuția neuniformă a eforturilor unitare tangențiale pe secțiune.

27.2. TEOREMA RECIPROCITĂȚII LUCRULUI MECANIC (TEOREMA LUI BETTI)

Se consideră un corp elastic, în echilibru static, asupra căruia se aplică două stări succesive de solicitare, produse de două grupe succesive de sarcini, P_i și P'_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Forțele P'_i se aplică în aceleași puncte și pe aceleași direcții ca și forțele P_i , putînd fi considerate drept alte valori ale acestora.

Aplicînd forțele P_i , corpul se deformează.

Se notează cu δ_i proiecția deplasării punctului de aplicație al forței P_i , pe direcția acesteia. Lucrul mecanic al forțelor exterioare are expresia :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta_i. \quad (27.2)$$

Corespunzător, lucrul mecanic al forțelor P'_i pe deplasările δ'_i are expresia :

$$L' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P'_i \cdot \delta'_i. \quad (27.3)$$

La trecerea de la prima stare de solicitare la a doua, forțele exterioare efectuează lucrul mecanic :

$$L' - L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P'_i \cdot \delta'_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta_i. \quad (27.4)$$

Dacă se aplică asupra corpului mai întîi primul grup de sarcini P_i , care produce lucrul mecanic L , apoi se aplică forțele adiționale $(P'_i - P_i)$, astfel că lucrul mecanic total devine L' , se poate considera că diferența $(L' - L)$ este produsă de forțele elastice $(P'_i - P_i)$ pe deplasările $(\delta'_i - \delta_i)$ și de forțele P_i , care se aflau aplicate pe corp și care se deplasează pe $(\delta'_i - \delta_i)$, rămî-nînd constante.

Deci, se poate scrie :

$$\begin{aligned} L' - L &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (P'_i - P_i)(\delta'_i - \delta_i) + \sum_{i=1}^n P_i(\delta'_i - \delta_i) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P'_i \delta'_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta'_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P'_i \cdot \delta_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta_i. \end{aligned} \quad (27.5)$$

Egalînd expresiile (27.4) și (27.5), deci aplicînd principiul suprapunerii efectelor, rezultă :

$$\sum_{i=1}^n P'_i \cdot \delta_i = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta'_i. \quad (27.6)$$

Această egalitate exprimă *teorema reciprocității lucrului mecanic*: dacă asupra unui sistem elastic se aplică succesiv două încărcări diferite, atunci lucrul mecanic efectuat de forțele din prima încărcare pe deplasările produse de a doua încărcare este egal cu lucrul mecanic efectuat de forțele din a doua încărcare pe deplasările produse de prima încărcare.

În definiția de mai sus s-au considerat forțe și deplasări generalizate. Astfel, în cazul solicitării prin momente concentrate (cupluri), deplasările corespunzătoare sînt rotații.

27.3. TEOREMA RECIPROCITĂȚII DEPLASĂRILOR (TEOREMA LUI MAXWELL)

Se consideră o bară simplu rezemată, la care prima încărcare este formată de forța P , aplicată în secțiunea i (fig. 27.1, a), iar a doua încărcare este formată tot de o forță P , aplicată în secțiunea j (fig. 27.1, b). Se notează v_{ij} săgeata produsă în secțiunea i de forța P aplicată în secțiunea j .

Pentru forțele aplicate în secțiunile i și j , relația (27.6) devine:

$$P'_i \cdot \delta_i + P'_j \cdot \delta_j = P_i \cdot \delta'_i + P_j \cdot \delta'_j. \quad (27.7)$$

Pentru sistemul particular de forțe ales și cu notațiile din figura 27.1, rezultă:

$$P_i = P; \delta'_i = v_{ij}; P_j = 0,$$

$$P'_i = 0; \delta_j = v_{ji}; P'_j = P,$$

care, înlocuite în relația (27.7), conduc la

$$Pv_{ji} = P \cdot v_{ij}, \text{ sau } v_{ji} = v_{ij}. \quad (27.8)$$

Această egalitate exprimă *teorema reciprocității deplasărilor*: deplasarea produsă în secțiunea i cînd o forță este aplicată în secțiunea j este egală cu deplasarea produsă în secțiunea j cînd aceeași forță este aplicată în secțiunea i .

Dacă $P = 1$, se notează $v_{ij} = \delta_{ij}$, unde δ_{ij} se numește *coeficient de influență*. Relația (27.8) devine

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad (27.9)$$

fiind utilizată frecvent în calcule.

27.4. TEOREMA MINIMULUI ENERGIEI POTENȚIALE TOTALE

Conform principiului lucrului mecanic virtual (stabilit de Bernoulli), condiția necesară și suficientă ca un sistem de puncte materiale să fie în echilibru este ca lucrul mecanic virtual al forțelor exterioare și interioare care acționează asupra punctelor sistemului să fie nul. La corpuri deformabile, lucrul mecanic

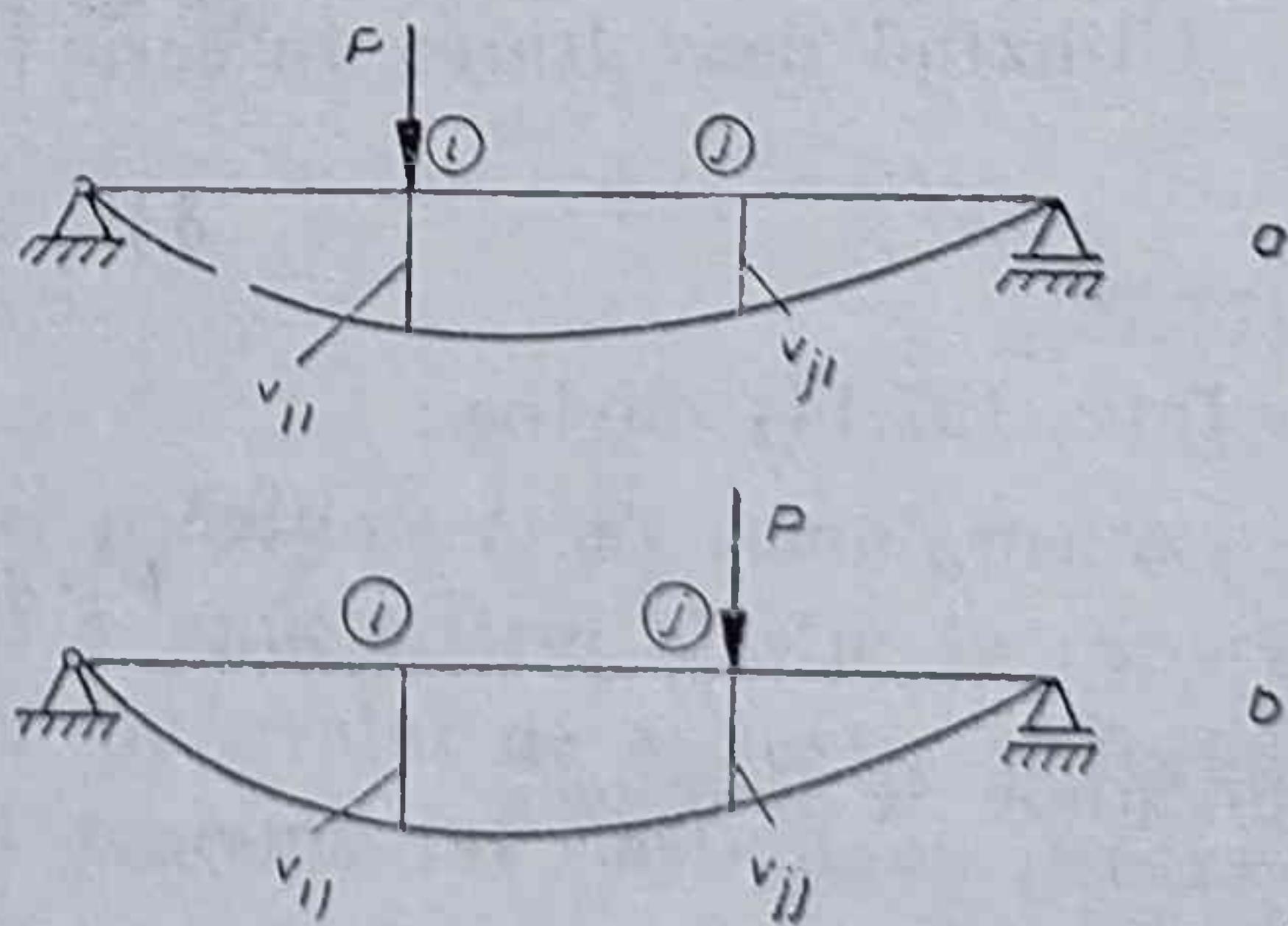


Fig. 27.1

virtual de deformare este egal cu lucrul mecanic al forțelor exterioare pe deplasările virtuale. Deci, la sisteme elastice, condiția de echilibru între forțele interioare și cele exterioare se poate exprima analitic sub forma :

$$\sum_{j=1}^n P_j \cdot \delta \xi_j + \delta L_I = 0, \quad (27.10)$$

unde primul termen reprezintă lucrul mecanic al forțelor exterioare P_j pe deplasările (virtuale) infinit mici, independente de starea de solicitare și compatibile cu legăturile $\delta \xi_j$, iar al doilea termen reprezintă lucrul mecanic al forțelor interioare pe deplasările virtuale $\delta \xi_j$.

Dar deplasările $\delta \xi_j$ nu sînt o consecință a acțiunii sistemului de forțe P_j asupra corpului, fiind independente de sistemul de forțe. În aceste condiții, forțele P_j pot fi considerate constante. Primul termen din relația (27.10) devine :

$$\sum_{j=1}^n P_j \cdot \delta \xi_j = \sum_{j=1}^n \delta(P_j \cdot \xi_j) = \delta \sum_{j=1}^n P_j \cdot \xi_j = \delta L_E = -\delta W_E, \quad (27.11)$$

unde L_E este lucrul mecanic al forțelor exterioare, iar W_E este energia potențială corespunzătoare.

Analog se poate stabili relația :

$$\delta L_I = -\delta W_I, \quad (27.12)$$

unde W_I este energia potențială de deformare (energia internă).

Relația (27.10) se mai scrie :

$$\delta L = \delta L_E + \delta L_I = 0,$$

sau

$$\delta \pi = \delta(W_E + W_I) = 0, \quad (27.13)$$

unde L este lucrul mecanic total, iar π — energia potențială totală.

Această relație exprimă *teorema minimului energiei potențiale totale* : dintre toate stările de deformare compatibile cu legăturile, starea de deformare care corespunde echilibrului este aceea care face minimă energia potențială totală.

27.5. PRIMA TEOREMĂ A LUI CASTIGLIANO

Înlocuind egalitatea (27.12) prin (27.10), se obține :

$$\sum_{j=1}^n P_j \cdot \delta \xi_j - \delta W_I = 0. \quad (27.14)$$

Utilizînd dezvoltarea în serie :

$$\delta W_I = \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_I}{\partial \xi_j} \delta \xi_j,$$

relația (27.14) devine :

$$\sum_{j=1}^n P_j \cdot \delta \xi_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_I}{\partial \xi_j} \delta \xi_j,$$

de unde se deduce :

$$P_j = \frac{\partial W_I}{\partial \xi_j}. \quad (27.15)$$

Relația (27.15) exprimă analitic *prima teoremă a lui Castigliano*: o forță oarecare este egală cu derivata parțială a energiei potențiale de deformare în raport cu proiecția deplasării punctului de aplicație al forței pe direcția acesteia.

27.6. PRINCIPIUL ENERGIEI POTENȚIALE COMPLEMENTARE

La materiale neelastice sau la structuri cu neliniarități geometrice, caracteristica forță-deformare este neliniară (fig. 27.2).

Aria suprafeței hașurate din figura 27.2 definește *energia potențială complementară*, mărime în general fără semnificație fizică, introdusă de Engesser. Aria suprafeței nehașurate de sub curbă definește lucrul mecanic al forței P_k , egal cu energia potențială acumulată de corp.

În cazul acțiunii mai multor forțe, energia potențială *totală* complementară se poate exprima sub forma:

$$W^* = \sum_{k=1}^n P_k \cdot \delta_k - W. \quad (27.16)$$

Se calculează derivata parțială în raport cu o forță P_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^*}{\partial P_j} &= \sum_{k=1}^n \left(P_k \frac{\partial \delta_k}{\partial P_j} + \delta_k \frac{\partial P_k}{\partial P_j} \right) - \frac{\partial W}{\partial P_j} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(P_k \frac{\partial \delta_k}{\partial P_j} + \delta_k \frac{\partial P_k}{\partial P_j} - \frac{\partial W}{\partial \delta_k} \frac{\partial \delta_k}{\partial P_j} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \delta_k \frac{\partial P_k}{\partial P_j} + \sum_{k=1}^n \left(P_k - \frac{\partial W}{\partial \delta_k} \right) \frac{\partial \delta_k}{\partial P_j}. \end{aligned}$$

Deoarece, conform relației (27.15), expresia din paranteză este nulă, rezultă:

$$\frac{\partial W^*}{\partial P_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_k}{\partial P_j} \delta_k = \delta_j,$$

deci

$$\delta_j = \frac{\partial W^*}{\partial P_j}. \quad (27.17)$$

Relația (28.17) exprimă *principiul energiei potențiale totale complementare*: derivata parțială a energiei complementare a unui sistem elastic în raport cu o forță este egală cu proiecția deplasării punctului de aplicație al forței pe direcția acesteia. Ea se mai numește și teorema lui Castigliano generalizată.

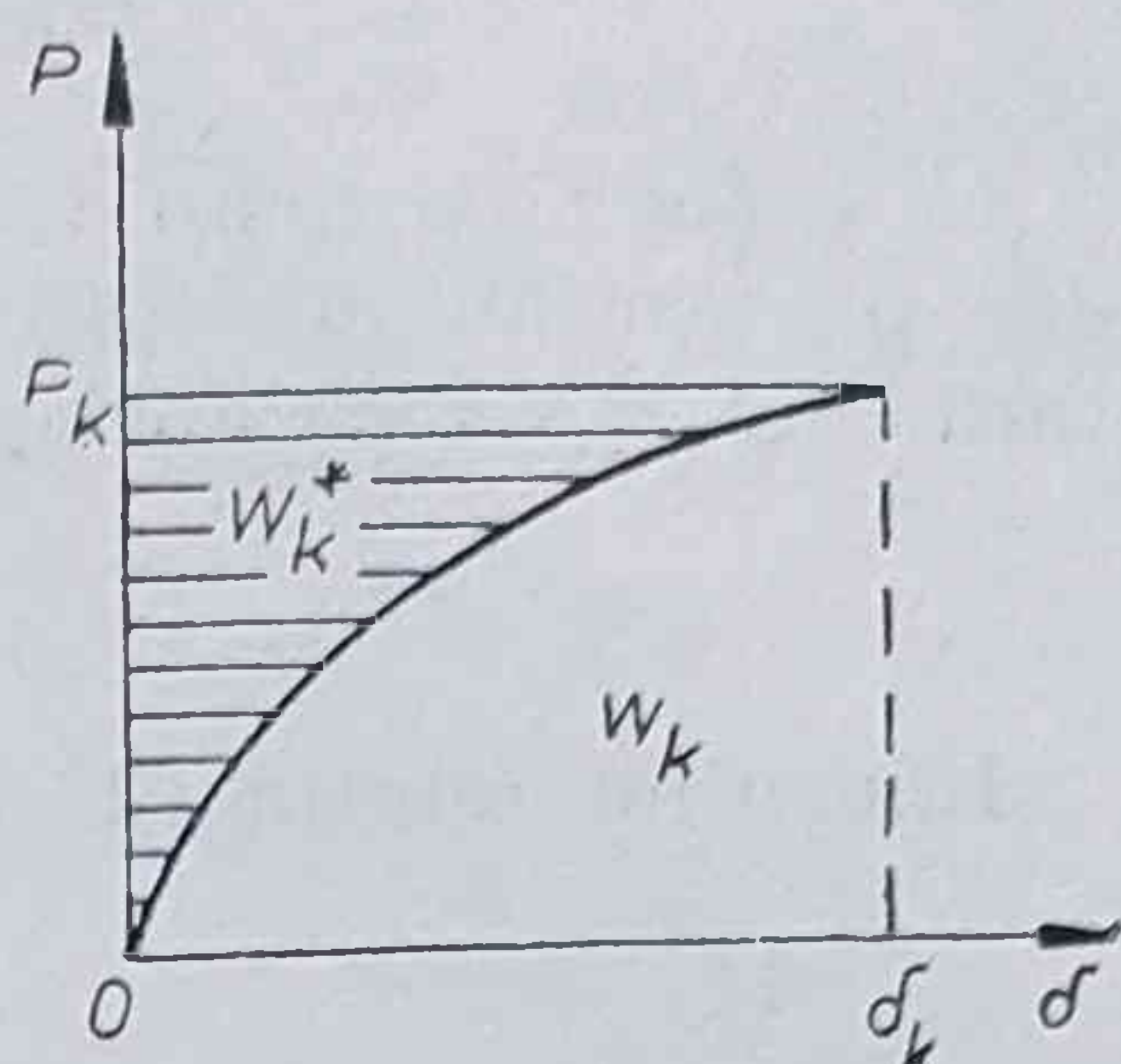


Fig. 27.2

27.7. A DOUA TEOREMĂ A LUI CASTIGLIANO

În cazul sistemelor liniare, între sarcinile aplicate și deplasările punctelor de aplicație ale acestora există relații liniare. Rezultă că energia complementară este egală cu energia potențială de deformare

$$W = W^*. \quad (27.18)$$

Înlocuind relația (27.18) în relația (27.17), se obține :

$$\delta_j = \frac{\partial W}{\partial P_j}. \quad (27.19)$$

Relația (27.19) exprimă analitic *a doua teoremă a lui Castigliano* : derivata parțială a energiei potențiale de deformare, acumulate de un sistem elastic, în raport cu o forță exterioară este egală cu proiecția deplasării punctului de aplicație al forței pe direcția acesteia.

În cazul unui moment exterior concentrat, derivata parțială a energiei de deformare în raport cu un cuplu este egală cu rotirea în punctul de aplicație a acestuia.

27.8. CALCULUL DEFORMAȚIILOR LA ÎNCOVOIERE ALE BARELOR CU AJUTORUL TEOREMEI LUI CASTIGLIANO

Pentru bara solicitată la încovoiere, energia potențială de deformare are expresia (22.20) :

$$W = \int_l \frac{M^2 \cdot dx}{2E \cdot I_z}.$$

Conform teoremei lui Castigliano (27.19), la o bară cu secțiunea constantă, deplasarea pe direcția unei forțe exterioare P_j este :

$$\delta_j = \frac{\partial W}{\partial P_j} = \frac{\partial}{\partial P_j} \int_l \frac{M^2 \cdot dx}{2E \cdot I} = \frac{1}{E \cdot I} \int_l M \frac{\partial M}{\partial P_j} dx, \quad (27.20)$$

iar unghiul de rotire în punctul de aplicație al unui cuplu M_j este :

$$\varphi_j = \frac{\partial W}{\partial M_j} = \frac{1}{E \cdot I} \int_l M \frac{\partial M}{\partial M_j} dx. \quad (27.21)$$

Dacă se calculează deplasarea într-un punct în care (pe direcția dorită) nu acționează o forță exterioară, se introduce o forță fictivă, se calculează expresia analitică a momentului încovoietor M funcție de forțele exterioare și de sarcina fictivă, se calculează derivata momentului încovoietor în raport cu forța fictivă, apoi se anulează forța fictivă în expresia lui M care se introduce în relația (27.20).

Dacă asupra sistemului acționează mai multe forțe cu notații similare, atunci cea în dreptul căreia se calculează deformarea se notează cu un simbol diferit de al celorlalte. După efectuarea derivatei se poate reveni la simbolul inițial.

APLICAȚIA 1

Se cere să se calculeze săgeata și unghiul de rotire al liniei elastice în capătul liber al barei din figura 27.3.

Rezolvare

Pentru determinarea săgeții se utilizează relația

$$v_2 = \frac{1}{E \cdot I} \int_l M \frac{\partial M}{\partial P} dx.$$

Se calculează momentul încovoietor în secțiunea x :

$$M(x) = -P \cdot x$$

și derivata:

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x.$$

Rezultă săgeata:

$$v_2 = \frac{1}{E \cdot I} \int_0^l (-P \cdot x)(-x) dx = \frac{P \cdot l^3}{3E \cdot I}.$$

Pentru determinarea unghiului de rotire, se introduce momentul fictiv M_0 . Se calculează:

$$M(x) = -P \cdot x - M_0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_0} = -1,$$

apoi unghiul de rotire, înlocuind $M_0 = 0$ în expresia momentului:

$$\varphi_2 = \frac{1}{E \cdot I} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_0} dx = \frac{1}{E \cdot I} \int_0^l (-P \cdot x)(-1) dx = \frac{P \cdot l^2}{2E \cdot I}.$$

27.9. METODA MOHR-MAXWELL

Într-o secțiune oarecare a unei bare drepte, solitate la încovoiere, momentul încovoietor se poate exprima sub forma:

$$M = m \cdot P_j + \mu, \quad (27.22)$$

unde primul termen din membrul drept arată contribuția forței P_j , iar al doilea termen arată contribuția celorlalte sarcini aplicate barei.

Se calculează derivata în raport cu P_j

$$\frac{\partial M}{\partial P_j} = m. \quad (27.23)$$

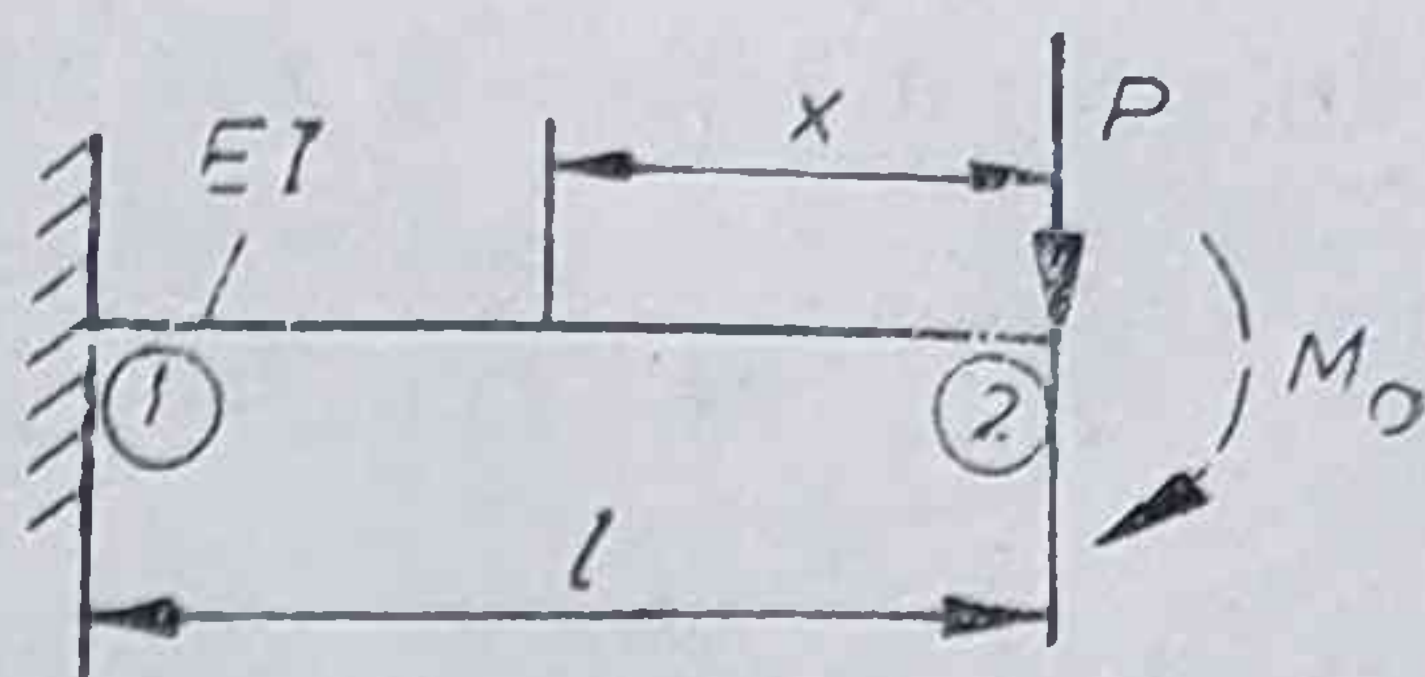


Fig. 27.3

Înlocuind expresia (27.23) în relația (27.20), rezultă

$$\delta_j = \frac{1}{E \cdot I} \int_l M \frac{\partial M}{\partial P_j} dx = \frac{1}{E \cdot I} \int M \cdot m \cdot dx. \quad (27.24)$$

Dacă se înlocuiește în expresia (27.22) $P_j = 1$ și $\mu = 0$, rezultă $M = m$, deci în relația (27.24) m reprezintă momentul încovoietor într-o secțiune a barei care are aceeași rezemare ca bara studiată, dar este solicitată de o singură forță egală cu unitatea, aplicată în punctul și pe direcția pe care se calculează deformația.

Analog, se poate arăta că unghiul de rotire se calculează cu o relație similară :

$$\varphi_j = \frac{1}{E \cdot I} \int M \cdot m \cdot dx, \quad (27.25)$$

unde m este momentul produs în secțiunea x atunci când asupra barei acționează un singur cuplu egal cu unitatea, aplicat în punctul respectiv.

APLICAȚIA 2

Se cere să se calculeze săgeata la mijlocul barei din figura 27.4, *a*.

Rezolvare

Datorită simetriei, relația (27.24) se scrie :

$$v_3 = \frac{2}{E \cdot I} \int_0^{l/2} M \cdot m \cdot dx,$$

unde

$$M = \frac{P}{2} x,$$

iar din figura 27.4, *b* se obține :

$$m = \frac{x}{2}.$$

Rezultă :

$$v_3 = \frac{2}{E \cdot I} \int_0^{l/2} \frac{P \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{P \cdot l^3}{48 E \cdot I}. \quad (27.26)$$

27.10. REGULA DE INTEGRARE A LUI VEREȘCEAGHIN

În figura 27.5 s-a reprezentat diagrama M , de formă oarecare și diagrama m , care la bare drepte are, în cazul general, o variație liniară.

Rezolvarea integralei lui Mohr :

$$\int M \cdot m \cdot dx \quad (27.27)$$

se poate face prin metoda grafo-analitică a lui Vereșceaghin.

În secțiunea x

$$m = x \operatorname{tg} \alpha.$$

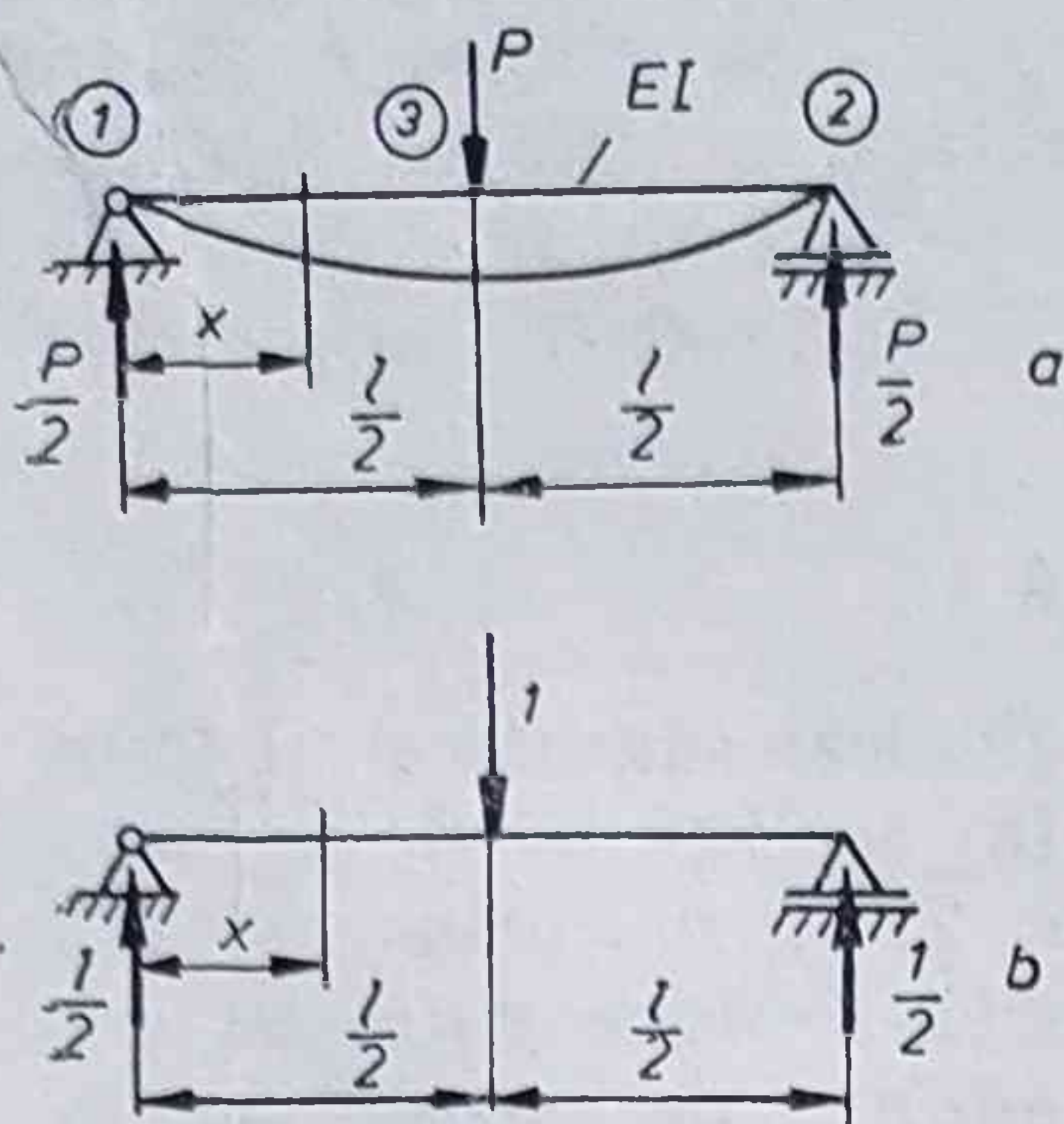


Fig. 27.4

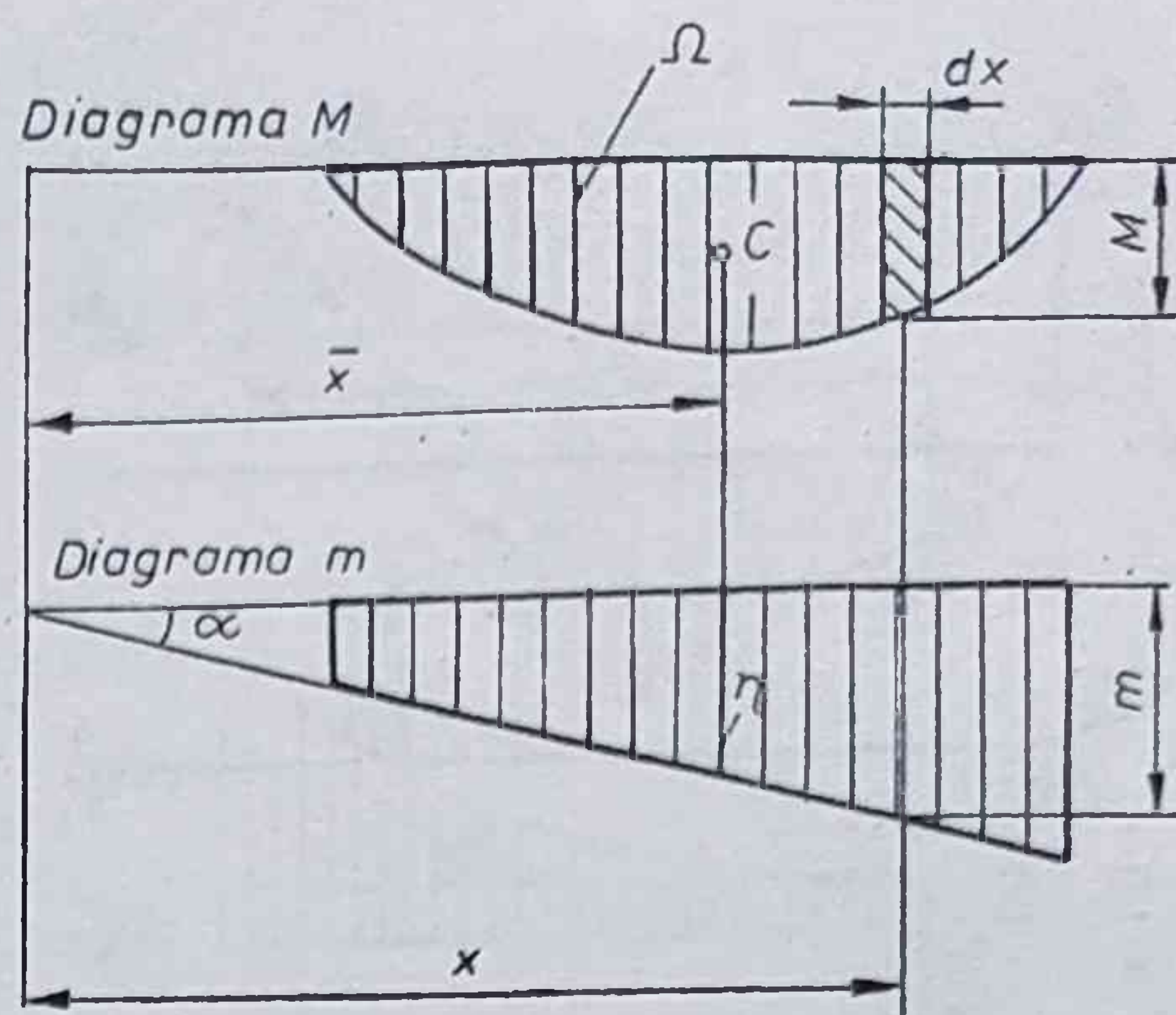


Fig. 27.5

Elementul hașurat al diagramei M are aria :

$$d\Omega = M \cdot dx.$$

Cu aceste notații, integrala (27.27) se poate scrie :

$$\int M \cdot m \cdot dx = \int x \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot d\Omega = \operatorname{tg} \alpha \int x \cdot d\Omega = \operatorname{tg} \alpha \cdot \bar{x} \cdot \Omega = \eta \cdot \Omega. \quad (27.28)$$

Rezultă că *integrala lui Mohr* (27.27) se poate calcula înmulțind aria Ω a diagramei M cu ordonata η a diagramei m , din dreptul centrului de greutate al suprafeței diagramei M .

De notat că metoda lui Vereșceaghin se aplică numai la bare drepte, la care diagrama m este liniară. Dacă diagrama m are porțiuni cu înclinări diferite, relația (27.28) se aplică pe intervale cu pantă constantă.

APLICAȚIA 3

Se cere să se calculeze panta liniei elastice pe reazemul 1 și săgeata la mijlocul barei din figura 27.6, *a* prin metoda Mohr-Maxwell și regula de integrare a lui Vereșceaghin.

Rezolvare

În figura 27.6, *b* s-a construit diagrama M .

Pentru calculul săgeții v_3 , se construiește sistemul din figura 27.6, *c*. Diagrama m este dată în figura 27.6, *d*. Deoarece diagrama m are pante diferite, calculul se face pe intervale :

$$v_3 = \frac{2}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{P \cdot l}{4} \cdot \frac{l}{6} = \frac{P \cdot l^3}{48 E \cdot I}.$$

Pentru calculul unghiului în reazemul 1, se aplică un cuplu egal cu 1 pe reazemul barei din figura 27.6, *e* și se construiește diagrama m din figura 27.6, *f* :

$$\varphi_1 = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{P \cdot l}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{P \cdot l^2}{16 E \cdot I}.$$

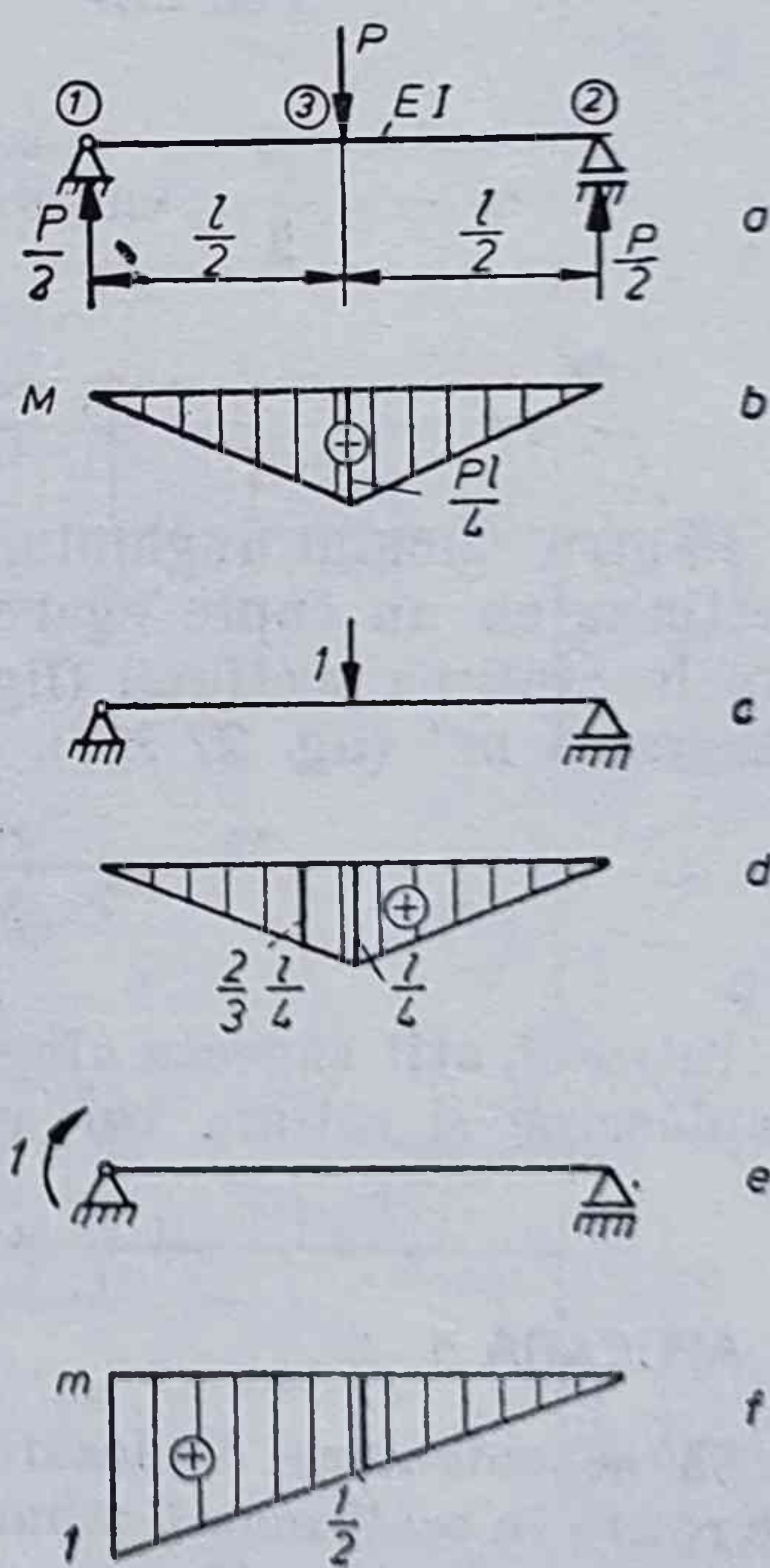


Fig. 27.6

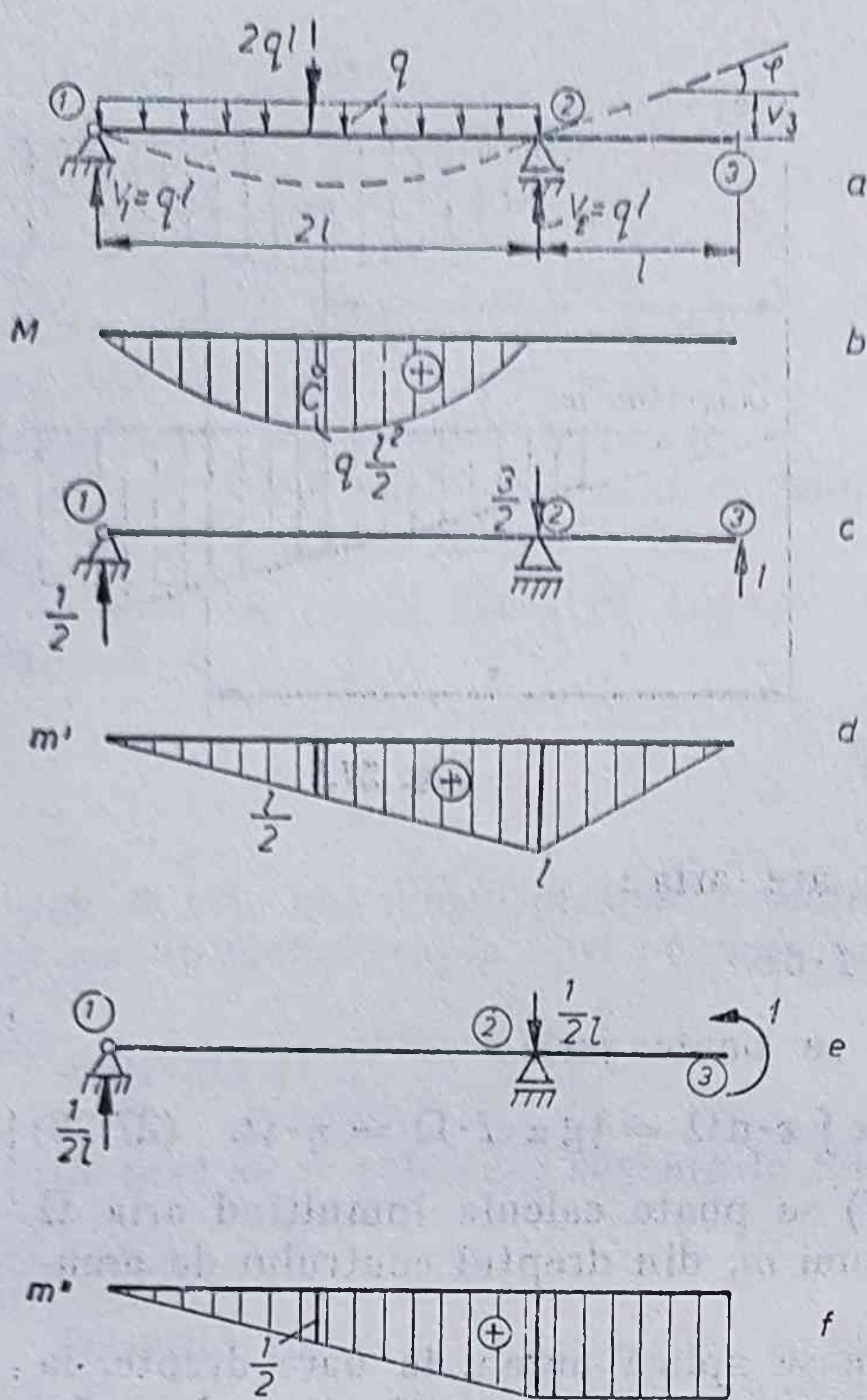


Fig. 27.7

Dacă în urma aplicării unei metode energetice se obține o deformare negativă, rezultă că aceasta are loc în sens contrar forței sau cuplului ce acționează în punctul respectiv.

APLICAȚIA 4

Să se calculeze săgeata și unghiul de rotire în secțiunea 3 a barei din figura 27.7, a, prin metoda Mohr-Maxwell-Veresceaghin. Se cunoaște modulul de rigiditate la încovoiere $E \cdot I$.

Rezolvare

Se determină reacțiunile și se construiește diagrama M (fig. 27.7, b). Pentru calculul săgeții în punctul 3, se aplică în acest punct o forță verticală egală cu 1, orientată în sensul în care se presupune că are loc deplasarea (fig. 27.7, c). Se calculează reacțiunile și se trasează diagrama m' (fig. 27.7, d). Suprafața diagramei M fiind mărginită de linia zero și parabola

$q \cdot l \cdot x - q \frac{x^2}{2}$, va avea aria egală cu $\frac{2}{3} 2l \cdot q \frac{l^2}{2}$. Săgeata va fi :

$$v_3 = \frac{1}{E \cdot I} \frac{2}{3} 2l \cdot q \frac{l^2}{2} \frac{1}{2} = \frac{q \cdot l^4}{3E \cdot I}.$$

Pentru calculul unghiului de rotire a secțiunii 3, se încarcă bara în această secțiune cu un cuplu egal cu 1, orientat în sensul în care se presupune că are loc rotirea secțiunii (fig. 27.7, e). Se calculează reacțiunile și se trasează diagrama m'' (fig. 27.7, f). Unghiul de rotire va fi :

$$\varphi_3 = \frac{1}{E \cdot I} \frac{2}{3} 2l \frac{q \cdot l^2}{2} \frac{1}{2} = \frac{q \cdot l^3}{3E \cdot I}.$$

Întrucât atât săgeata cât și unghiul de rotire au rezultat cu semnul pozitiv, deplasarea și rotirea vor avea loc în sensurile presupuse inițial.

APLICAȚIA 5

Să se calculeze deplasările pe verticală și orizontală, precum și unghiul de rotire în secțiunea 2 a barei cotite din figura 27.8, a prin metoda Mohr-Maxwell-Veresceaghin. Se cunoaște modulul de rigiditate la încovoiere $E \cdot I$.

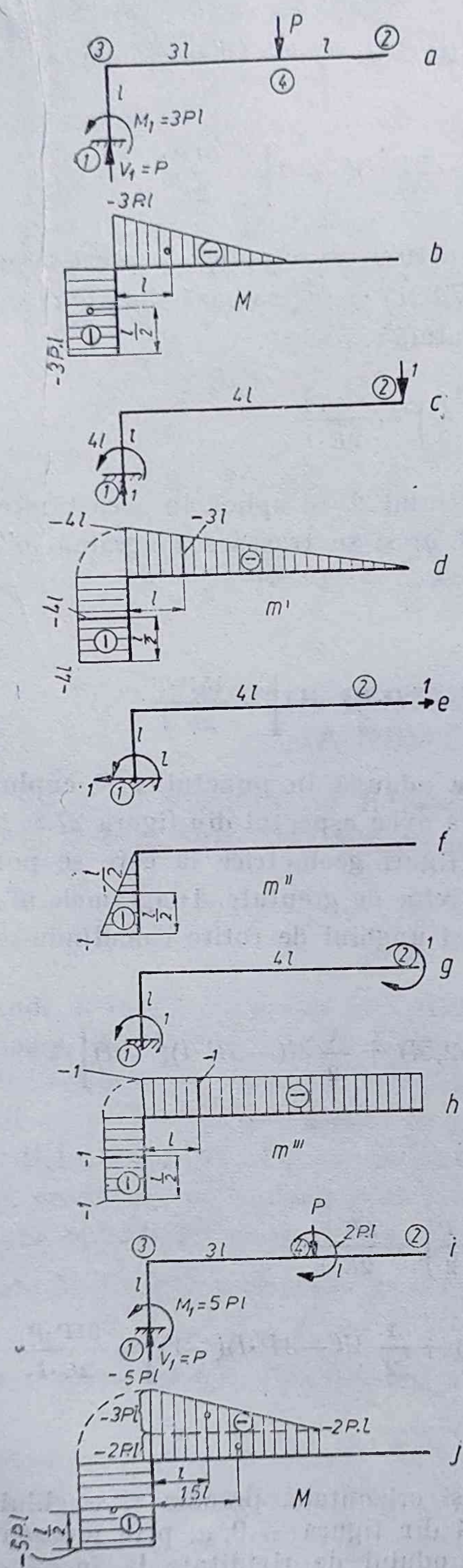


Fig. 27.8

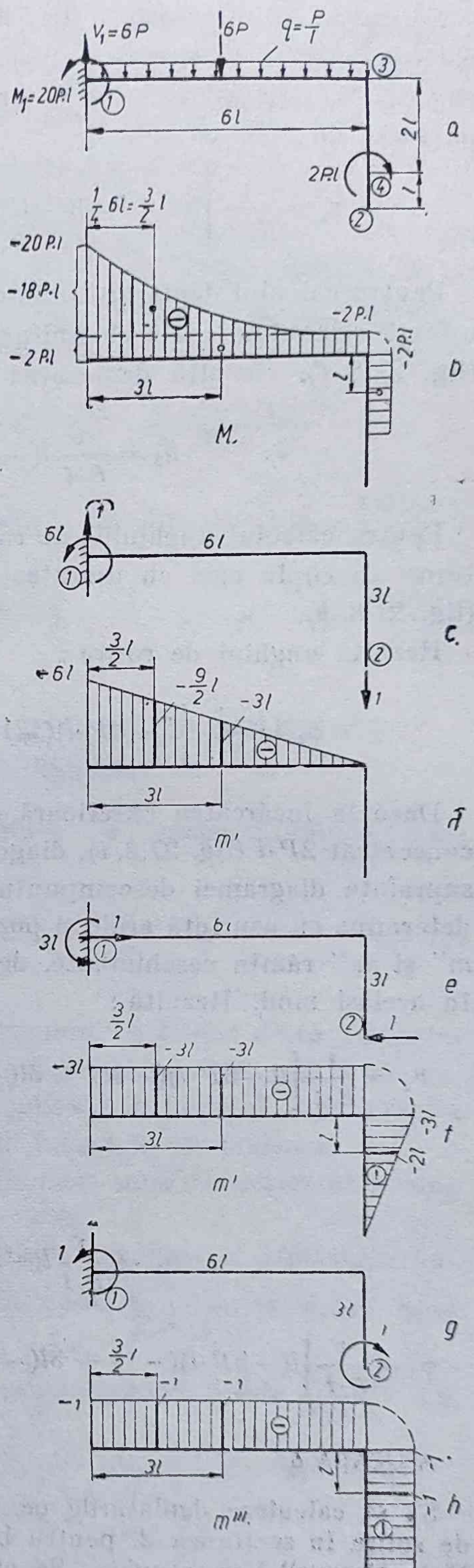


Fig. 27.9

Rezolvare

Se trasează diagrama M (fig. 27.8, b). Pentru calculul deplasării pe verticală în punctul 2 se aplică în acest punct o forță verticală egală cu 1, (fig. 27.8, c) și se trasează diagrama m' (fig. 27.8, d). Rezultă deplasarea pe verticală :

$$v_2 = \frac{1}{E \cdot I} \left[l(-3P \cdot l)(-4l) + \frac{1}{2} 3l(-3P \cdot l)(-3l) \right] = \frac{51P \cdot l^3}{2E \cdot I}.$$

Pentru calculul deplasării orizontale a punctului 2, se aplică în acest punct o forță orizontală egală cu unitatea (fig. 27.8, e) și se trasează diagrama m'' (fig. 27.8, f). Rezultă deplasarea pe orizontală:

$$h_2 = \frac{1}{E \cdot I} l(-3P \cdot l) \left(-\frac{l}{2} \right) = \frac{3P \cdot l^3}{2E \cdot I}.$$

Pentru calculul unghiului de rotire a secțiunii 2, se aplică în această secțiune un cuplu egal cu unitatea (fig. 27.8, g) și se trasează diagrama m''' (fig. 27.8, h).

Rezultă unghiul de rotire :

$$\varphi_2 = \frac{1}{E \cdot I} \left[l(-3P \cdot l)(-1) + \frac{1}{2} 3l(-3P \cdot l)(-1) \right] = \frac{15P \cdot l^2}{2E \cdot I}.$$

Dacă la încărcarea exterioară a barei se adaugă în punctul 4 și cuplul concentrat $2P \cdot l$ (fig. 27.8, i), diagrama M va avea aspectul din figura 27.8, j , suprafața diagramei descompunându-se în figuri geometrice la care se pot determina cu ușurință ariile și pozițiile centrelor de greutate. Diagramele m' , m'' și m''' rămân neschimbate, deplasările și unghiul de rotire calculându-se în același mod. Rezultă :

$$v_2 = \frac{1}{E \cdot I} \left[l(-5P \cdot l)(-4l) + 3l(-2P \cdot l)(-2,5l) + \frac{1}{2} 3l(-3P \cdot l)(-3l) \right] = \\ = \frac{97P \cdot l^3}{2E \cdot I},$$

$$h_2 = \frac{1}{E \cdot I} l(-5P \cdot l) \left(-\frac{l}{2} \right) = \frac{5P \cdot l^3}{2E \cdot I},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{E \cdot I} \left[l(-5P \cdot l)(-1) + 3l(-2P \cdot l)(-1) + \frac{1}{2} 3l(-3P \cdot l)(-1) \right] = \frac{31P \cdot l^2}{2E \cdot I}.$$

APLICAȚIA 6

Să se calculeze deplasările pe verticală și orizontală, precum și unghiul de rotire în secțiunea 2, pentru bara cotită din figura 27.9, a , prin metoda Mohr-Maxwell-Vereșceaghin. Se cunoaște modulul de rigiditate la încovoiere $E \cdot I$.

Rezolvare

Se trasează diagrama M (fig. 27.9, b). Pe intervalul $1-2$ diagrama se descompune într-o porțiune dreptunghiulară și o porțiune mărginită de paralela la linia zero și parabola $-20 P \cdot l + 6 P \cdot x - \frac{P}{l} \frac{x^2}{2}$ a cărei arie este $\frac{1}{3} 6l (-18 P \cdot a)$, iar abscisa centrului de greutate $\frac{1}{4} 6a = \frac{3}{2} a$.

Aplicînd în punctul 2 succesiv o forță verticală, una orizontală și un cuplu concentrat, egale cu unitatea (fig. 27.9, c, e, g), se construiesc, pentru fiecare caz de încărcare, diagramele m' , m'' și m''' (fig. 27.9, d, f, h). Se calculează deplasările pe verticală și orizontală și unghiul de rotire în secțiunea 2:

$$v_2 = \frac{1}{E \cdot I} \left[6l(-2P \cdot l)(-3l) + \frac{1}{3} 6l(-18P \cdot l) \left(-\frac{9}{2} l \right) \right] = \frac{198P \cdot l^3}{E \cdot I},$$

$$h_2 = \frac{1}{E \cdot I} \left\{ \left[6l(-2P \cdot l) + \frac{1}{3} 6l(-18P \cdot l) \right] (-3l) + 2l(-2P \cdot l)(-2l) \right\} = \frac{152P \cdot l^3}{E \cdot I},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{E \cdot I} \left[6l(-2P \cdot l)(-1) + \frac{1}{3} 6l(-18P \cdot l)(-1) + 2l(-2P \cdot l)(-1) \right] = \frac{52P \cdot l^2}{E \cdot I}.$$

27.11. CALCULUL DEFORMAȚIILOR SISTEMELOR SOLICITATE LA ÎNTINDERE-COMPRESIUNE

În cazul solicitării la întindere-compresiune, se calculează deformațiile prin metoda Mohr-Maxwell, cu relația:

$$\delta_j = \sum \int \frac{N \cdot n dx}{E \cdot A}, \quad (27.29)$$

unde N este forța axială în secțiunea x a sistemului solicitat de forțele exterioare, n este forța axială în secțiunea x a sistemului cu aceeași rezemare, dar solicitat de o singură forță egală cu 1 aplicată în punctul și pe direcția lui δ_j , iar $E \cdot A$ este modulul de rigiditate la întindere-compresiune.

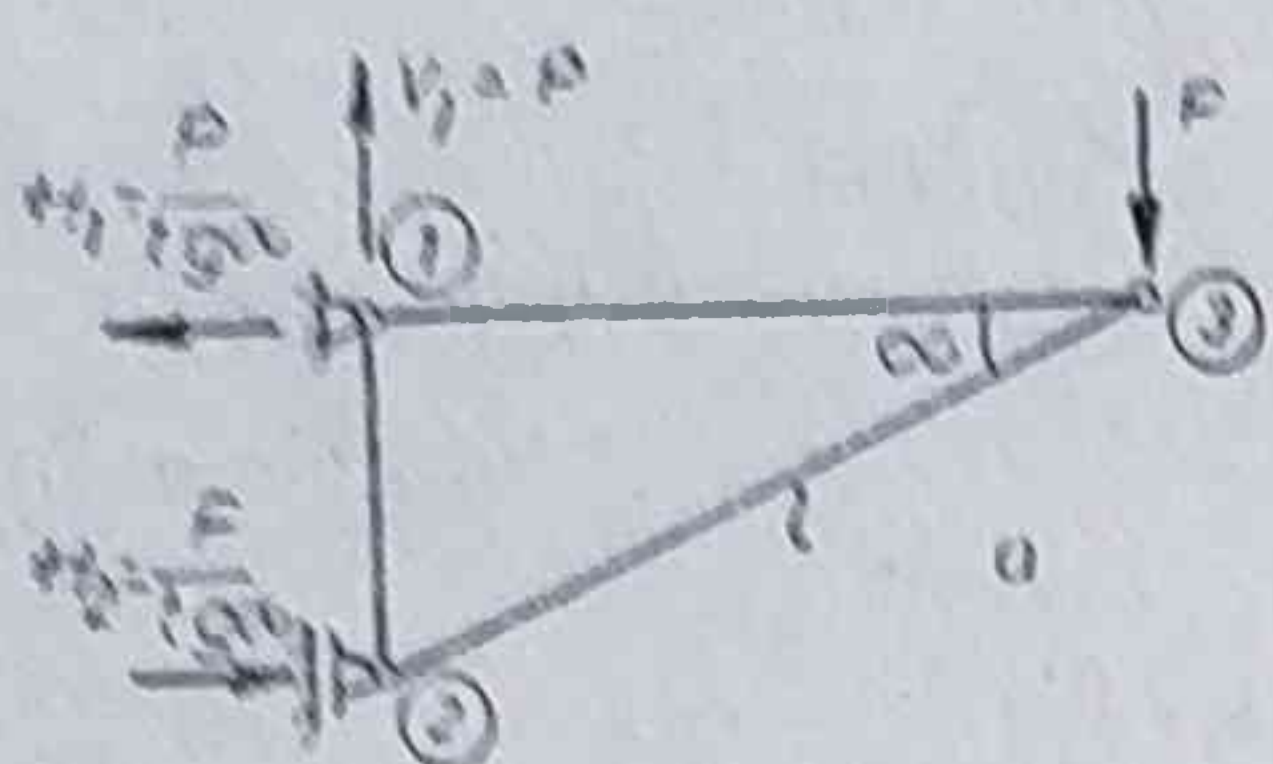
Relația (27.29) se poate deduce direct, pe baza unui raționament analog cu cel folosit la demonstrarea teoremei lui Betti.

Se aplică sistemului o forță egală cu unitatea, pe direcția deplasării căutate δ_j . Energia potențială de deformare (20.5) este $\int_l \frac{n^2 \cdot dx}{2E \cdot A}$. Se aplică apoi

forțele exterioare. Energia de deformare corespunzătoare este $\int_l \frac{N^2 \cdot dx}{2E \cdot A}$. La

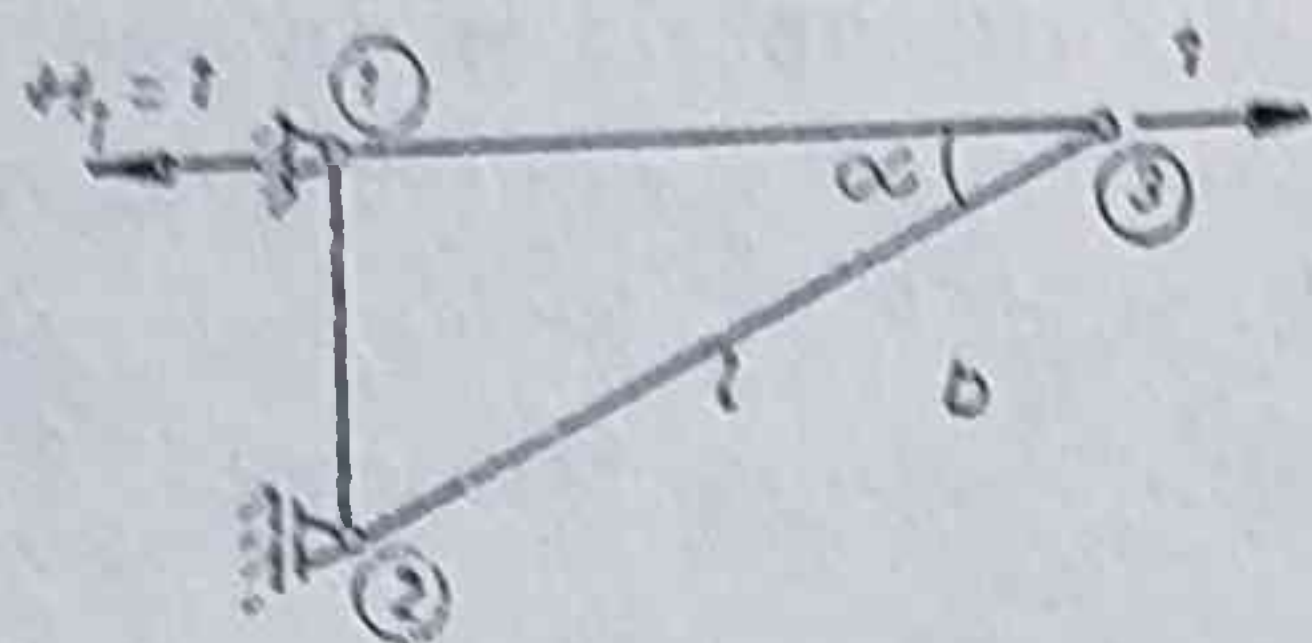
aceasta se adaugă lucrul mecanic efectuat de forța 1 pe deplasarea δ_j produsă de forțele exterioare. Energia finală totală

$$\int_l \frac{n^2 \cdot dx}{2E \cdot A} + \int_l \frac{N^2 \cdot dx}{2E \cdot A} + 1 \cdot \delta_j \quad (27.30)$$



este egală cu energia potențială acumulată în cazul aplicării simultane a forței unitate și a sarcinilor exterioare

$$\int_l \frac{(N + n)^2 dx}{2E \cdot A} \quad (27.31)$$



Egalind expresiile (27.30) și (27.31), rezultă :

$$\delta_j = \int_l \frac{N \cdot n \cdot dx}{E \cdot A} \quad (27.32)$$

Fig. 27.10

APLICAȚIA 7

Să se calculeze proiecțiile pe verticală și orizontală ale deplasării punctului 3 al sistemului de bare articulate din figura 27.10, a la care $E \cdot A = \text{const.}$

Rezolvare

Se calculează întâi reacțiunile, apoi, utilizând metoda izolării nodurilor, se determină eforturile în bară. Ținând seama de convenția de semne din rezistența materialelor,

$$N_{32} = -\frac{P}{\sin \alpha}; \quad N_{31} = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha}; \quad N_{21} = P.$$

Pentru calculul deplasării verticale v_3 , se înlocuiește $P = 1$ și se obține :

$$n_{32} = -\frac{1}{\sin \alpha}; \quad n_{31} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}; \quad n_{21} = 1.$$

Relația (27.29) devine :

$$\begin{aligned} E \cdot A \cdot v_3 &= \sum \int N \cdot n dx = N_{13} \cdot n_{13} \cdot l_{13} + N_{32} \cdot n_{32} \cdot l_{32} + N_{21} \cdot n_{21} \cdot l_{21} = \\ &= \frac{P}{\operatorname{tg}^2 \alpha} l \cos \alpha + \frac{P}{\sin^2 \alpha} l + P \cdot l \sin \alpha = \\ &= P \cdot l \left(\frac{\cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \sin \alpha \right) = \frac{P \cdot l}{\sin^2 \alpha} (\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha + 1) \end{aligned}$$

deci :

$$v_3 = \frac{P \cdot l}{E \cdot A} \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha + 1}{\sin^3 \alpha}.$$

Pentru calculul deplasării orizontale h_3 , se aplică o forță orizontală egală cu unitatea în punctul 3 (fig. 27.10, b) și se calculează eforturile în bare :

$$n_{32} = n_{21} = 0; \quad n_{13} = -1.$$

Rezultă :

$$h_3 = \frac{N_{13} \cdot n_{13} \cdot l \cos \alpha}{E \cdot A} = \frac{1}{E \cdot A} \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot l \cos \alpha = \frac{P \cdot l}{E \cdot A} \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha}.$$

28.

SISTEME STATIC NEDETERMINATE

28.1. GENERALITĂȚI

Sistemele static nedeterminate (denumite și sisteme hiperstatice) studiate în rezistența materialelor sînt sisteme elastice la care nu se pot determina toate eforturile cu ajutorul ecuațiilor de echilibru ale staticii.

Atunci cînd numărul reacțiunilor necunoscute, datorite legăturilor, este mai mare decît numărul ecuațiilor de echilibru static, sistemul este static nedeterminat *exterior*. Gradul de nedeterminare este egal cu diferența între numărul de necunoscute și numărul ecuațiilor de echilibru.

Atunci cînd sistemul de bare conține contururi închise, nu se pot determina eforturile interioare, sistemul fiind static nedeterminat *interior*. Un contur plan închis, solicitat de forțe coplanare, este triplu static nedeterminat.

În continuare se vor considera numai sisteme de bare plane, solicitate de forțe coplanare, la care gradul de nedeterminare n este dat de relația :

$$n = r + 3c - e,$$

unde r este numărul reacțiunilor exterioare, c — numărul contururilor închise, iar $e = 3$ este numărul ecuațiilor de echilibru din statică.

28.2. METODA EFORTURILOR

Se consideră un sistem static nedeterminat (s.s.n.) exterior.

Înlocuind legăturile cu reacțiuni, în afara forțelor exterioare, asupra sistemului vor acționa m reacțiuni, pentru calculul cărora se dispune de trei ecuații de echilibru. Pentru rezolvarea problemei, trebuie scrise încă $(m - 3)$ ecuații, reprezentînd condiții de deformare.

Se utilizează *metoda eforturilor*. Sistemul static nedeterminat (s.s.n.) se transformă într-un sistem static determinat (s.s.d.) echivalent, prin suprimarea unui număr corespunzător de legături, care se înlocuiesc cu $(m - 3)$ forțe (sau momente) exterioare numite *necunoscute static nedeterminate* (reacțiuni hiperstatice) care se vor nota distinct cu X_j ($j = 1, \dots, m - 3$).

Se scriu condițiile de echivalență între cele două sisteme, reprezentînd condiții de deformare pe direcțiile necunoscutelor static nedeterminate. Se rezolvă sistemul format din ecuațiile de echilibru și condițiile de deformare, determinînd reacțiunile și toate forțele exterioare ce acționează asupra sistemului static determinat echivalent. Astfel, problema se reduce la studiul sistemului static determinat echivalent.

De menționat că la sisteme static nedeterminate compuse din bare diferite, în general, se face un calcul de *verificare* a eforturilor unitare din bare, deoarece la scrierea condițiilor de deformare trebuie cunoscute modulele de rigiditate ale barelor componente. La sisteme formate din o singură bară sau din bare cu același modul de rigiditate, se poate face și un calcul de dimensionare.

28.3. TEOREMA LUI MENABREA

Condițiile de echivalență, între sistemul static nedeterminat dat și sistemul static determinat echivalent, se pot scrie utilizând a doua teoremă a lui Castigliano (27.19).

La sisteme static nedeterminate exterior, cu reazeme fixe, deplasările pe direcția necunoscutelor static nedeterminate sînt nule, deci condițiile de deformație se scriu sub forma :

$$\delta_j = \frac{\partial W}{\partial X_j} = 0. \quad (28.1)$$

Relația (28.1) exprimă analitic *teorema lui Menabrea* : valorile reacțiunilor hiperstatice corespund valorii minime a energiei potențiale de deformație.

Într-adevăr, relația (28.1) indică o condiție de extrem a energiei de deformație. Se demonstrează că acesta este un minimum dacă echilibrul este stabil. În acest sens, teorema lui Menabrea corespunde *principiului lucrului mecanic minim*.

În cazul barelor solicitate la încovoiere, relația (28.1) devine :

$$\int_l \frac{M}{E \cdot I} \frac{\partial M}{\partial X_j} dx = 0, \quad (28.2)$$

iar în cazul barelor cotite și al cadrelor, aceasta se extinde pe toate barele componente :

$$\sum \int_l \frac{M}{E \cdot I} \frac{\partial M}{\partial X_j} dx = 0.$$

Teorema lui Menabrea se aplică și sistemelor static nedeterminate interioare : valorile eforturilor static nedeterminate, care apar în barele unui sistem în echilibru stabil, fac minimă energia potențială de deformație.

APLICAȚIA 1

Se cere să se construiască diagrama momentelor încovoietoare la bara din figura 28.1, a.

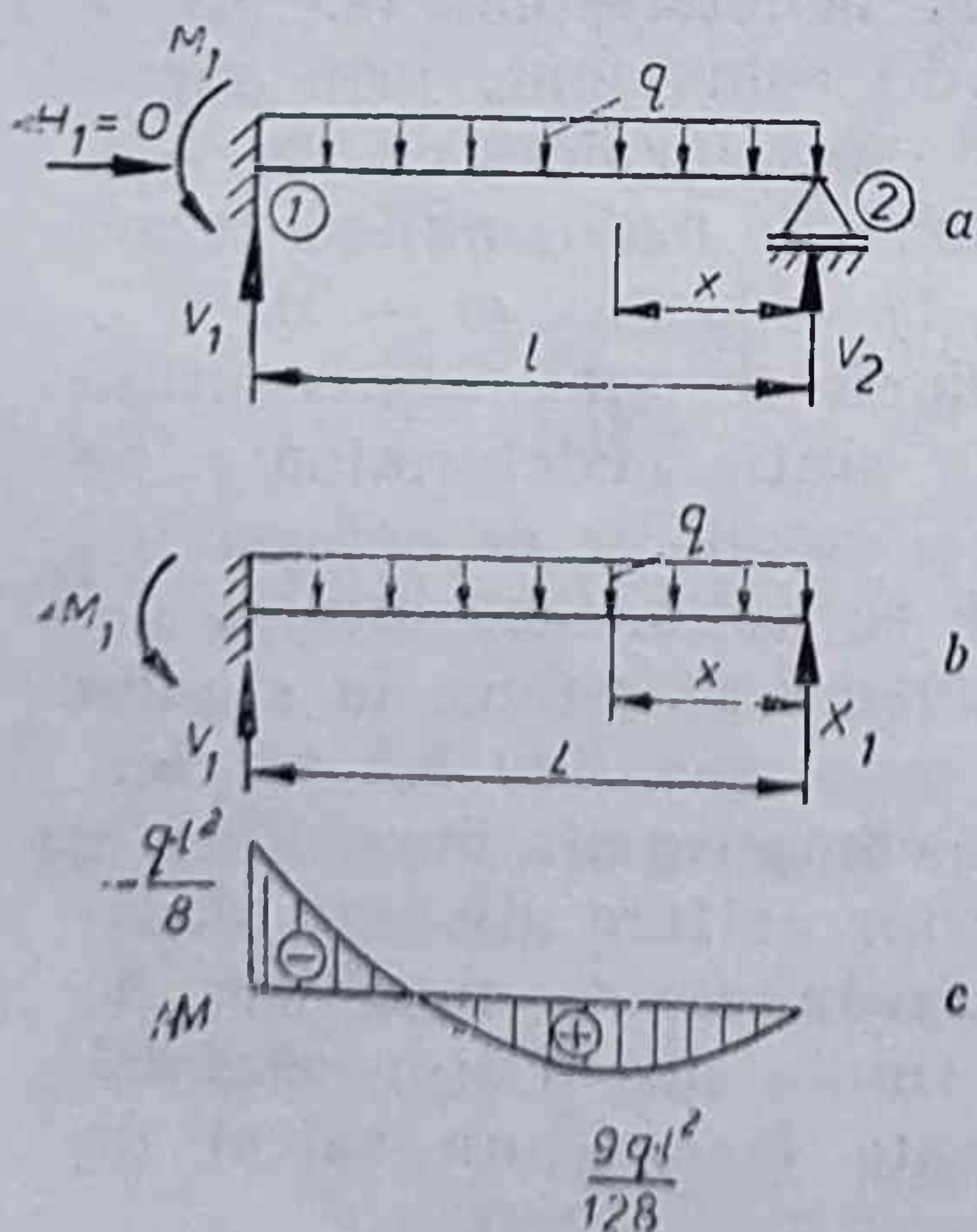


Fig. 28.1

Rezolvare

Înlocuind legăturile cu reacțiuni (fig. 28.1, a), se pun în evidență patru reacțiuni, pentru calculul cărora se dispune de numai trei ecuații de echilibru. Sistemul este simplu static nedeterminat. Se alege V_2 drept necunoscută static nedeterminată și se notează X_1 . Se desființează reazemul simplu din punctul 2 și se construiește sistemul static determinat echivalent (fig. 28.1, b). Forța exterioară X_1 acționează în capătul liber din punctul 2.

Condiția de echivalență între s.s.n. (fig. 28.1, a) și s.s.d. (fig. 28.1, b) este :

$$v_2 = 0,$$

deci, deși sistemul static determinat din figura 28.1, *b* are capăt liber în 2, se caută acea valoare a forței X_1 care, acționînd asupra barei împreună cu sarcina distribuită q , face ca săgeata în punctul 2 să fie nulă (ca și cum ar exista un reazem simplu).

Conform relației (28.2), pentru bara de secțiune constantă, condiția de deformare se mai scrie :

$$\int_0^l M \frac{\partial M}{\partial X_1} dx = 0.$$

În secțiunea x , momentul încovoietor este :

$$M(x) = X_1 \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2},$$

iar derivata în raport cu forța X_1 este :

$$\frac{\partial M}{\partial X_1} = x.$$

Condiția de deformare devine :

$$\int_0^l \left(X_1 \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \right) x \cdot dx = 0,$$

de unde rezultă :

$$X_1 = \frac{3q \cdot l}{8}.$$

Din ecuațiile de echilibru se calculează apoi

$$V_1 = \frac{5q \cdot l}{8}; \quad M_1 = \frac{q \cdot l^2}{8},$$

astfel că se poate construi diagrama momentelor încovoietoare (fig. 28.1, *c*), pe baza căreia se face dimensionarea barei.

28.4. ECUAȚIILE CANONICE ALE METODEI EFORTURILOR

Se consideră sistemul static nedeterminat din figura 28.2, *a*, la care se pune problema determinării reacțiilor. Sistemul este dublu static nedeterminat. Se construiește sistemul static determinat echivalent (fig. 28.2, *b*) unde necunoscutele static nedeterminate s-au notat cu X_1 , respectiv X_2 .

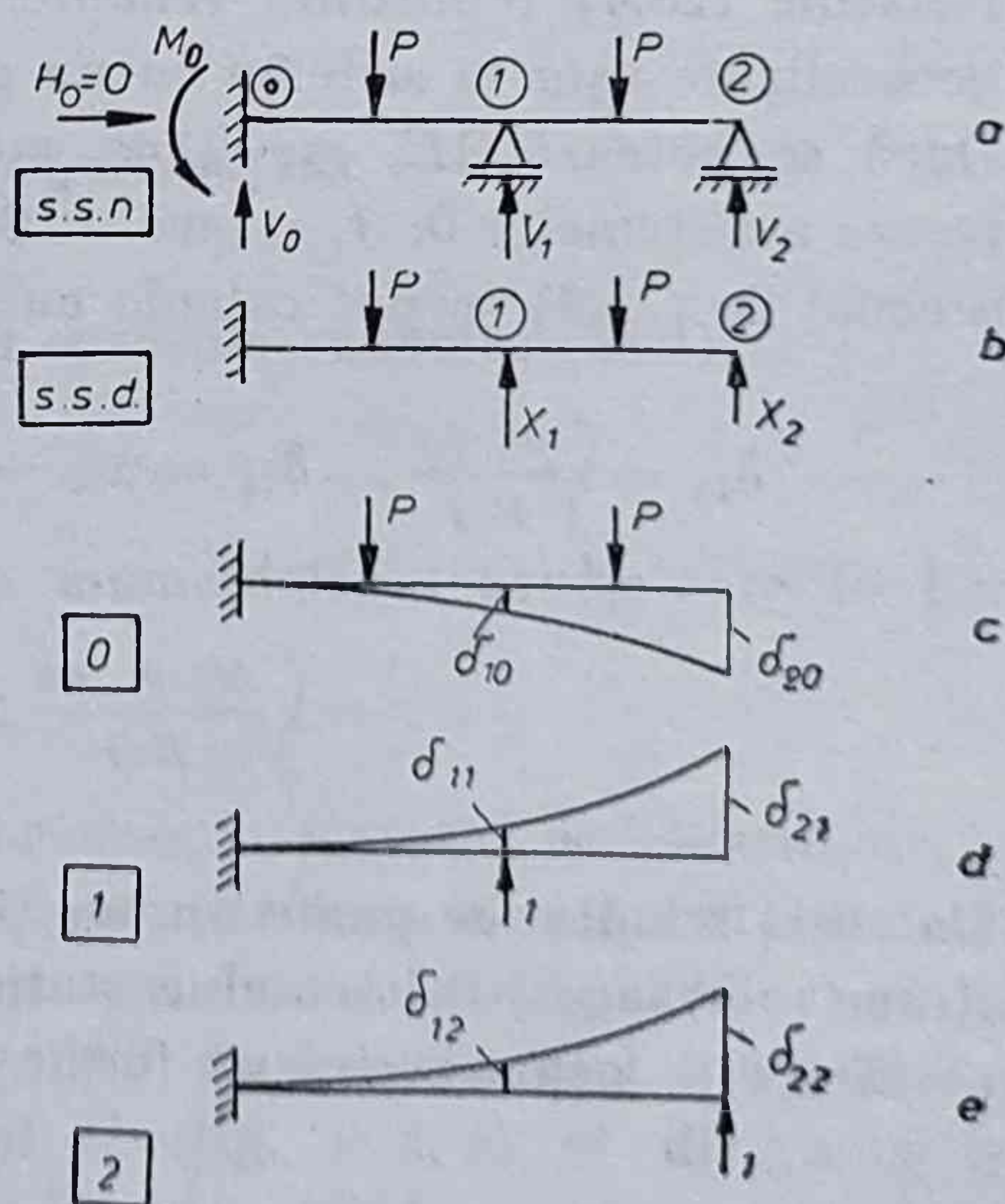


Fig. 28.2

Se formează apoi încă trei sisteme, avînd aceeași rezemare ca sistemul static determinat, însă solicitate diferit :

a) sistemul 0 (numit și sistem de bază), solicitat numai de forțele exterioare aplicate inițial asupra s.s.n. (fig. 28.2, c) ;

b) sistemul 1, solicitat de o forță egală cu 1, aplicată în punctul și pe direcția lui X_1 (fig. 28.2, d) ;

c) sistemul 2, solicitat de o forță egală cu 1, aplicată în punctul și pe direcția lui X_2 (fig. 28.2, e).

Condițiile de echivalență între s.s.n. (fig. 28.2, a) și s.s.d. (fig. 28.2, b) se scriu :

$$v_1 = 0 ; v_2 = 0, \quad (28.3)$$

deci s.s.d. trebuie să aibă săgeți nule în punctele 1 și 2, care în s.s.n. corespund secțiunilor din dreptul reazemelor.

Utilizînd conceptul de coeficient de influență (v. § 27.3), în figurile 28.2, c — 28.2, e s-au notat deplasările în secțiunile 1 și 2. Astfel, δ_{21} reprezintă deplasarea în punctul 2 produsă de o forță egală cu unitatea aplicată în secțiunea 1. Generalizînd, δ_{21} reprezintă deplasarea în sistemul 1, măsurată în punctul și pe direcția lui X_2 . Astfel, δ_{10} este deplasarea în sistemul 0, în punctul de aplicație și pe direcția de acțiune a lui X_1 etc.

Aplicînd principiul suprapunerii efectelor, relațiile (28.3) se scriu :

$$\begin{aligned} \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} &= 0, \\ \delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} &= 0, \end{aligned} \quad (28.4)$$

de unde rezultă necunoscutele static nedeterminate X_1 și X_2 .

Relațiile (28.4) reprezintă *ecuațiile canonice ale metodei eforturilor* și pot fi generalizate ușor la sisteme cu un grad mai mare de nedeterminare.

Dacă se notează M^0 , m_1 și m_2 momentele încovoietoare într-o secțiune oarecare a sistemelor 0, 1, respectiv 2 (neapărat aceeași secțiune), coeficienții din ecuațiile (28.4) se pot calcula cu metoda Mohr-Maxwell astfel :

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_l \frac{m_1^2 \cdot dx}{E \cdot I} ; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \int_l \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot dx}{E \cdot I} ; \quad \delta_{22} = \int_l \frac{m_2^2 \cdot dx}{E \cdot I}, \\ \delta_{10} &= \int_l \frac{M^0 \cdot m_1 \cdot dx}{E \cdot I} ; \quad \delta_{20} = \int_l \frac{M^0 \cdot m_2 \cdot dx}{E \cdot I}. \end{aligned} \quad (28.5)$$

La acest rezultat se poate ajunge și pe baza teoremei lui Menabrea. Într-o secțiune oarecare a sistemului static determinat (fig. 28.2, b), momentul încovoietor se poate scrie sub forma :

$$M(x) = m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2 + M^0, \quad (28.6)$$

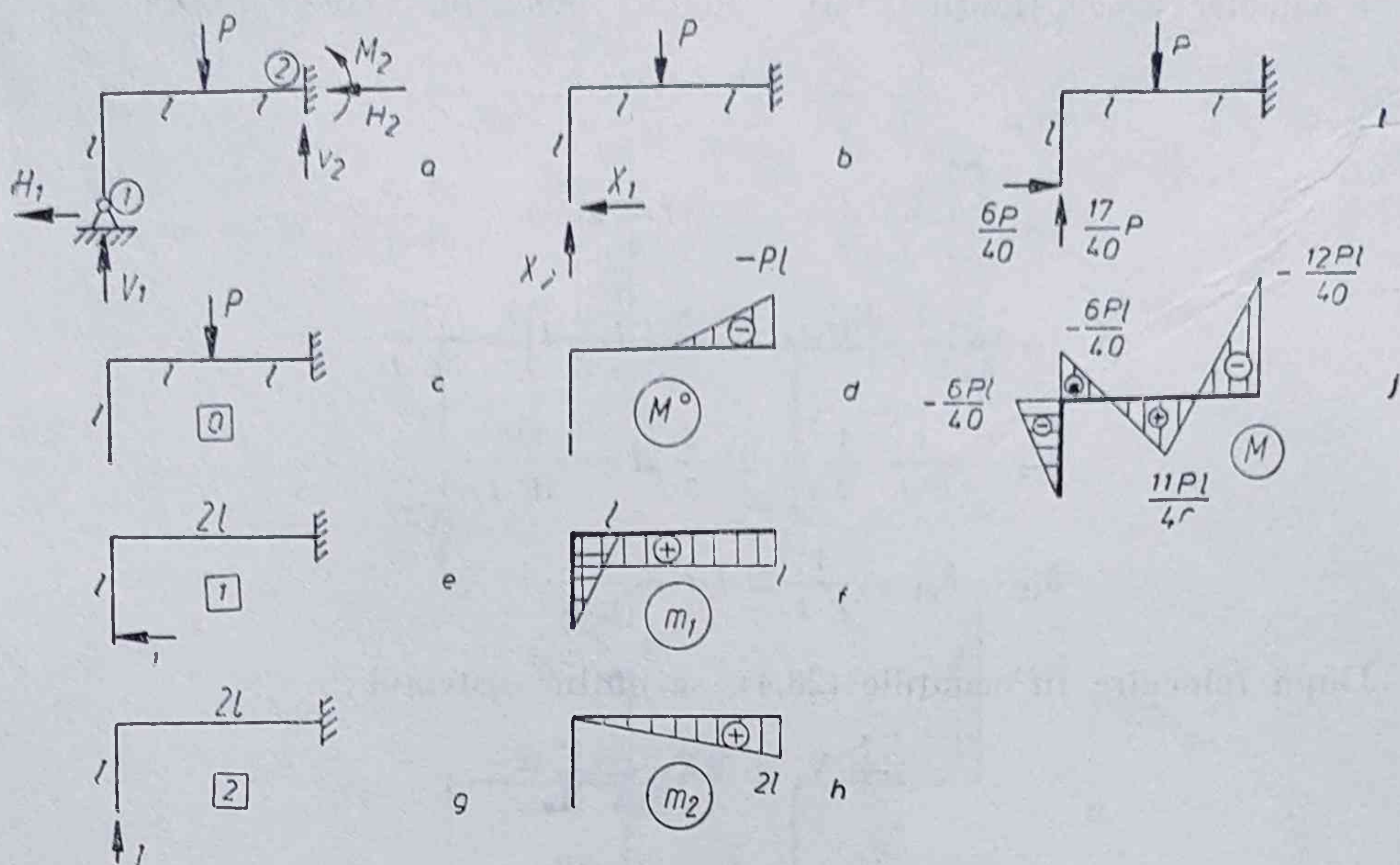


Fig. 28.3

Conform teoremei lui Menabrea, în cazul particular al încovoierii

$$\int \frac{M}{E \cdot I} \frac{\partial M}{\partial X_1} dx = 0 \quad \text{și} \quad \int \frac{M}{E \cdot I} \frac{\partial M}{\partial X_2} dx = 0. \quad (28.7)$$

Calculînd $\frac{\partial M}{\partial X_1} = m_1$, $\frac{\partial M}{\partial X_2} = m_2$ și făcînd înlocuirile în relațiile (28.7) se obține :

$$\int \frac{1}{E \cdot I} (M^\circ + m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2) m_1 \cdot dx = 0, \quad (23.8)$$

$$\int \frac{1}{E \cdot I} (M^\circ + m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2) m_2 \cdot dx = 0,$$

care cu notațiile (28.5) se transformă în ecuațiile canonice (28.4).

APLICAȚIA 2

Se cere să se construiască diagrama momentelor încovoietoare la bara cotită din figura 28.3, a.

Rezolvare

Se aleg reacțiunile H_1 și V_1 drept necunoscute static nedeterminate, se transformă articulația 1 în capăt liber și se construiește sistemul static determinat echivalent (fig. 28.3, b). Se construiește sistemul 0 (fig. 28.3, c) și diagrama de momente încovoietoare M° (fig. 28.3, d), apoi sistemul 1 (fig. 28.3, e) și diagrama m_1 (fig. 28.3, f), și sistemul 2 (fig. 28.3, g) și diagrama m_2 (fig. 28.3, h).

Se calculează coeficienții (28.5), utilizând regula lui Vereșceaghin :

$$\delta_{10} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{2} (-P \cdot l) l \cdot l = -\frac{P \cdot l^3}{2E \cdot I},$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{2} (-P \cdot l) l \frac{5}{6} 2l = -\frac{5P \cdot l^3}{6E \cdot I},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot I} \left(2l \cdot l \cdot l + \frac{1}{2} l \cdot l \frac{2}{3} l \right) = \frac{7l^3}{3E \cdot I},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{2} 2l \cdot 2l \frac{2}{3} 2l = \frac{8l^3}{3E \cdot I},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{E \cdot I} 2l \cdot l \cdot l = \frac{2l^3}{E \cdot I}.$$

După înlocuire în ecuațiile (28.4), se obține sistemul :

$$\frac{7}{3} X_1 + 2X_2 = \frac{P}{2},$$

$$2X_1 + \frac{8}{3} X_2 = \frac{5P}{6},$$

cu soluțiile :

$$X_1 = -\frac{6P}{40} \quad \text{și} \quad X_2 = \frac{17P}{40}.$$

Semnul minus arată că forța X_1 are sens contrar sensului indicat în figura 28.3, *b*. Rezultă că sistemul static determinat echivalent are configurația din figura 28.3, *i* iar diagrama de momente este cea dată în figura 28.3, *j*.

APLICAȚIA 3

Să se construiască diagramele de eforturi N , T , M la bara cotită din figura 28.4, *a*.

Rezolvare

Sistemul este simplu static nedeterminat. Se alege reacțiunea H_1 drept necunoscută static nedeterminată, se transformă articulația 1 în reazem simplu și se construiește sistemul static determinat echivalent (fig. 28.4, *b*). Sistemul 0 (fig. 28.4, *c*) are diagrama de momente M^0 (fig. 28.4, *d*), iar sistemul 1 (fig. 28.4, *e*), diagrama de momente m_1 (fig. 28.4, *f*).

Se calculează coeficienții de influență (28.5) cu regula lui Vereșceaghin :

$$\delta_{10} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{2} 3l(-8q \cdot l^2)(-l) = \frac{12q \cdot l^4}{E \cdot I},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot I} \left[\frac{1}{2} 3l(-3l)(-2l) + \frac{1}{2} 3l(-3l)(-2l) \right] = \frac{18l^3}{E \cdot I}.$$

Înlocuind în (28.4), rezultă :

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{12q \cdot l^4}{18l^3} = -\frac{2}{3} q \cdot l.$$

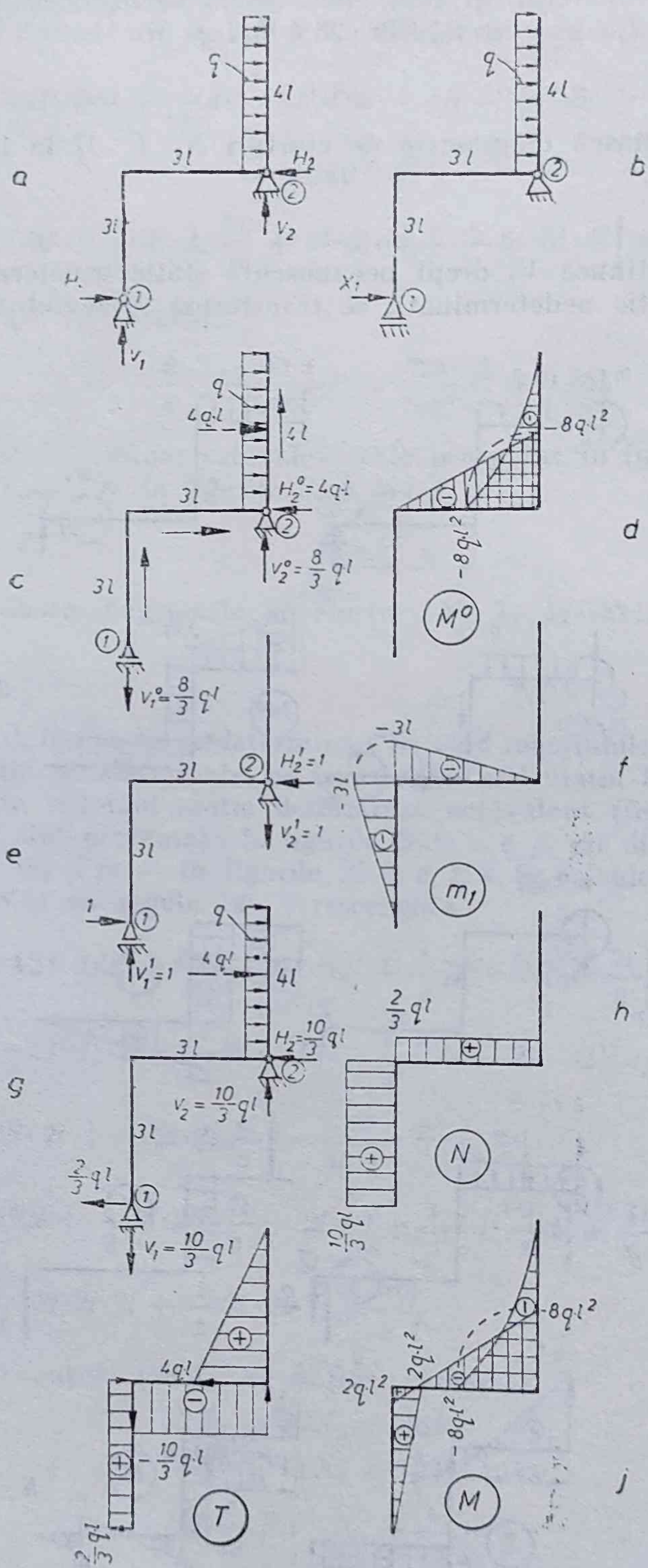


Fig. 28.4

Semnul minus arată că sensul lui X_1 este invers decât cel presupus inițial în figura 28.4, b.

Sistemul static determinat echivalent este prezentat în figura 28.4, g, iar diagramele N , T , M — în figurile 28.4, h, i, j.

APLICAȚIA 4

Să se construiască diagramele de eforturi N , T , M la bara cotită din figura 28.5, a.

Rezolvare

Se alege reacțiunea V_2 drept necunoscută static nedeterminată (sistemul este simplu static nedeterminat), se transformă reazemul 2 în capăt liber

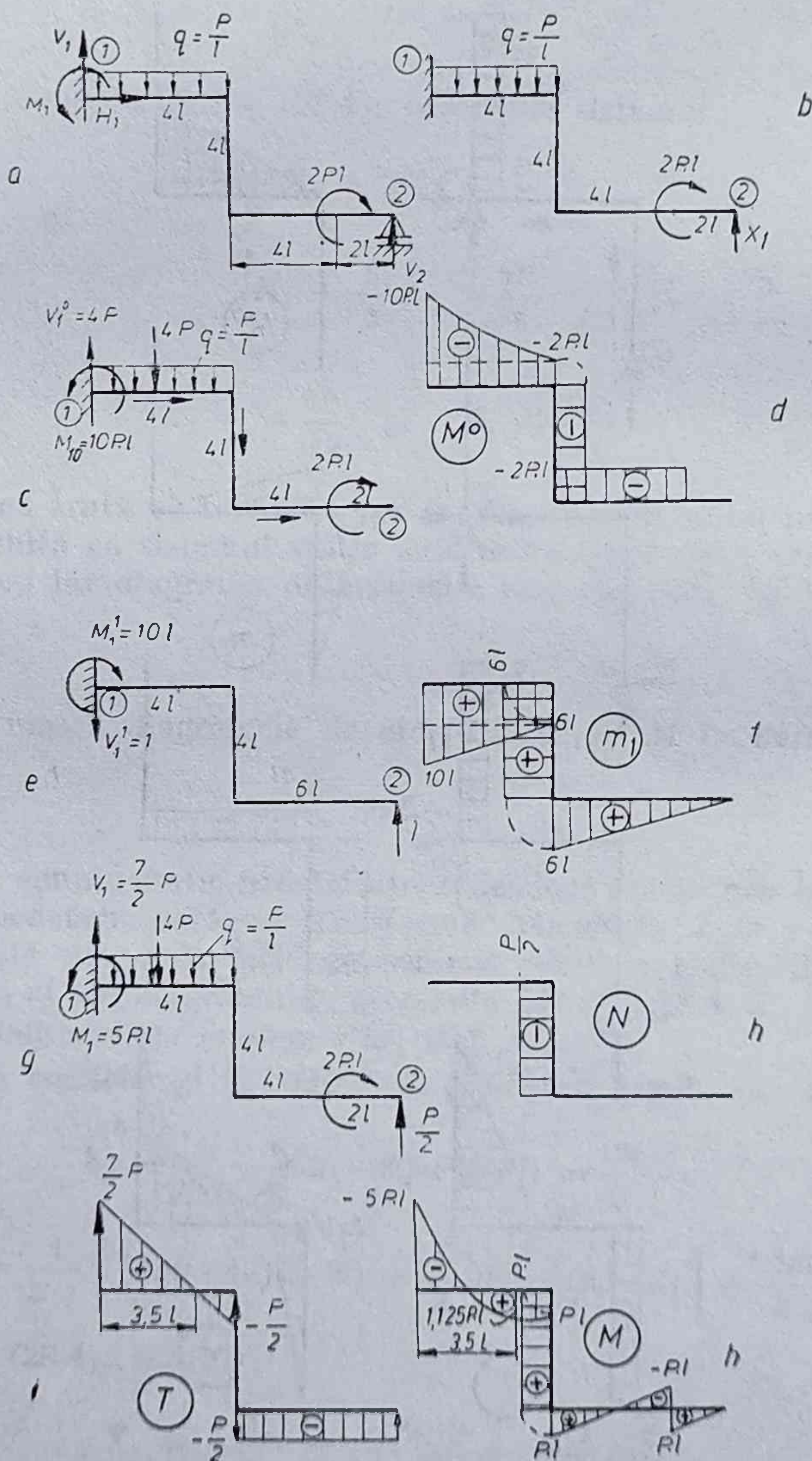


Fig. 28.5

și se construiește sistemul static determinat echivalent (fig. 28.5, b). Sistemul 0 (fig. 28.5, c) are diagrama de momente M^0 (fig. 28.5, d), iar sistemul 1 (fig. 28.5, e) diagrama de momente m_1 (fig. 28.5, f).

Se calculează coeficienții de influență (28.5) cu regula lui Vereșceaghin:

$$\delta_{10} = \frac{1}{E \cdot I} \left[4l(-2P \cdot l)8l + \frac{1}{3} 4l(-8P \cdot l)9l + 4l(-2P \cdot l)6l + 4l(-2P \cdot l)4l \right] = -240P \cdot l^3,$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot I} \left[4l \cdot 6l \cdot 8l + \frac{1}{2} 4l \cdot 4l \frac{26l}{3} + 4l \cdot 6l \cdot 6l + \frac{1}{2} 6l \cdot 6l \cdot 4l \right] = \frac{1432l^3}{3E \cdot I}.$$

Înlocuind în (28.4), rezultă:

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{240 \cdot 3}{1432} P = \frac{720}{1432} P \approx 0,5P.$$

Sistemul static determinat echivalent este prezentat în figura 28.5, g, iar diagramele N , T , M — în figurile 28.5, h, i, j.

APLICAȚIA 5

Să se construiască diagramele de eforturi N , T , M la bara cotită din figura 28.6, a.

Rezolvare

Sistemul este dublu static nedeterminat. Se aleg reacțiunile H_2 și V_2 drept necunoscute static nedeterminate, se transformă articulația 2 în capăt liber și se construiește sistemul static determinat echivalent (fig. 28.6, b). Sistemele 0, 1 și 2 sînt prezentate în figurile 28.6, c, e, g, iar diagramele corespunzătoare M_0 , m_1 și m_2 — în figurile 28.6, d, f, h. Se calculează coeficienții de influență (28.5) cu regula lui Vereșceaghin:

$$\delta_{10} = \frac{1}{E \cdot I} \left[2l(-2P \cdot l)2l + \frac{1}{2} l(-2P \cdot l)2l + \frac{1}{3} 2l(-2P \cdot l) \frac{3l}{2} \right] = -\frac{12P \cdot l^3}{E \cdot I},$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{E \cdot I} \left[2l(-2P \cdot l) \cdot 2l + \frac{1}{2} l(-2P \cdot l) \cdot \frac{8}{3} l + \frac{1}{3} 2l(-2P \cdot l) \cdot l \right] = -\frac{12P \cdot l^3}{E \cdot I},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot I} \left[2l \cdot 2l \cdot 2l + \frac{1}{2} 2l \cdot 2l \frac{4l}{3} \right] = \frac{32l^3}{3E \cdot I},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{E \cdot I} \left[2l \cdot l \cdot 2l + \frac{1}{2} 2l \cdot 2l \cdot \frac{7l}{3} + 2l \cdot l \cdot l + \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right] = \frac{11l^3}{E \cdot I},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{E \cdot I} \left[2l \cdot 2l \cdot 2l + \frac{1}{2} 2l \cdot 2l \cdot l \right] = \frac{10l^3}{E \cdot I}.$$

Înlocuind în ecuațiile (28.4), se obține sistemul:

$$32X_1 + 30X_2 = 36P,$$

$$10X_1 + 11X_2 = 12P,$$

de unde
$$X_1 = \frac{9}{13} P; \quad X_2 = \frac{6}{13} P.$$

Sistemul static determinat echivalent este prezentat în figura 28.6, i, iar diagramele N , T , M în figurile 28.6, j, k, l.

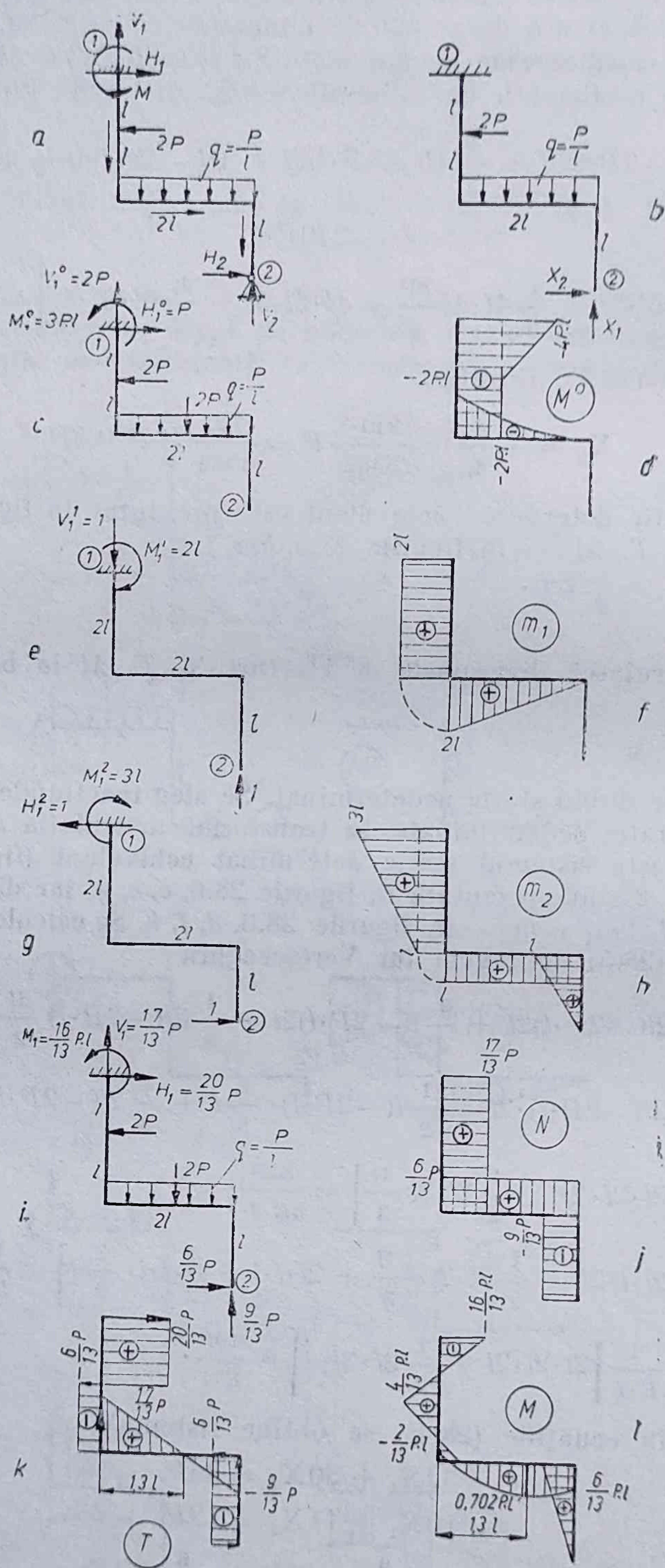


Fig. 28.6

APLICAȚIA 6

Se cere să se construiască diagrama momentelor încovoietoare la cadrul închis din figura 28.7, *a*, avînd toate barele cu același modul de rigiditate.

Rezolvare

Se secționează cadrul prin planul orizontal de simetrie 12 și se pune problema determinării eforturilor în secțiunile 1 și 2 (fig. 28.7, *b*). Teoretic, jumătatea cadrului este triplu static nedeterminată, în fiecare secțiune acționînd trei eforturi. Datorită simetriei, forțele tăietoare sînt nule, forțele axiale se determină din ecuațiile de echilibru $N = \frac{P}{2}$, iar momentele încovoietoare

sînt egale între ele. Se alege valoarea lor comună X_1 ca necunoscută static nedeterminată.

Condiția de echivalență între s.s.n. din figura 28.7, *a* și s.s.d. din figura 28.7, *b* impune ca în punctele 1 și 2 panta fibrei medii deformate să fie nulă. Sistemul fiind simplu static nedeterminat, această condiție se scrie :

$$\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0.$$

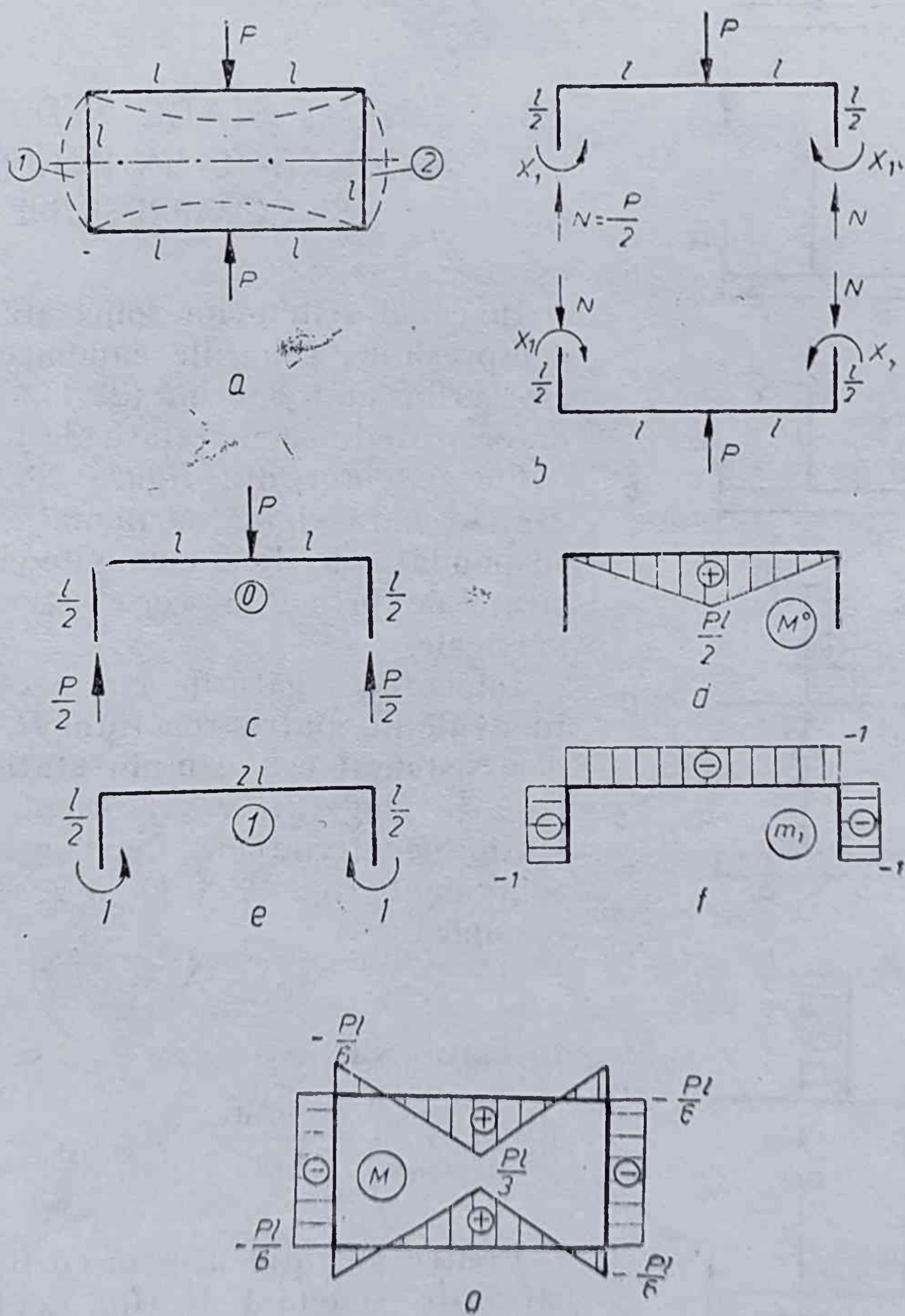


Fig. 28.7

Se construiește sistemul 0 (fig. 28.7, c) și diagrama M^0 (fig. 28.7, d), apoi sistemul 1 (fig. 28.7, e) și diagrama m_1 (fig. 28.7, f).

Se calculează :

$$E \cdot I \cdot \delta_{10} = \frac{1}{2} 2l \frac{P \cdot l}{2} (-1) = -\frac{P \cdot l^2}{2},$$

$$E \cdot I \cdot \delta_{11} = \frac{l}{2} (-1)(-1) + 2l(-1)(-1) + \frac{l}{2} (-1)(-1) = 3l,$$

deci rezultă :

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{P \cdot l}{6}.$$

În punctul de aplicație a forței, momentul încovoietor este $-X_1 + \frac{P \cdot l}{2} = -\frac{P \cdot l}{6} + \frac{P \cdot l}{2} = \frac{P \cdot l}{3}$. Diagrama M (fig. 28.7, g) este simetrică.

28.5. SISTEME STATIC NEDETERMINATE SOLICITATE LA ÎNTINDERE ȘI COMPRESIUNE

În cazul sistemelor solicate la întindere-compresiune, ecuațiile canonice ale metodei eforturilor au tot forma (28.4), coeficienții δ_{ij} determinându-se cu relații de forma (27.32).

Fie sistemul din figura 28.8, a, format dintr-o bară rigidă, articulată la un capăt, suspendată de două elemente elastice și sollicitată de forța P . Se cer eforturile din barele verticale.

Înlocuind legăturile cu reacțiuni, se pun în evidență patru reacțiuni H , V , R_1 și R_2 , deci sistemul este simplu static nedeterminat. Se alege $R_1 = X_1$ drept necunoscută static nedeterminată. Se construiește s.s.d. echivalent (fig. 28.8, b) și se scrie ecuația canonică :

$$\delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0,$$

în care :

$$\delta_{10} = \sum \int \frac{N^0 \cdot n_1 \cdot dx}{E \cdot A} \quad \text{și} \quad \delta_{11} = \sum \int \frac{n_1^2 \cdot dx}{E \cdot A}.$$

Pentru calculul acestor coeficienți se construiește sistemul 0 (fig. 28.8, c) și diagrama N^0 (fig. 28.8, d), apoi sistemul 1 (fig. 28.8, e) și diagrama n_1 (fig. 28.8, f).

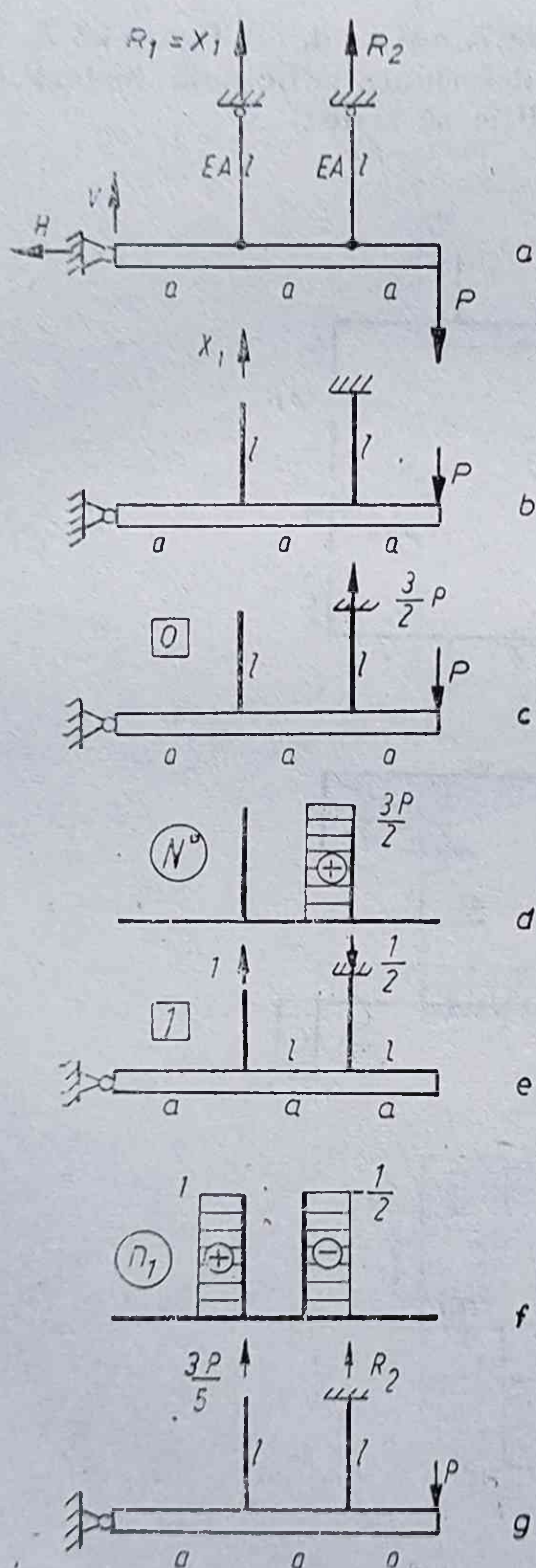


Fig. 28.8

Utilizând regula lui Vereșceaghin, rezultă :

$$\delta_{10} = \frac{1}{E \cdot A} \cdot \frac{3P}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) l = -\frac{3P \cdot l}{4E \cdot A},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot A} \left[1 \cdot l \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2} \right) l \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = \frac{5l}{4E \cdot A},$$

deci :

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{3P}{5}.$$

În sistemul static determinat echivalent (fig. 28.8, g) se poate calcula reacțiunea $R_2'' = \frac{6P}{5}$.

29.

FLAMBAJUL BARELOR DREPTE

29.1. INSTABILITATEA ELASTICĂ

În mecanică, un corp este în *echilibru stabil* dacă, deplasat din poziția de echilibru, tinde să revină singur în poziția inițială. Este cazul unei bile într-o concavitate (fig. 29.1, a). Orice perturbație exterioară face ca bila să se deplaseze într-o poziție vecină, căreia îi corespunde o energie potențială mai mare, ea tinzând apoi să revină în poziția de potențial minim.

Un corp este în *echilibru instabil* dacă, deplasat din poziția de echilibru, tinde să continue singur mișcarea. Este cazul unei bile în echilibru pe o convexitate (fig. 29.1, b). Cea mai mică perturbație deplasează bila într-o poziție căreia îi corespunde o energie potențială mai mică. Ea părăsește poziția de echilibru instabil fără să mai revină.

În fine, corpul este în *echilibru indiferent* dacă rămâne în echilibru în orice poziție vecină în care este deplasat. Este cazul bilei pe un plan orizontal (fig. 29.1, c). Testarea stabilității echilibrului se face tot printr-o perturbație exterioară, care deplasează corpul într-o poziție de aceeași energie potențială, constituind o nouă posibilitate de echilibru.

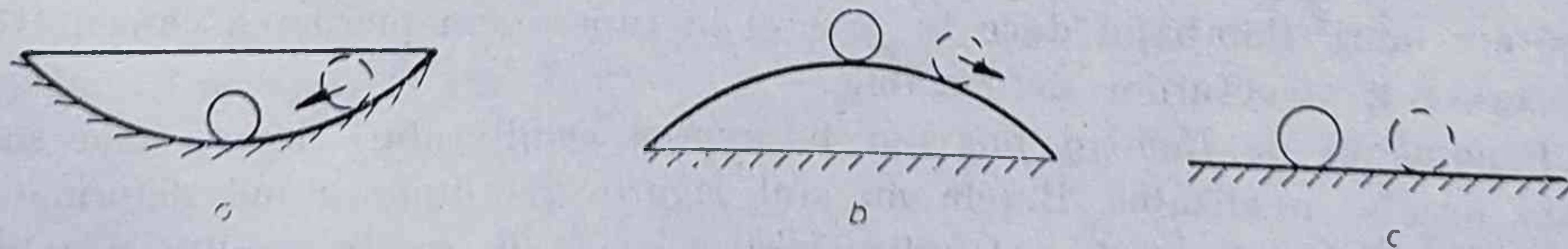


Fig. 29.1

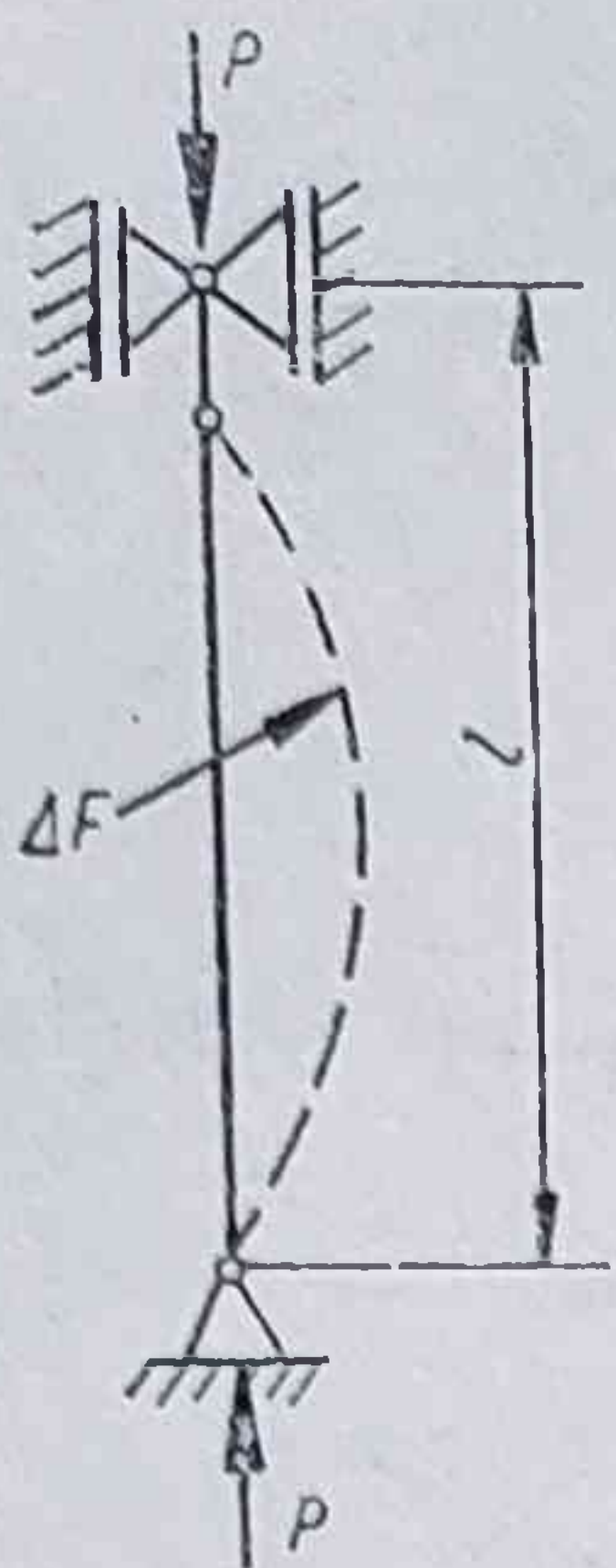


Fig. 29.2

Dacă se notează cu π energia potențială a corpului în starea inițială, prin deplasarea lui din această poziție, energia sa potențială capătă o variație $\Delta\pi$. Dacă $\Delta\pi > 0$, echilibrul este stabil; dacă $\Delta\pi < 0$, echilibrul este instabil și dacă $\Delta\pi = 0$, echilibrul este indiferent.

Sistemele elastice au o comportare asemănătoare, cu deosebirea că în locul stabilității *poziției* de echilibru se studiază stabilitatea (forme sau) *configurației* de echilibru sub acțiunea forțelor exterioare.

Dacă prin deformarea structurii și trecerea ei într-o configurație adiacentă infinit vecină, care satisface condițiile geometrice de rezemare, energia potențială totală crește $\Delta\pi > 0$, deci dacă variația energiei potențiale de deformare este mai mare ca lucrul mecanic al forțelor exterioare $\Delta W_I > \Delta L_e$, atunci configurația inițială este stabilă. Dacă prin deformarea structurii $\Delta W_I < \Delta L_e$, configurația inițială este instabilă.

La limita celor două domenii, când $\Delta\pi = 0$, deci când $\Delta W_I = \Delta L_e$, sistemul este în echilibru indiferent. Are loc o *bifurcare* a echilibrului, sistemul putînd fie să-și păstreze configurația inițială, fie să treacă în altă configurație apropiată. Starea sistemului la atingerea echilibrului indiferent este considerată *critică*, sarcinile corespunzătoare fiind denumite *sarcini critice*.

Astfel, în cazul unei bare drepte, simplu rezemate la capete, solicitate axial (fig. 29.2), se reîntîlnesc cazurile de echilibru din figura 29.1.

Dacă forța P este mai mică decît sarcina critică P_{cr} , forma rectilinie reprezintă o configurație stabilă. Acționînd asupra barei cu o forță ΔF , bara se deformează. La îndepărtarea forței ΔF , bara revine la forma rectilinie inițială (de echilibru stabil).

Dacă $P > P_{cr}$, teoretic forma rectilinie reprezintă o configurație de echilibru. Aplicarea forței transversale ΔF face ca bara să părăsească forma rectilinie, să se deformeze foarte mult, ceea ce, în general, duce la rupere. Forma rectilinie inițială reprezintă o configurație de echilibru instabil.

Dacă $P = P_{cr}$, bara poate fi deformată prin aplicarea forței ΔF , și orice formă deformată apropiată de forma inițială reprezintă o configurație de echilibru, căci forța critică P_{cr} corespunde echilibrului indiferent.

Dacă forța P este aplicată static, deci dacă valoarea ei crește monoton de la zero la valoarea nominală, forța critică P_{cr} se atinge atunci când este posibilă o configurație de echilibru curbilinie, deci când se pierde stabilitatea forme rectilinii.

În general, pierderea stabilității unei anumite configurații de echilibru a unui sistem deformabil, sub acțiunea forțelor aplicate, se numește *flambaj*.

Deoarece după flambaj se produc deformații mari, însoțite de eforturi unitare mari, flambajul duce în general la rupere sau pierderea capacității portante a structurilor deformabile.

Fenomenul de *flambaj pur* (cu bifurcarea echilibrului) descris mai sus este practic irealizabil. Barele nu sînt riguros rectilinii, avînd deformații inițiale, iar forțele nu se pot aplica perfect axial. În aceste condiții, practic se observă o încovoiere cu forță axială, care duce la *flambajul prin diver-*

gență. În acest caz, imperfecțiunile și sarcinile transversale produc o configurație inițială ușor deformată. Forța axială produce un moment încovoietor care accentuează aceste deformații. Creșterea deformațiilor duce la creșterea momentului încovoietor, care la rândul lui mărește deformațiile. Când P tinde spre P_{cr} fenomenul este divergent, deformațiile crescând teoretic nelimitat.

29.2. CALCULUL SARCINII CRITICE PRIN METODA ENERGETICĂ

Se consideră bara dreaptă, comprimată axial, din figura 29.3. Forța critică de flambaj P_{cr} se determină din condiția de echilibru indiferent, egalând lucrul mecanic al forței exterioare P_{cr} :

$$L_e = P_{cr} \cdot u,$$

cu energia potențială de deformație acumulată de bară în configurația curbilinie:

$$W_I = \int_0^l \frac{M_t^2 \cdot dx}{2E \cdot I} = \frac{1}{2} \int_0^l E \cdot I (v'')^2 dx, \quad (29.1)$$

unde s-a utilizat ecuația diferențială liniarizată a fibrei medii deformate (22.27).

Deplasarea u a punctului de aplicație a forței P_{cr} este egală cu diferența între lungimea barei l și proiecția fibrei medii deformate pe direcția de acțiune a forței P_{cr} .

Pentru un element de bară de lungime ds , se poate scrie:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cong dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = dx \left(1 + \frac{1}{2} \varphi^2\right),$$

unde s-a utilizat ipoteza micilor deformații $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \cong \varphi$.

Deplasarea elementară este $du = ds - dx = \frac{1}{2} \varphi^2 \cdot dx$,

deci deplasarea punctului de aplicație a forței critice de flambaj este:

$$u = \int_0^l du = \frac{1}{2} \int_0^l (\varphi')^2 dx,$$

iar lucrul mecanic al acesteia

$$L_{eI} = \frac{P_{cr}}{2} \int_0^l (\varphi')^2 dx. \quad (29.2)$$

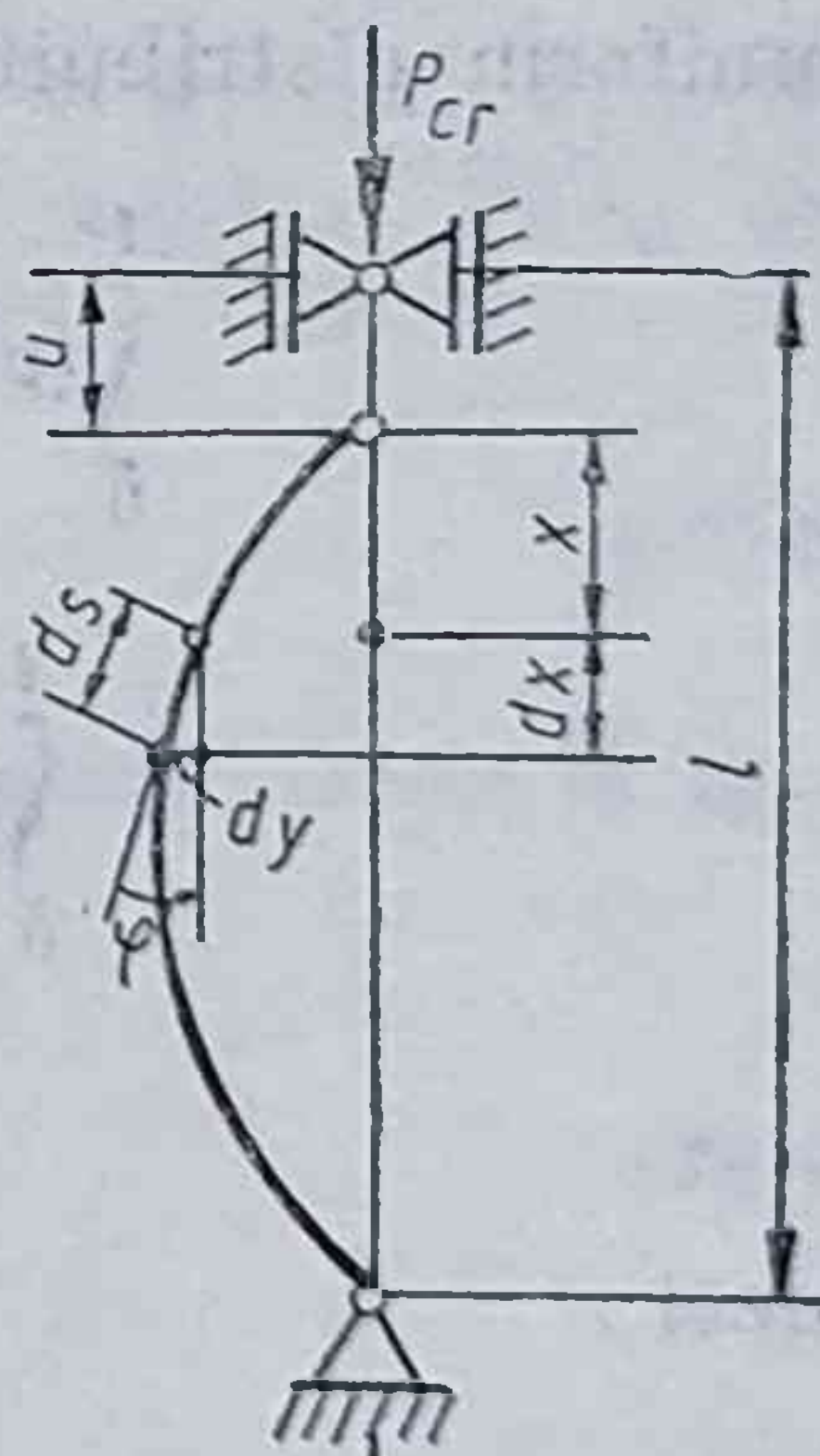


Fig. 29.3

Egalînd (29.1) și (29.2), se obține expresia forței critice de flambaj :

$$P_{cr} = \frac{\int_0^l E \cdot I_z (v'')^2 dx}{\int_0^l (v')^2 dx}. \quad (29.3)$$

Dacă $v(x)$ este forma deformată exactă a barei, atunci relația (29.3) dă valoarea exactă a forței critice de flambaj. Dacă se utilizează o formă deformată aproximativă, relația (29.3) dă o valoare aproximativă, întotdeauna mai mare ca cea exactă, aproximația fiind cu atît mai bună cu cît $v(x)$ se apropie mai mult de forma exactă.

Astfel, dacă se alege deformată exactă (v. subcap. 29.3)

$$v(x) = v_0 \sin \frac{\pi x}{l},$$

atunci :

$$\int_0^l (v')^2 dx = \frac{v_0^2 \cdot \pi^2}{l^2} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi \cdot x}{l} dx = \frac{v_0^2 \cdot \pi^2}{l^2} \frac{l}{2} = \frac{v_0^2 \cdot \pi^2}{2l},$$

$$\int_0^l (v'')^2 dx = \frac{v_0^2 \cdot \pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi \cdot x}{l} dx = \frac{v_0^2 \cdot \pi^4}{l^4} \frac{l}{2} = \frac{v_0^2 \cdot \pi^4}{2l^3},$$

deci forța critică de flambaj este :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2} = \frac{9,869 E \cdot I}{l^2}. \quad (29.4)$$

Dacă se alege deformată aproximativă :

$$v(x) = a(x^4 - 2l \cdot x^3 + l^3 \cdot x),$$

corespunzînd barei simplu rezemate, încărcată cu o sarcină transversală uniform distribuită (22.29),

$$\int_0^l (v')^2 dx = a^2 \int_0^l (4x^3 - 6l \cdot x^2 + l^3)^2 dx = \frac{17}{35} a^2 \cdot l^7,$$

$$\int_0^l (v'')^2 dx = 144 a^2 \int_0^l (x^2 - l \cdot x)^2 dx = \frac{24}{5} a^2 \cdot l^5,$$

deci :

$$P_{cr} = \frac{\frac{24}{5} a^2 \cdot l^5 \cdot EI}{\frac{17}{35} a^2 \cdot l^7} = \frac{9,882 E \cdot I}{l^2},$$

fiind cu 0,2% mai mare ca valoarea exactă (29.4).

29.3. CALCULUL SARCINII CRITICE PRIN METODA DIFERENȚIALĂ (METODA LUI EULER)

Fie bara dreaptă, articulată la capete, comprimată axial (fig. 29.4). Se consideră bara în starea deformată de după flambaj și se pune problema determinării condițiilor în care aceasta reprezintă o configurație de echilibru a barei, sub acțiunea forțelor exterioare.

În secțiunea x , momentul încovoietor este :

$$M(x) = P \cdot v,$$

deci ecuația diferențială a fibrei medii deformată (22.27) se scrie :

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = -P \cdot v,$$

sau

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \alpha^2 \cdot v = 0, \quad (29.5)$$

unde s-a notat

$$\alpha^2 = \frac{P}{E \cdot I}. \quad (29.6)$$

Soluția generală a ecuației de tip Euler (29.5) este :

$$v(x) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x. \quad (29.7)$$

Constantele de integrare C_1 și C_2 se determină din condițiile la limită :

$$x = 0 ; v = 0 \text{ și } x = l ; v = 0.$$

Rezultă : $C_2 = 0$ și $C_1 \sin \alpha l = 0$.

Deoarece $C_1 \neq 0$ (altfel bara nu ar fi deformată) și $\alpha \neq 0$ (căci $P \neq 0$), se obține $\sin \alpha \cdot l = 0$; $\alpha \cdot l = n \cdot \pi$ ($n = 1, 2, \dots$), deci ecuația (29.5) are soluții dacă :

$$\alpha = \frac{n \cdot \pi}{l}. \quad (29.8)$$

Înlocuind (29.8) în (29.6) se obține expresia forței de compresiune la care forma deformată este configurație de echilibru :

$$P_f = \frac{n^2 \cdot \pi^2 E \cdot I}{l^2}, \quad (29.9)$$

iar din (29.7) rezultă deformată corespunzătoare :

$$v(x) = C_1 \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}. \quad (29.10)$$

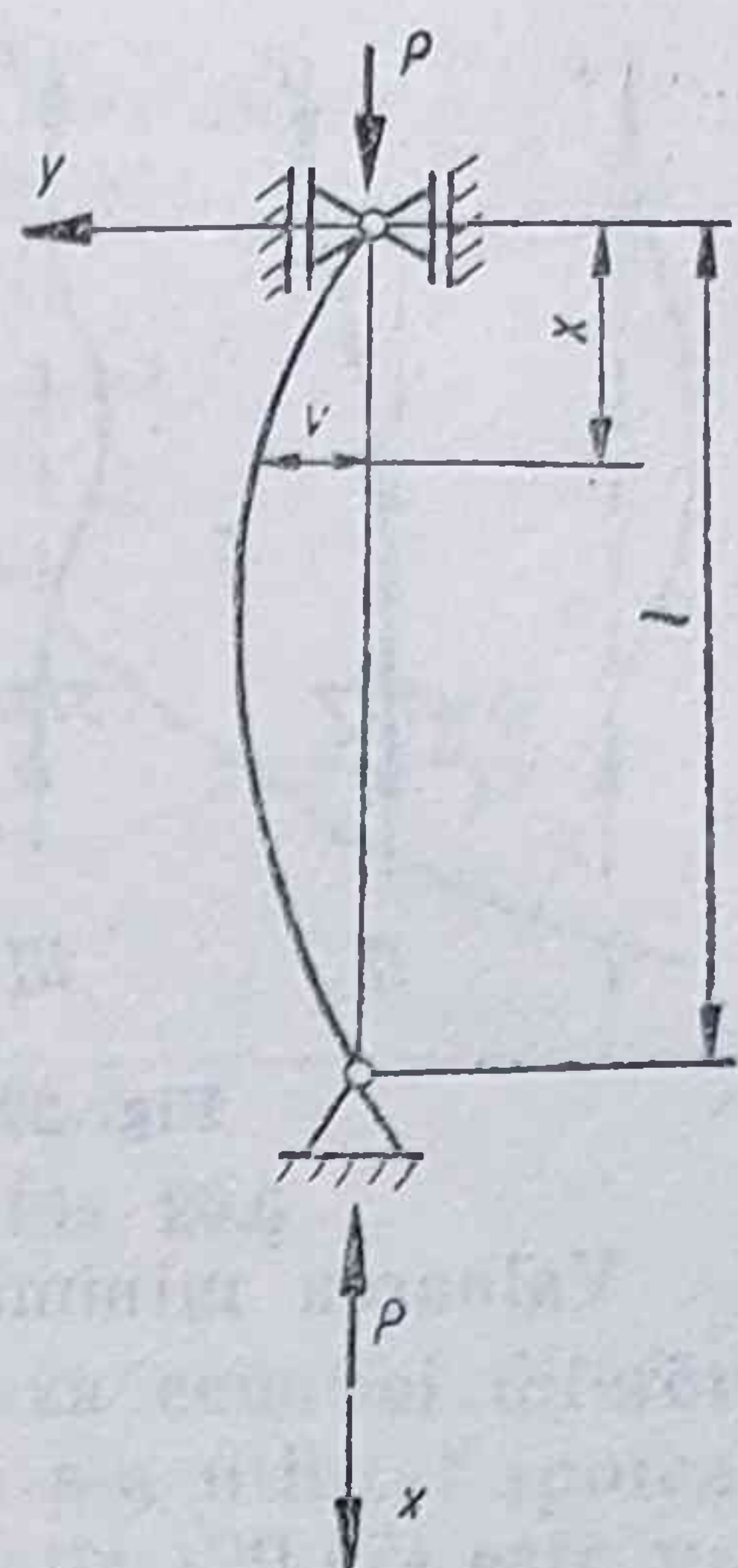


Fig. 29.4

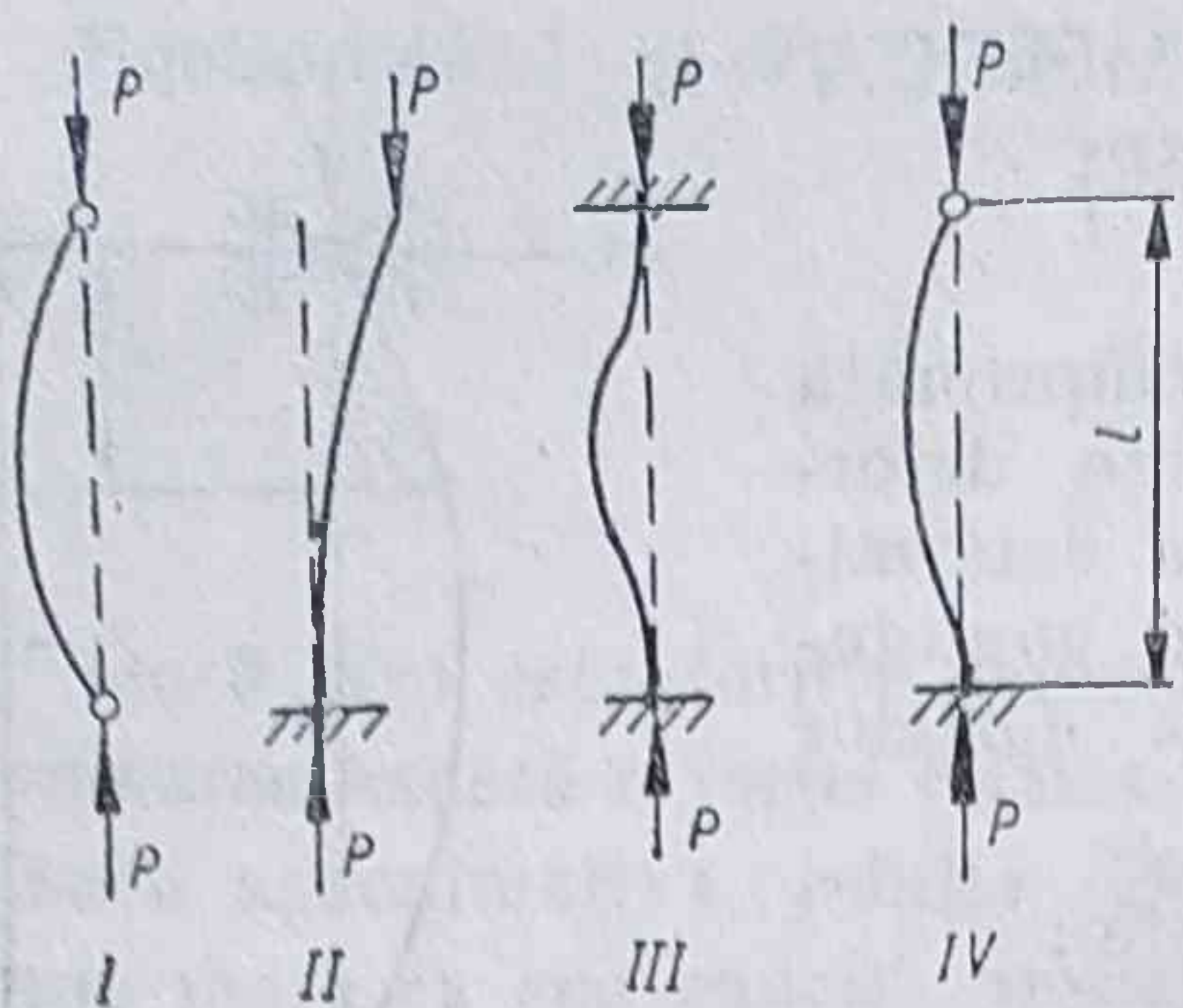


Fig. 29.5

Valoarea minimă

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2} \quad (29.11)$$

se numește *forța critică de flambaj*, deoarece la aplicarea statică a sarcinilor flambajul se produce la această valoare a forței de compresiune.

Dacă secțiunea transversală a barei are momente de inerție axiale diferite față de axe diferite, flambajul are loc în planul perpendicular pe axa față de care momentul de inerție este minim, deci relația (29.11) se scrie :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l^2} \quad (29.12)$$

În figura 29.5 se prezintă patru cazuri de bare comprimate axial prin forțe aplicate la capete, indicînd și forma deformată după flambaj. Calculul forței critice de flambaj pentru cazurile II, III și IV se face ca pentru bara articulată la capete (cazul I), utilizînd condițiile la limită corespunzătoare.

Expresiile forței critice de flambaj pentru toate cele patru cazuri se pot scrie sub forma :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_f^2}, \quad (29.13)$$

unde *lungimea de flambaj*, reprezentînd lungimea unei semiunde (distanța între două puncte consecutive de inflexiune) este $l_f = l$ (cazul I) ; $l_f = 2l$ (cazul II) ; $l_f = \frac{l}{2}$ (cazul III) ; $l_f = \frac{\sqrt{2}}{2} l$ (cazul IV). Relația (29.13) este *formula lui Euler*.

29.4. DIAGRAMA EFORTULUI UNITAR CRITIC DE FLAMBAJ

Se definește efortul unitar critic de flambaj, σ_f , raportul între forța critică de flambaj P_{cr} (29.13) și aria secțiunii transversale :

$$\sigma_f = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_f^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{l_f^2} i_{min}^2 \quad (29.14)$$

unde :

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} \quad (29.15)$$

este raza de inerție minimă a secțiunii.

Se introduce mărimea adimensională

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}}, \quad (29.16)$$

numită *coeficient de zveltețe* sau *coeficient de subțirime*.

Cu această notație, relația (29.14) devine :

$$\sigma_f = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}, \quad (29.17)$$

fiind reprezentată grafic în coordonatele $\sigma_f - \lambda$ în figura 29.6.

Curba respectivă este o hiperbolă cubică, numită *hiperbola lui Euler*.

Deoarece formula lui Euler (29.13) s-a stabilit pe baza ecuației diferențiale a fibrei medii deformate, iar la deducerea acesteia s-a utilizat ipoteza elasticității perfecte, deci legea lui Hooke, rezultă că relația (29.17) este valabilă pentru valori σ_f mai mici sau egale cu limita de proporționalitate σ_p a materialului.

Se notează λ_0 abscisa punctului de ordonată $\sigma_f = \sigma_p$.

Rezultă că formula lui Euler este valabilă numai pentru valori $\lambda > \lambda_0$ pentru care se spune că există *flambaj elastic*.

În zona pentru care $\lambda < \lambda_0$, $\sigma_f > \sigma_p$, deci există *flambaj plastic*. În domeniul flambajului plastic, pe baza experiențelor efectuate de Tetmajer și Jasinski, se admite un traseu liniar al diagramei efortului unitar critic de flambaj, de forma :

$$\sigma_f = a - b \cdot \lambda \quad (\text{daN/cm}^2). \quad (29.18)$$

La materiale tenace, valoarea lui σ_f se limitează la valoarea limitei de curgere σ_c . Se notează λ_1 abscisa punctului de ordonată $\sigma_f = \sigma_c$. Pentru $\lambda < \lambda_1$ se face un calcul la compresiune.

Valorile coeficienților a și b din relația (29.18) și a limitelor λ_0 , λ_1 , sînt date în tabelul 29.1, pentru cîteva materiale frecvent utilizate în practică.

Tabelul 29.1

Coeficienții din formulele Tetmajer — Jasinski

Materialul	a	b	λ_0	λ_1
OL 37 ($\sigma_c = 24 \text{ daN/mm}^2$)	3 040	11,2	105	60
Oțel cu $\sigma_r = 48 \text{ daN/mm}^2$ ($\sigma_c = 31 \text{ daN/mm}^2$)	4 600	25,7	100	60
Oțel cu $\sigma_r = 52 \text{ daN/mm}^2$ ($\sigma_c = 36 \text{ daN/mm}^2$)	5 770	37,4	100	60
Oțel cu 5 % nichel	4 610	22,5	86	0
Oțel crom — molibden	9 800	53,0	55	0
Duraluminu	3 720	21,4	50	0

La fontă se utilizează o relație parabolică

$$\sigma_f = 7\,760 - 120\lambda + 0,53\lambda^2 \text{ (daN/cm}^2\text{)},$$

cu $\lambda_0 = 80$ și $\lambda_1 = 0$.

În general, la piese de oțel $\lambda < 250$, iar la piese de fontă $\lambda < 120$, pentru a evita construcția unor bare prea zvelte.

29.5. CALCULUL LA FLAMBAJ

Se definește un *coeficient de siguranță la flambaj* c_f egal cu raportul între forța critică P_{cr} și forța efectiv aplicată barei, P

$$c_f = \frac{P_{cr}}{P}, \quad (29.19)$$

care pentru piese de mașini are valori cuprinse între limite largi $c_f = 4 \dots 20$, în funcție de importanța piesei în ansamblul respectiv.

Prin calculul de *verificare* la flambaj se urmărește determinarea coeficientului de siguranță c_f și compararea lui cu valorile recomandate în normele de calcul.

Se calculează mai întâi coeficientul de zveltețe λ . Dacă $\lambda \geq \lambda_0$, atunci flambajul are loc în domeniul elastic; se calculează P_{cr} cu formula lui Euler (29.13) și se împarte la forța P efectiv aplicată barei, iar c_f trebuie să fie mai mare sau egal cu valoarea prescrisă. Dacă $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$, flambajul are loc în domeniul plastic; se calculează $P_{cr} = A \cdot \sigma_f$, unde σ_f este dat de relația (29.18), apoi se calculează c_f și se compară cu valoarea prescrisă. Dacă $\lambda < \lambda_1$, bara se calculează la compresiune.

Calculul de *dimensionare* este îngreunat de faptul că, necunoscînd dimensiunile secțiunii transversale, nu se poate calcula i_{min} , deci nici λ , neștiindu-se în ce domeniu are loc flambajul. În această situație, se presupune că flambajul este elastic; se utilizează formula lui Euler (29.13) și relația (29.19), de unde rezultă:

$$I_{nec} = \frac{P \cdot l_f^2 \cdot c_f}{\pi^2 \cdot E}, \quad (29.20)$$

și se determină dimensiunile secțiunii transversale.

Se calculează λ și se compară cu λ_0 . Dacă $\lambda \geq \lambda_0$, utilizarea formulei lui Euler a fost îndreptățită și dimensiunile calculate sînt corecte. Dacă $\lambda < \lambda_0$, formula lui Euler nu este aplicabilă. Este necesară verificarea dimensiunilor cu formulele flambajului plastic. Dacă c_f este mai mic decît valoarea prescrisă, se măresc dimensiunile secțiunii transversale și se reface calculul, pînă se obține coeficientul de siguranță impus.

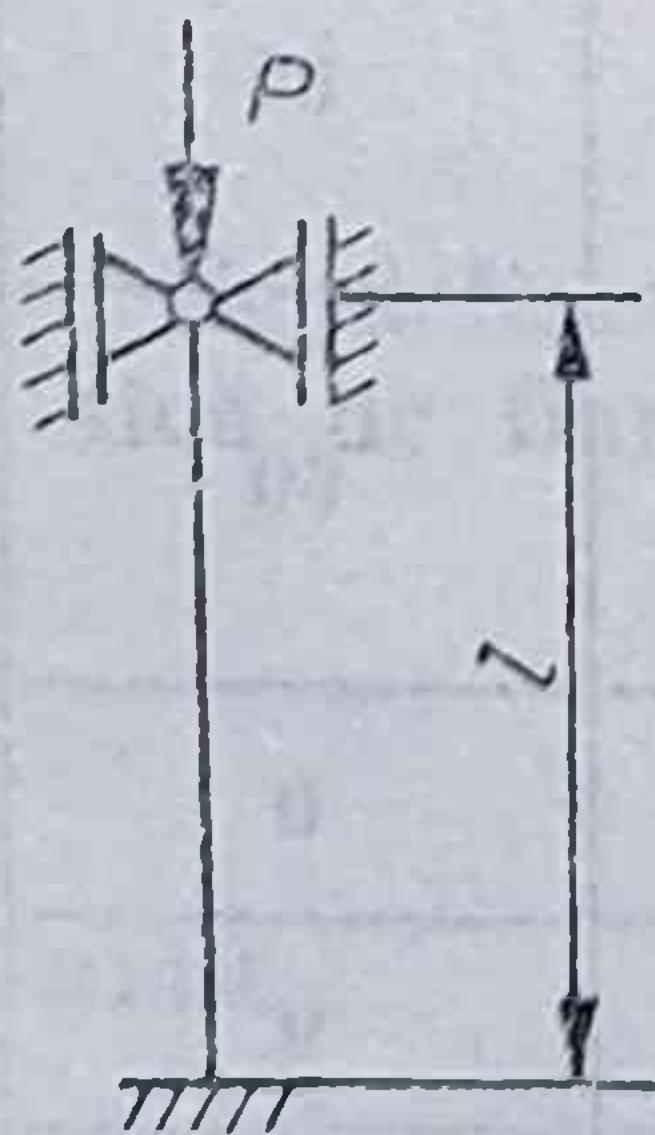


Fig. 29.7

APLICAȚIA 1

Se cere să se calculeze forța capabilă de compresiune a barei din figura 29.7, dacă $c_f = 3,5$; $\lambda_0 = 105$, $E = 2,1 \cdot 10^6$ daN/cm², $l = 2$ m, secțiunea fiind dreptunghiulară cu $b = 4$ cm și $h = 6$ cm.

Rezolvare

Pentru cazul IV din figura 29.5:

$$l_f = 0,707l = 0,707 \cdot 200 = 141,4 \text{ cm.}$$

Raza de inerție minimă este :

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{h \cdot b^3}{12b \cdot h}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{4}{\sqrt{12}} = 1,15 \text{ cm.}$$

Coeficientul de zveltețe este :

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{141,4}{1,15} = 126.$$

Deoarece $\lambda > \lambda_0 = 105$, se poate utiliza formula lui Euler și relația (29.19).
Rezultă :

$$P_{cap} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{c_f \cdot l_f^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 32}{3,5 \cdot 141,4^2} = 9\,474 \text{ daN,}$$

unde

$$I_{min} = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{6 \cdot 4^3}{12} = 32 \text{ cm}^4.$$

APLICAȚIA 2

Să se dimensioneze bara din figura 29.7, din oțel cu secțiunea circulară cu diametrul d , dacă $P = 150 \text{ kN}$, $\lambda_0 = 105$, $\sigma_f = 3\,040 - 11,2\lambda \text{ (daN/cm}^2\text{)}$, $c_f = 3,5$, $l = 2 \text{ m}$, $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare

Se presupune că flambajul are loc în domeniul elastic, utilizînd formula (29.20) :

$$I_{nec} = \frac{P \cdot l_f^2 c_f}{\pi^2 \cdot E} = \frac{15\,000 \cdot 141,4^2 \cdot 3,5}{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6} = 50 \text{ cm}^4,$$

deci :

$$\frac{\pi \cdot d^4}{64} = 50 ; \quad d = 5,6 \text{ cm.}$$

$$\text{Se calculează } i_{min} = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot d^4}{64} \cdot \frac{4}{\pi \cdot d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{5,6}{4} = 1,4 \text{ cm,}$$

apoi

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{141,4}{1,4} = 101 < \lambda_0 = 105,$$

deci formula (29.20) nu este valabilă.

Se calculează coeficientul de siguranță pentru flambajul plastic

$$\sigma_f = 3\,040 - 11,2\lambda = 3\,040 - 11,2 \cdot 101 = 1\,908,8 \text{ daN/cm}^2,$$

aria secțiunii transversale :

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 5,6^2}{4} = 24,63 \text{ cm}^2$$

și forța critică de flambaj plastic :

$$P'_{cr} = \sigma_f \cdot A = 1\,908,8 \cdot 24,63 = 47\,014 \text{ daN.}$$

Rezultă un coeficient de siguranță :

$$c'_f = \frac{P'_{cr}}{P} = \frac{47\,014}{15\,000} = 3,13 < c_f = 3,5.$$

Se repetă calculele pentru $d = 6 \text{ cm}$:

$$i_{min} = \frac{d}{4} = \frac{6}{4} = 1,5 \text{ cm}; \quad \lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{141,4}{1,5} = 94,2,$$

$$\sigma_f = 3040 - 11,2 \cdot 94,2 = 1985 \text{ daN/cm}^2; \quad A = \frac{\pi \cdot 6^2}{4} = 28,27 \text{ cm}^2;$$

$$P''_{cr} = 1985 \cdot 28,27 = 56123 \text{ daN}.$$

Rezultă:

$$c''_f = \frac{P''_{cr}}{P} = \frac{56123}{15000} = 3,74 > c_f = 3,5.$$

Se alege o valoare intermediară

$$d = 5,8 \text{ cm}.$$

APLICAȚIA 3

Să se verifice coeficientul de siguranță la flambaj $c_f = 3$, pentru bara din OL 37 de profil U8 (fig. 29.8, d), rezemată și solicitată ca în figurile 29.8, a, b și c.

Rezolvare

Pentru profilul U8, în anexa 6, tabelul 3 se găsesc:

$A = 11 \text{ cm}^2$, $I_{min} = I_y = 19,4 \text{ cm}^4$, $i_{min} = i_y = 1,33 \text{ cm}$. Pentru OL 37, coeficienții a , b , λ_0 și λ sînt (tabelul 29.1): $a = 3040 \text{ daN/cm}^2$, $b = 11,2 \text{ daN/cm}^2$, $\lambda_0 = 105$, $\lambda_1 = 60$, iar $\sigma_c = 2400 \text{ daN/cm}^2$ și $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$.

a) Pentru cazul de rezemare din figura 29.8, a, $l_f = 2l = 200 \text{ cm}$.

Coeficientul de zveltețe:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{200}{1,33} = 150,38 > \lambda_0 = 105,$$

arată că flambajul are loc în domeniul elastic.

Se calculează coeficientul efectiv de siguranță la flambaj

$$c_{fef} = \frac{P_{cr}}{P},$$

unde pentru P_{cr} se utilizează formula lui Euler (29.13):

$$c_{fef} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_f^2 \cdot P} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 19,4}{200^2 \cdot 8000} = 1,26 < c_f = 3,$$

deci nu este satisfăcut coeficientul de siguranță impus.

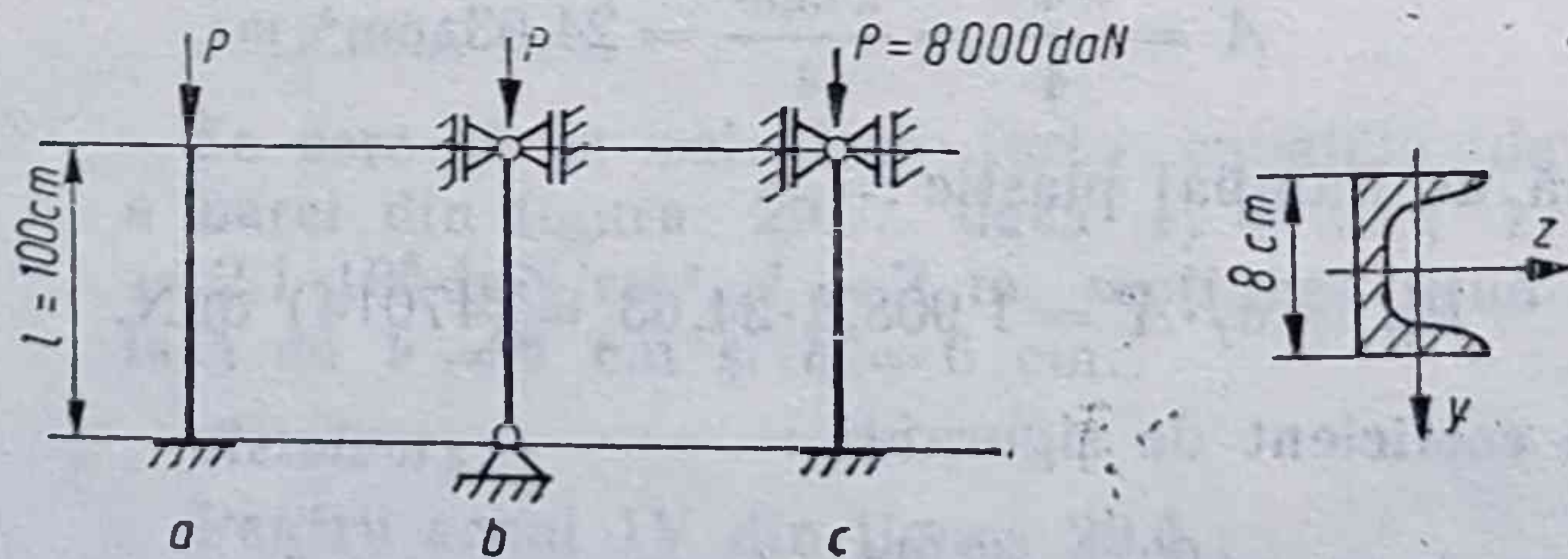


Fig. 29.8

b) Pentru cazul de rezemare din figura 29.8, b, lungimea de flambaj este $l_f = l = 100$ cm.

$$\text{Rezultă } \lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{100}{1,33} = 75,19 < \lambda_0 = 105,$$

care arată că flambajul are loc în domeniul plastic, deci pentru calculul lui P_{cr} se va folosi formula (29.18). Coeficientul efectiv de siguranță la flambaj este :

$$c_{fef} = \frac{P_{cr}}{P} = \frac{\sigma_f \cdot A}{P} = \frac{(a - b\lambda)A}{P} = \frac{(3\,040 - 11,2 \cdot 75,19)11}{8\,000} = 3,022 > c_f = 3.$$

c) Pentru cazul de rezemare din figura 29.8, c, $l_f = 0,707l = 0,707 \cdot 100 = 70,7$ cm.

Coeficientul de zveltețe este :

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{70,7}{1,33} = 53,16 < \lambda_1 = 60,$$

În acest caz făcîndu-se calculul la compresiune.

Coeficientul de siguranță efectiv este :

$$c_{fef} = \frac{\sigma_c \cdot A}{P} = \frac{2\,400 \cdot 11}{8\,000} = 3,3 > c_f = 3.$$

APLICAȚIA 4

Să se dimensioneze bara rezemată și solicitată ca în figura 29.9, a și b din OL 37 de profil I, coeficientul de siguranță impus fiind $c_f = 3$.

Rezolvare

Pentru OL 37 coeficienții a , b , λ_0 și λ_1 sînt (tabelul 29.1): $a = 3\,040$ daN/cm², $b = 11,2$ daN/cm², $\lambda_0 = 105$, $\lambda_1 = 60$, iar $\sigma_c = 2\,400$ daN/cm² și $E = 2,1 \cdot 10^6$ daN/cm².

a) Pentru cazul de rezemare din figura 29.9, a, $l_f = 2l = 2 \cdot 100 = 200$ cm.

Se presupune că flambajul are loc în domeniul elastic, utilizîndu-se formula (29.20) :

$$I_{nec} = \frac{P \cdot l_f \cdot c_f}{\pi^2 \cdot E} = \frac{10\,000 \cdot 200^2 \cdot 3}{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6} = 57,69 \text{ cm}^4.$$

Întrucît $I_{nec} = 57,96 \text{ cm}^4$ este situat între valoarea $54,7 \text{ cm}^4$, corespunzătoare profilului I 16 și $81,3 \text{ cm}^4$, corespunzătoare profilului I 18, din anexa 6, tabelul 4 se alege profilul I 18, avînd următoarele caracteristici : $A = 27,9 \text{ cm}^2$, $I_{min} = I_y = 81,3 \text{ cm}^4$, $i_{min} = i_y = 1,71 \text{ cm}$.

Se calculează λ :

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{200}{1,71} = 116,96 > \lambda_0 = 105.$$

Cazul fiind situat în domeniul elastic, dimensionarea pe baza formulei lui Euler (29.20) este corectă.

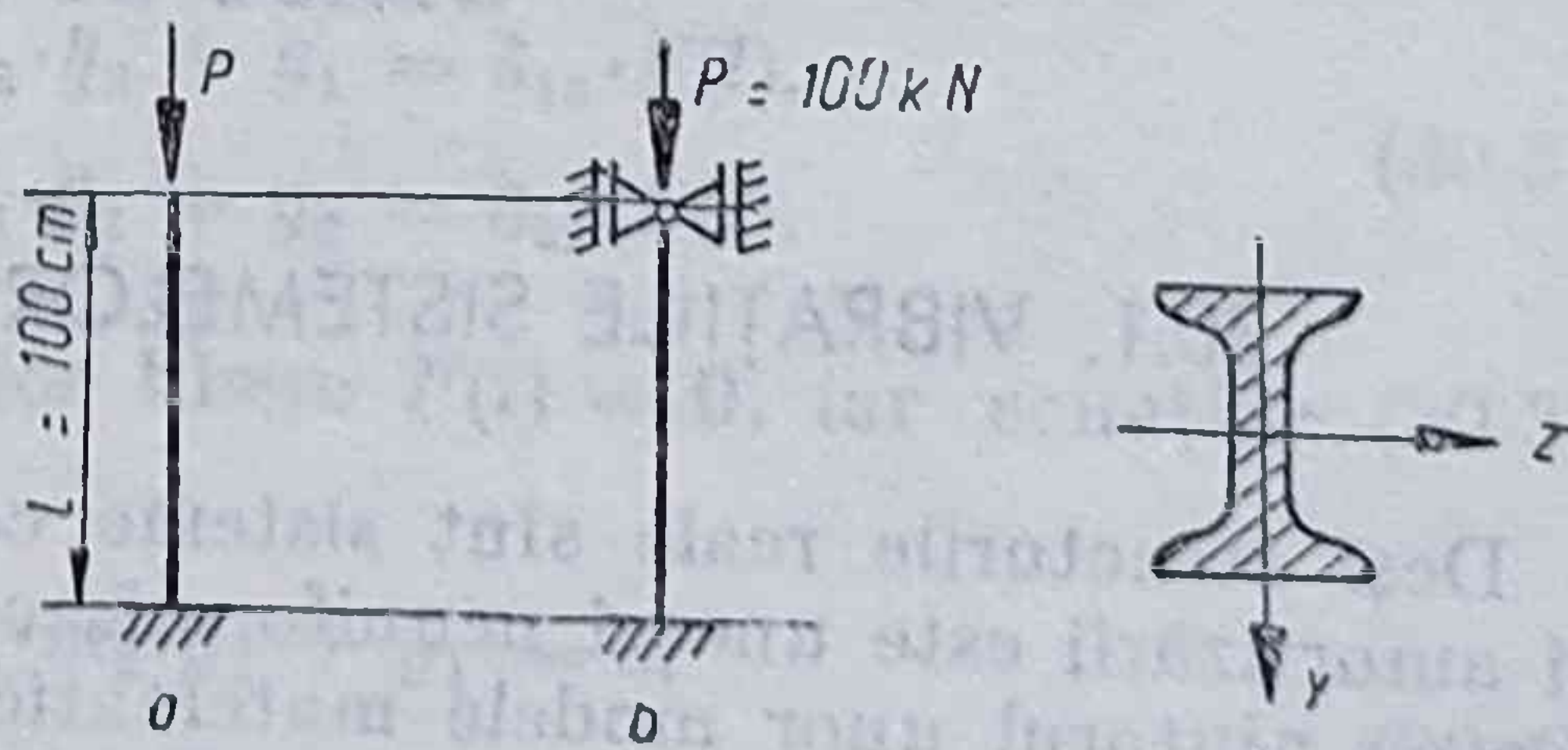


Fig. 29.9

b) Pentru cazul de rezemare din figura 29.9, b,

$$l_f = 0,707 l = 0,707 \cdot 100 = 70,7 \text{ cm.}$$

Utilizînd formula (29.20) pentru domeniul flambajului elastic, rezultă :

$$I_{nec} = \frac{P \cdot l_f^2 \cdot c_f}{\pi^2 \cdot E} = \frac{10000 \cdot 70,7^2 \cdot 3}{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^3} = 7,24 \text{ cm}^4.$$

Întrucît $I_{nec} = 7,24 \text{ cm}^4$ este situat între valoarea $6,29 \text{ cm}^4$, corespunzătoare profilului I 8, și $12,2 \text{ cm}^4$, corespunzătoare profilului I 10, din anexa 6, tabelul 4 se alege profilul I 10, cu următoarele caracteristici :

$$A = 10,6 \text{ cm}^2, I_{min} = I_y = 12,2 \text{ cm}^4, i_{min} = i_y = 1,07 \text{ cm.}$$

Se calculează λ :

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{70,7}{1,07} = 66,08 < \lambda_0 = 105,$$

cazul fiind situat în domeniul flambajului plastic.

Se verifică coeficientul de siguranță pentru flambajul plastic :

$$c'_f = \frac{P_{cr}}{P} = \frac{\sigma_f \cdot A}{P} = \frac{(\alpha - b \cdot \lambda) A}{P} = \frac{(3040 - 11,2 \cdot 66,08) 10,6}{10000} = 2,44 < c_f = 3$$

Se majorează dimensiunile secțiunii, trecînd la următorul profil, I 12, cu caracteristicile : $A = 14,2 \text{ cm}^2$, $I_{min} = I_y = 21,5 \text{ cm}^4$, $i_{min} = i_y = 1,23 \text{ cm}$.

Coeficientul de zveltețe este :

$$\lambda' = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{70,7}{1,23} = 57,48 < \lambda_1 = 60,$$

în acest caz făcîndu-se calculul la compresiune.

Coeficientul de siguranță este :

$$c''_f = \frac{\sigma_c \cdot A}{P} = \frac{2400 \cdot 14,2}{10000} = 3,41 > c_f = 3.$$

30.

VIBRAȚIILE SISTEMELOR CU MAI MULTE GRADE DE LIBERTATE

30.1. VIBRAȚIILE SISTEMELOR CU MASE CONCENTRATE

Deși structurile reale sînt sisteme continue, distribuția masei, rigidității și amortizării este uneori neuniformă, ceea ce permite descrierea comportării lor cu ajutorul unor modele matematice discrete, cu parametri concentrați, avînd un număr finit de grade de libertate. Alteori, discretizarea se face

pentru simplificarea studiului problemei, numărul gradelor de libertate ale modelului crescînd odată cu precizia impusă calculului. Numărul gradelor de libertate ale unui sistem este egal cu numărul coordonatelor independente care definesc complet mișcarea sistemului. În cele ce urmează se vor prezenta exemple de probleme privind vibrațiile sistemelor elastice cu două grade de libertate.

30.1.1. VIBRAȚII TRANSVERSALE

În cazul cînd elementele elastice din sistem sînt bare solicitate la încovoiere, se poate utiliza *metoda coeficienților de influență*.

Fie sistemul din figura 30.1, format dintr-o grindă elastică de masă neglijabilă și două mase concentrate m_1 și m_2 . Se aleg drept coordonate independente $y_1(t)$ și $y_2(t)$, deplasările verticale ale celor două mase.

În figura 30.1, *b* s-au pus în evidență forțele de inerție ce acționează la un moment t asupra maselor în mișcare.

Forțele care acționează asupra barei se pot nota deci (fig. 30.1, *c*) :

$$\Phi_1 = -m_1 \cdot \ddot{y}_1 \text{ și } \Phi_2 = F(t) - m_2 \cdot \ddot{y}_2. \quad (30.1)$$

Pe de altă parte, dacă se notează δ_{ij} ($i, j = 1, 2$) *coeficienții de influență* ai sistemului, reprezentînd deplasarea grinzii în secțiunea i produsă de o forță egală cu unitatea, aplicată în secțiunea j (fig. 30.1, *d* și *e*), prin aplicarea principiului suprapunerii efectelor, deplasările celor două mase vor avea expresiile :

$$\begin{aligned} y_1 &= \Phi_1 \cdot \delta_{11} + \Phi_2 \cdot \delta_{12}, \\ y_2 &= \Phi_1 \cdot \delta_{21} + \Phi_2 \cdot \delta_{22}. \end{aligned} \quad (30.2)$$

Înlocuind expresiile (30.1) în (30.2), rezultă ecuațiile diferențiale ale mișcării :

$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot m_1 \cdot \ddot{y}_1 + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot \ddot{y}_2 + y_1 &= \delta_{12} \cdot F(t), \\ \delta_{21} \cdot m_1 \cdot \ddot{y}_1 + \delta_{22} \cdot m_2 \cdot \ddot{y}_2 + y_2 &= \delta_{22} \cdot F(t). \end{aligned} \quad (30.3)$$

Vibrațiile libere. În cazul vibrațiilor libere $F(t) = 0$, iar ecuațiile (30.3) se scriu :

$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot m_1 \cdot \ddot{y}_1 + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot \ddot{y}_2 + y_1 &= 0, \\ \delta_{21} \cdot m_1 \cdot \ddot{y}_1 + \delta_{22} \cdot m_2 \cdot \ddot{y}_2 + y_2 &= 0. \end{aligned} \quad (30.4)$$

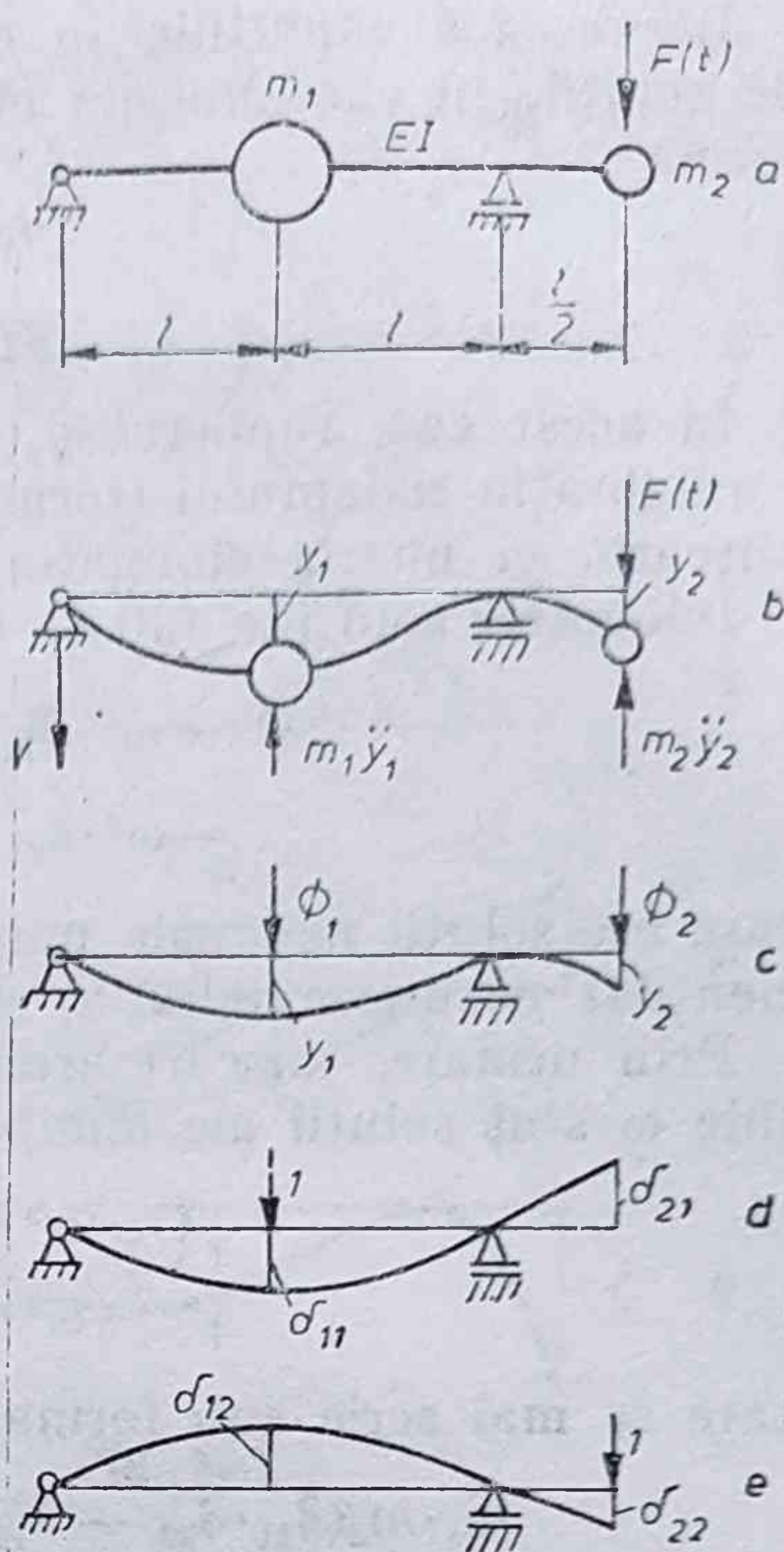


Fig. 30.1

Interesează condițiile în care este posibilă existența unui tip particular de soluții, în care masele m_1 și m_2 execută mișcări armonice sincrone, de forma :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= a_1 \sin(\omega \cdot t + 0), \\ y_2(t) &= a_2 \sin(\omega \cdot t + 0). \end{aligned} \quad (30.5)$$

În acest caz, raportul $y_2(t)/y_1(t)$ este independent de timp, prin urmare configurația sistemului (forma deformatei dinamice) nu se schimbă în timpul mișcării, ci numai elongația mișcării acestuia.

Înlocuind soluțiile (30.5) în (30.4), se obține sistemul :

$$\begin{cases} (1 - \omega^2 \cdot \delta_{11} \cdot m_1) a_1 - \omega^2 \cdot \delta_{12} \cdot m_2 \cdot a_2 = 0, \\ -\omega^2 \cdot \delta_{21} \cdot m_1 \cdot a_1 + (1 - \omega^2 \cdot \delta_{22} \cdot m_2) a_2 = 0, \end{cases} \quad (30.6)$$

care are soluții nebanale numai atunci când se anulează determinantul coeficienților necunoscutelor a_1 și a_2 .

Prin urmare, mișcări armonice sincrone sînt posibile numai dacă pulsațiile ω sînt soluții ale *ecuației pulsațiilor* :

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega^2 \cdot \delta_{11} \cdot m_1 & -\omega^2 \cdot \delta_{12} \cdot m_2 \\ -\omega^2 \cdot \delta_{21} \cdot m_1 & 1 - \omega^2 \cdot \delta_{22} \cdot m_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (30.7)$$

care se mai scrie sub forma :

$$m_1 \cdot m_2 (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2) \omega^4 - (\delta_{11} \cdot m_1 + \delta_{22} \cdot m_2) \omega^2 + 1 = 0. \quad (30.7, a)$$

Ecuația (30.7) are două rădăcini reale pozitive, ω_1^2 și ω_2^2 , deci există numai două posibilități de a avea o mișcare sincronă.

Înlocuind valorile ω_1^2 și ω_2^2 în ecuațiile (30.6), rezultă rapoartele :

$$\mu_1 = \frac{a_2^{(1)}}{a_1^{(1)}} = \frac{1 - \omega_1^2 \delta_{11} \cdot m_1}{\omega_1^2 \cdot \delta_{12} \cdot m_2} \quad \text{și} \quad \mu_2 = \frac{a_2^{(2)}}{a_1^{(2)}} = \frac{1 - \omega_2^2 \delta_{11} \cdot m_1}{\omega_2^2 \cdot \delta_{12} \cdot m_2}. \quad (30.8)$$

Există deci două *moduri de vibrație* în care deplasările $y_1(t)$ și $y_2(t)$ sînt armonice sincrone. Unul este caracterizat de pulsația ω_1 , celălalt de pulsația ω_2 . Deoarece acestea depind numai de parametrii sistemului, se numesc *pulsații proprii*. Cea mai mică dintre acestea, ω_1 , se numește *pulsație proprie fundamentală*. Forma celor două moduri de vibrație (forma deformată a sistemului în mișcare armonică cu una din pulsațiile proprii) este dată de rapoartele μ_1 și μ_2 , valorile $a_1^{(1)}$ și $a_1^{(2)}$ putînd fi alese arbitrar.

Numărul modurilor proprii de vibrație este egal cu numărul gradelor de libertate ale sistemului.

Soluția generală a ecuațiilor mișcării (30.4) se poate scrie ca o combinație liniară a mișcărilor în cele două moduri proprii :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C_1 \sin(\omega_1 \cdot t + \theta_1) + C_2 \sin(\omega_2 \cdot t + \theta_2), \\ y_2(t) &= C_1 \cdot \mu_1 \sin(\omega_1 \cdot t + \theta_1) + C_2 \cdot \mu_2 \sin(\omega_2 \cdot t + \theta_2), \end{aligned} \quad (30.9)$$

de unde rezultă că, în general, vibrațiile libere nu sînt armonice.

Constantele de integrare și defazajele se obțin din condițiile inițiale ale mișcării (la $t = 0$).

APLICAȚIA 1

Să se determine modurile proprii de vibrație ale sistemului din figura 30.2, a.

Rezolvare

Se construiesc diagramele de momente încovoietoare (fig. 30.2, *b*, *c*) pentru bara încărcată ca în figurile 30.1, *d* și *e* și se calculează coeficienții de influență, utilizând metoda Mohr-Maxwell și regula lui Vereșceaghin. Se obține :

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{6E \cdot I_z}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{l^3}{8E \cdot I_z}; \quad \delta_{22} = \frac{5l^3}{24E \cdot I_z}.$$

Ecuția pulsațiilor proprii (30.7) se scrie :

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{m \cdot \omega^2 \cdot l^3}{3E \cdot I_z} & \frac{m \cdot \omega^2 \cdot l^3}{8E \cdot I_z} \\ \frac{m \cdot \omega^2 \cdot l^3}{4E \cdot I_z} & 1 - \frac{5m \cdot \omega^2 \cdot l^3}{24E \cdot I_z} \end{vmatrix} = 0,$$

sau

$$\begin{vmatrix} 1 - 8r & 3r \\ 6r & 1 - 5r \end{vmatrix} = 0,$$

unde s-a notat :

$$r = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot l^3}{24E \cdot I_z}.$$

Dezvoltînd determinantul, ecuația pulsațiilor proprii devine $22r^2 - 13r + 1 = 0$, avînd rădăcinile $r_1 = \frac{1}{11}$ și $r_2 = \frac{1}{2}$.

Rezultă pulsațiile proprii

$$\omega_1 = 1,477 \sqrt{\frac{E \cdot I_z}{m \cdot l^3}}; \quad \omega_2 = 3,464 \sqrt{\frac{E \cdot I_z}{m \cdot l^3}},$$

și coeficienții de distribuție

$$\mu_1 = \frac{a_2^{(1)}}{a_1^{(1)}} = \frac{8r_1 - 1}{3r_1} = -1; \quad \mu_2 = \frac{a_2^{(2)}}{a_1^{(2)}} = \frac{8r_2 - 1}{3r_2} = 2.$$

În figurile 30.2, *d* și *e* s-au reprezentat formele modurilor proprii de vibrații, alegînd $a_1^{(1)} = a_1^{(2)} = 1$.

Vibrațiile forțate. Dacă asupra masei m_2 a sistemului din figura 30.1, *a* acționează o forță armonică de amplitudine $F_0 = \text{const.}$ și pulsație p

$$F(t) = F_0 \sin pt, \quad (30.10)$$

în regim staționar, soluțiile ecuațiilor (30.3) au forma :

$$y_1(t) = Y_1 \sin pt; \quad y_2(t) = Y_2 \sin pt. \quad (30.11)$$

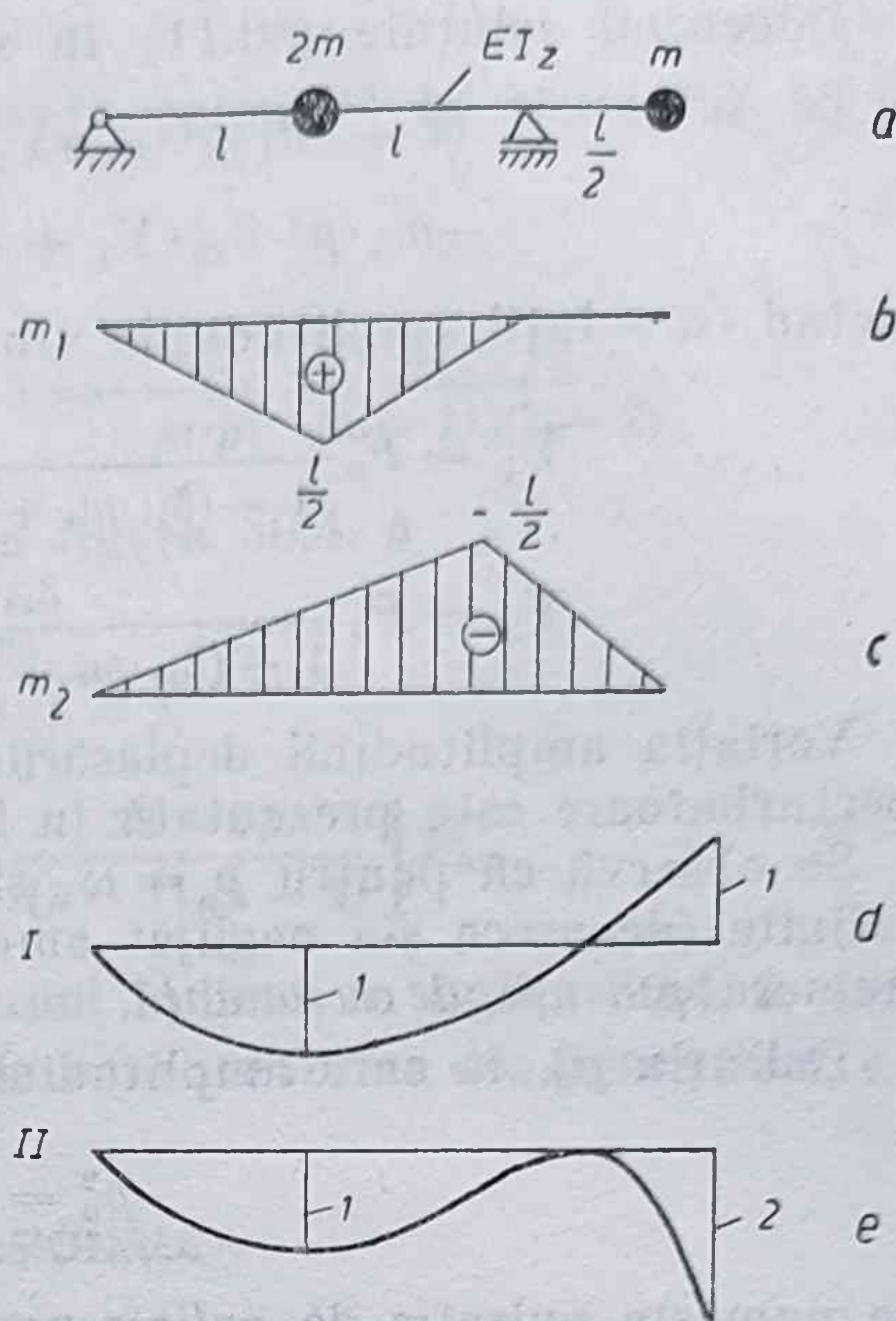


Fig. 30.2

Înlocuind soluțiile (30.11) în sistemul (30.3), rezultă sistemul algebric :

$$\begin{aligned} (1 - m_1 \cdot p^2 \cdot \delta_{11}) Y_1 - m_2 \cdot p^2 \cdot \delta_{12} \cdot Y_2 &= F_0 \cdot \delta_{12}, \\ -m_1 \cdot p^2 \cdot \delta_{22} \cdot Y_1 + (1 - m_2 \cdot p^2 \cdot \delta_{22}) Y_2 &= F_0 \cdot \delta_{22}, \end{aligned} \quad [(30.12)]$$

avînd ca soluții amplitudinile vibrațiilor forțate ale celor două mase :

$$\begin{aligned} Y_1 &= F_0 \frac{\delta_{12}}{1 - (\delta_{11} \cdot m_1 + \delta_{22} \cdot m_2) p^2 + m_1 \cdot m_2 (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2) p^4}, \\ Y_2 &= F_0 \frac{\delta_{22} - m_1 \cdot p^2 (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2)}{1 - (\delta_{11} \cdot m_1 + \delta_{22} \cdot m_2) p^2 + m_1 \cdot m_2 (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2) p^4}. \end{aligned} \quad (30.13)$$

Variația amplitudinii deplasărilor Y_1 și Y_2 în funcție de pulsația forței perturbatoare este prezentată în figura 30.3.

Se observă că pentru $p = \omega_1$ și $p = \omega_2$, amplitudinile deplasărilor devin infinite (deoarece s-a neglijat amortizarea). De aceea pulsațiile ω_1 și ω_2 se numesc *pulsații de rezonanță*.

Pulsația p_a , la care amplitudinea vibrațiilor masei m_2 este nulă

$$p_a^2 = \frac{\delta_{22}}{m_1 (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2)} \quad (30.14)$$

se numește pulsație de *antirezonanță*, comportarea sistemului fiind contrară celei de la rezonanță.

Cunoscînd amplitudinile deplasărilor maselor (30.13), se pot calcula amplitudinile forțelor de inerție corespunzătoare, deci ale forțelor ce acționează în regim dinamic asupra barei (fig. 30.1, c)

$$\Phi_1 = m_1 \cdot p^2 \cdot Y_1; \quad \Phi_2 = m_2 \cdot p^2 \cdot Y_2 + F_0 \quad (30.15)$$

și se poate construi diagrama momentelor încovoietoare dinamice. Pe baza acestei diagrame se pot calcula apoi amplitudinile eforturilor unitare dinamice din bară.

APLICAȚIA 2

Să se traseze diagrama momentelor încovoietoare dinamice la bara din figura 30.1, a, dacă $m_1 = 2m$, $m_2 = m$ și $F(t) = F_0 \sin p \cdot t$, unde $\omega_1 < p < p_a$.

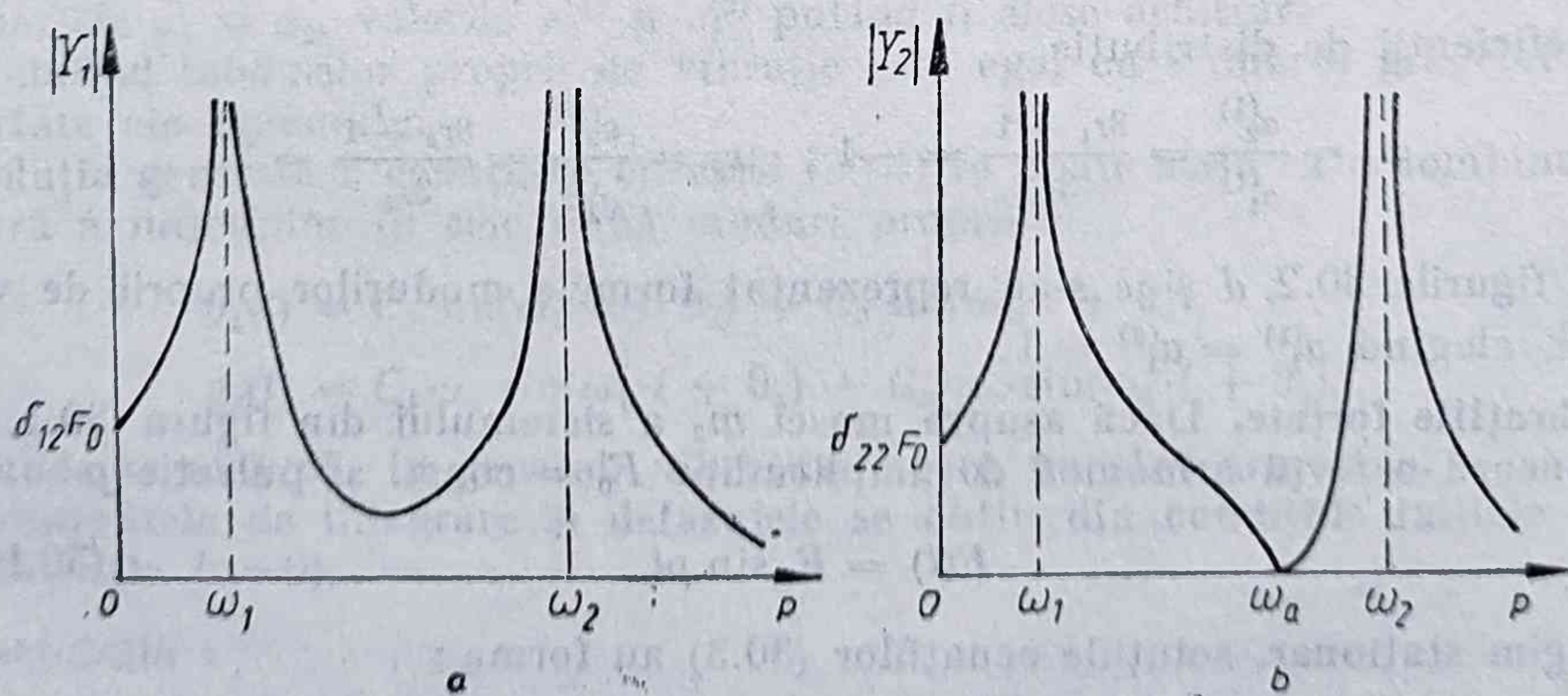


Fig. 30.3

Rezolvare

Utilizând valorile coeficienților de influență calculați la exemplul 30.1 și notînd $\frac{24E \cdot I_z}{m \cdot l^3 p^2} = \lambda$, din (30.13) rezultă :

$$Y_1 = -\frac{F_0}{m \cdot p^2} \frac{3\lambda}{(\lambda - 11)(\lambda - 2)}; \quad Y_2 = -\frac{F_0}{m \cdot p^2} \frac{22 - 5\lambda}{(\lambda - 11)(\lambda - 2)},$$

de unde se obțin amplitudinile forțelor din figura 30.4, b

$$\Phi_1 = 2m \cdot p^2 \cdot Y_1 = -\frac{6\lambda}{(\lambda - 11)(\lambda - 2)} F_0,$$

$$\Phi_2 = F_0 + m \cdot p^2 \cdot Y_2 = \left[1 - \frac{22 - 5\lambda}{(\lambda - 11)(\lambda - 2)} \right] F_0.$$

Pentru $2 < \lambda < 4,4$ forțele au chiar semnul indicat în figura 30.4, b, iar diagrama amplitudinilor momentelor încovoietoare are forma din figura 30.4, c.

30.1.2. VIBRAȚII TORSIONALE

Se consideră sistemul din figura 30.5, a, format din discurile cu momente de inerție masice J_1 și J_2 , și arborii cu constante elastice la răsucire k_1 și k_2 , acționat de cuplul $\mathcal{M}(t)$.

Sistemul este astfel rezemat încît poate efectua numai vibrații în jurul axei longitudinale.

Se notează $\varphi_1(t)$ și $\varphi_2(t)$ rotirile celor două discuri.

Pentru a obține ecuațiile mișcării, se izolează fiecare disc, aplicîndu-i cuplurile de legătură elastice și cuplurile de inerție (fig. 30.5, b). Se scrie

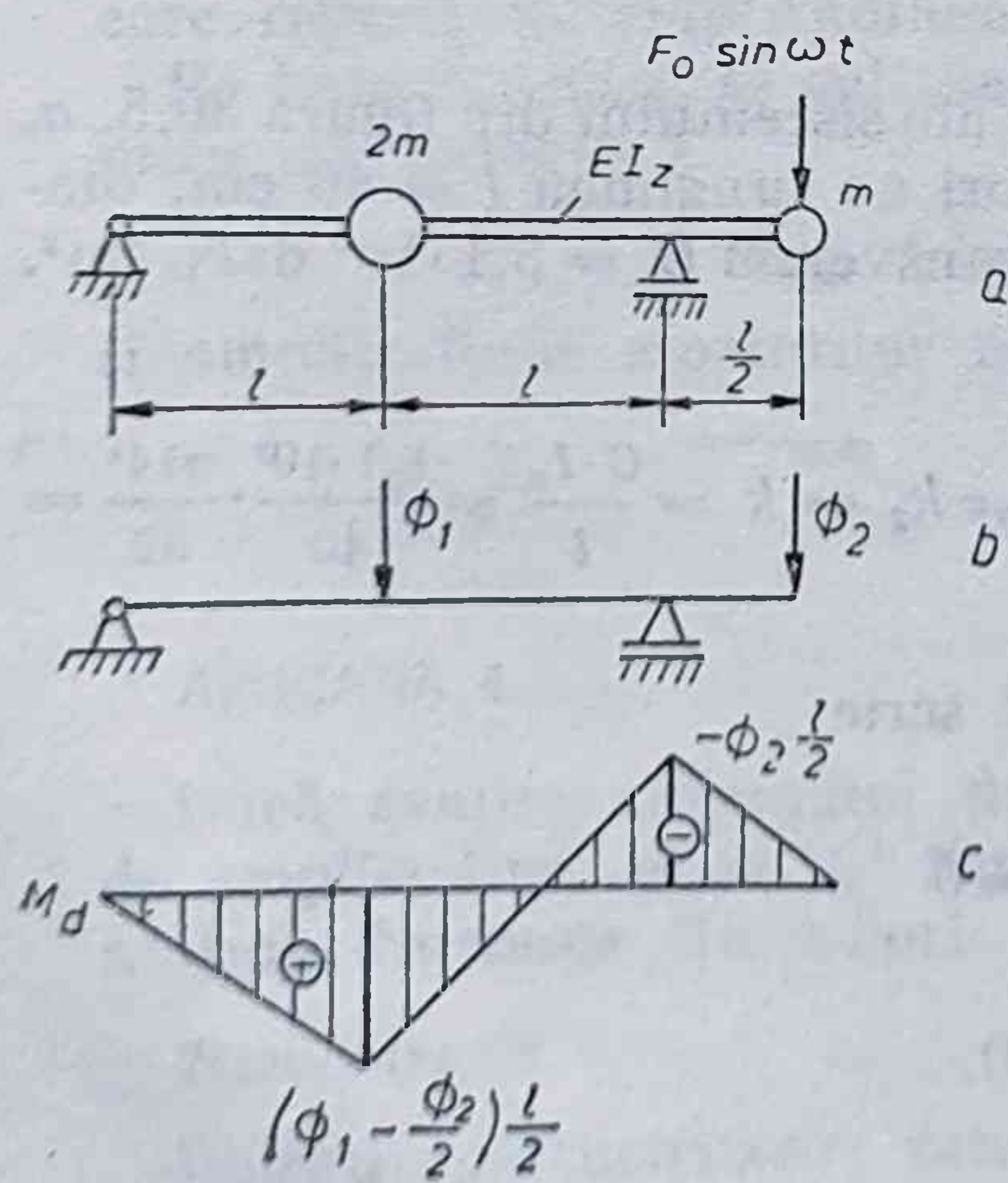


Fig. 30.4

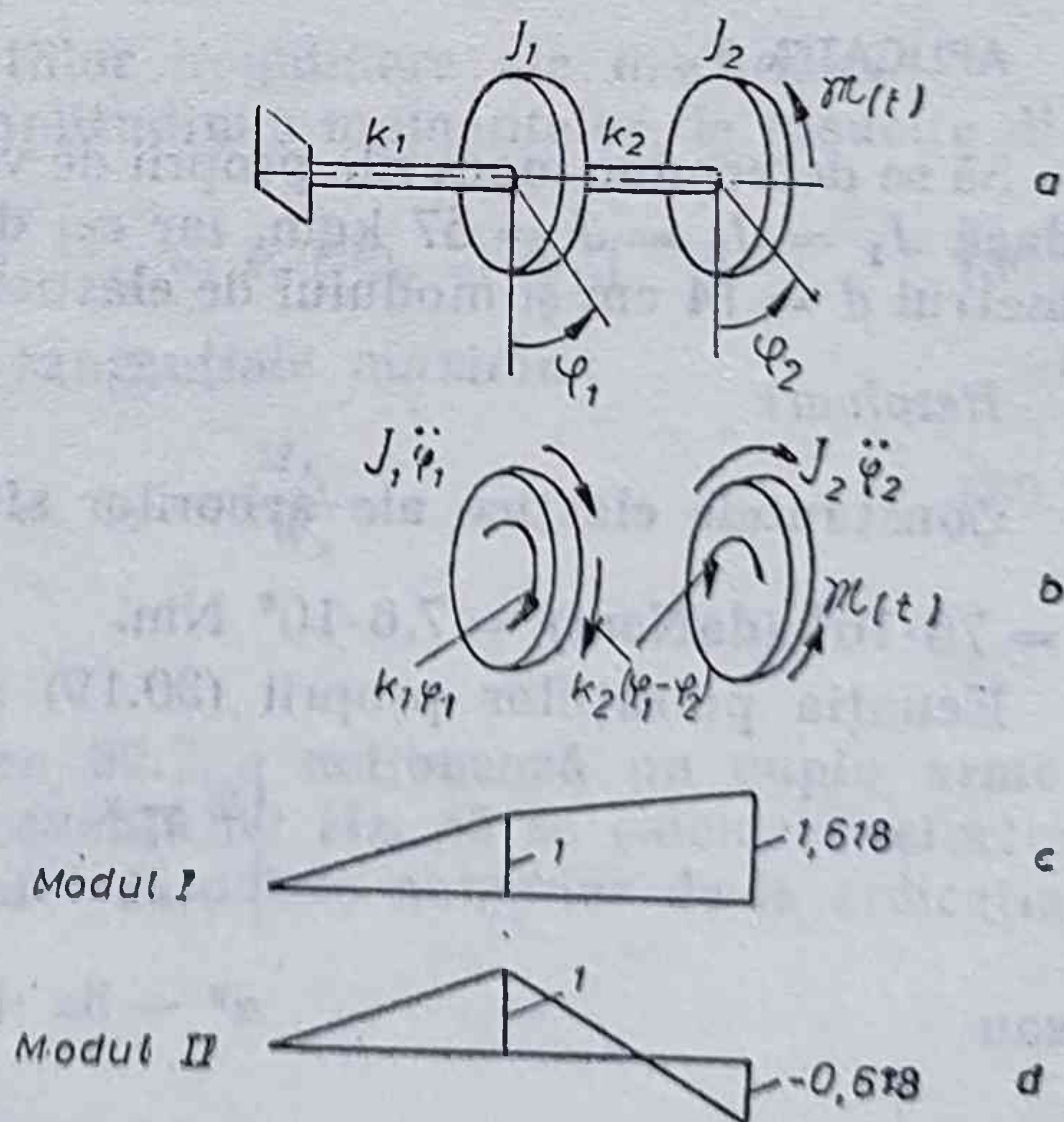


Fig. 30.5

apoi ecuația de echilibru dinamic, conform principiului lui d'Alembert, pentru fiecare disc în parte. Rezultă sistemul :

$$\begin{aligned} J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + k_1 \cdot \varphi_1 + k_2(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \\ J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - k_2(\varphi_1 - \varphi_2) &= \mathcal{M}(t), \end{aligned}$$

care se mai scrie sub forma :

$$\begin{aligned} J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + (k_1 + k_2)\varphi_1 - k_2 \cdot \varphi_2 &= 0, \\ J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - k_2 \cdot \varphi_1 + k_2 \cdot \varphi_2 &= \mathcal{M}(t). \end{aligned} \quad (30.16)$$

Vibrațiile libere. Pentru determinarea modurilor proprii de vibrație, se înlocuiește $\mathcal{M}(t) = 0$ în ecuațiile (30.16) și se caută soluții de forma :

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= a_1 \sin \omega t, \\ \varphi_2(t) &= a_2 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (30.17)$$

Rezultă sistemul algebric omogen

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 - \omega^2 \cdot J_1)a_1 - k_2 \cdot a_2 &= 0, \\ -k_2 \cdot a_1 + (k_2 - \omega^2 \cdot J_2)a_2 &= 0, \end{aligned} \quad (30.18)$$

care are soluții nebanale dacă

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 \cdot J_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 \cdot J_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (30.19)$$

Rezolvînd ecuația (30.19) se obțin pulsațiile proprii ω_1 și ω_2 . Forma modurilor proprii de vibrație este dată de coeficienții de distribuție

$$\mu_1 = \frac{a_2^{(1)}}{a_1^{(1)}} = \frac{k_1 + k_2 - \omega_1^2 \cdot J_1}{k_2} \quad \text{și} \quad \mu_2 = \frac{a_2^{(2)}}{a_1^{(2)}} = \frac{k_1 + k_2 - \omega_2^2 \cdot J_2}{k_2}. \quad (30.20)$$

APLICAȚIA 3

Să se determine modurile proprii de vibrație ale sistemului din figura 30.5, a, dacă $J_1 = J_2 = J = 57 \text{ kgm}$, iar cei doi arbori au lungimea $l = 40 \text{ cm}$, diametrul $d = 14 \text{ cm}$ și modulul de elasticitate transversal $G = 8,1 \cdot 10^5 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare

Constantele elastice ale arborilor sînt $k_1 = k_2 = k = \frac{G \cdot I_p}{l} = \frac{8,1 \cdot 10^5 \cdot \pi 14^4}{40 \cdot 32} = 76 \cdot 10^6 \text{ (daNcm)} = 7,6 \cdot 10^6 \text{ Nm}$.

Ecuația pulsațiilor proprii (30.19) se mai scrie

$$\begin{vmatrix} 2 - \alpha & -1 \\ -1 & 1 - \alpha \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0,$$

unde

$$\alpha = \omega^2 \frac{J}{k}.$$

Soluțiile ecuației caracteristice sînt :

$$\alpha_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,382 ; \quad \alpha_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2,618.$$

Rezultă pulsațiile proprii

$$\omega_1 = 0,616 \sqrt{\frac{k}{J}} = 0,616 \sqrt{\frac{7,6 \cdot 10^6}{57}} = 226 \text{ rad/s},$$

$$\omega_2 = 1,6 \sqrt{\frac{k}{J}} = 590 \text{ rad/s}.$$

Coeficienții de distribuție sînt :

$$\mu_1 = \frac{2 - \alpha_1}{1} = 1,618 ; \quad \mu_2 = \frac{2 - \alpha_2}{1} = -0,618.$$

Formele modurilor proprii de vibrație sînt prezentate în figurile 30.5, *c* și *d*.

Vibrațiile forțate. Dacă asupra discului J_2 acționează un cuplu armonic

$$\mathcal{M}(t) = \mathcal{M}_0 \sin pt, \quad (30.21)$$

soluțiile staționare ale sistemului (30.16) se aleg de forma

$$\varphi_1(t) = \Phi_1 \sin pt ; \quad \varphi_2(t) = \Phi_2 \sin pt. \quad (30.22)$$

Înlocuind (30.21) și (30.22) în (30.16), rezultă sistemul algebric

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 - J_1 \cdot p^2) \Phi_1 - k_2 \cdot \Phi_2 &= 0, \\ -k_2 \cdot \Phi_1 + (k_2 - J_2 \cdot p^2) \Phi_2 &= \mathcal{M}_0, \end{aligned} \quad (30.23)$$

cu soluțiile :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{k_2 \cdot \mathcal{M}_0}{(k_1 + k_2 - J_1 \cdot p^2)(k_2 - J_2 \cdot p^2) - k_2^2}, \\ \Phi_2 &= \frac{(k_1 + k_2 - J_1 \cdot p^2) \mathcal{M}_0}{(k_1 + k_2 - J_1 \cdot p^2)(k_2 - J_2 \cdot p^2) - k_2^2}, \end{aligned} \quad (30.24)$$

care reprezintă amplitudinile vibrațiilor unghiulare ale discurilor.

Pe baza acestora se calculează amplitudinile momentelor de răsucire dinamice din arbori :

$$M_{t_1} = k_1 | \Phi_1 | ; \quad M_{t_2} = k_2 | \Phi_2 - \Phi_1 | \quad (30.25)$$

și amplitudinile eforturilor unitare tangențiale maxime :

$$\tau_1 = \frac{M_{t_1}}{W_p}, \quad \tau_2 = \frac{M_{t_2}}{W_p}. \quad (30.26)$$

APLICAȚIA 4

Dacă asupra sistemului din figura 30.5, *a* acționează un cuplu armonic de amplitudine $\mathcal{M}_0 = 10^4 \text{ Nm}$ și frecvență 50 Hz, să se calculeze eforturile unitare dinamice din arbori. Se consideră datele numerice de la aplicația 3.

Rezolvare

Pulsația perturbatoare este :

$$p = 2 \cdot \pi \cdot \nu = 2 \cdot \pi \cdot 50 = 314 \text{ rad/s}.$$

Din relațiile (30.24) se obține :

$$\Phi_1 = -0,001955 \text{ rad} ; \Phi_2 = -0,00248 \text{ rad},$$

apoi din relația (30.25)

$$M_{t_1} = 7,6 \cdot 10^6 \cdot 1\,955 \cdot 10^{-6} = 14\,850 \text{ Nm},$$

$$M_{t_2} = k(\Phi_2 - \Phi_1) = 7,6 \cdot 10^6 (2\,480 - 1\,955) \cdot 10^{-6} = 3\,990 \text{ Nm},$$

deci, amplitudinile eforturilor unitare tangențiale maxime sînt :

$$\tau_1 = \frac{M_{t_1}}{W_p} = \frac{148\,500}{535} = 278 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} ; \quad \tau_2 = \frac{M_{t_2}}{W_p} = \frac{39\,900}{535} = 74,6 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

30.2. VIBRAȚIILE BARELOR DREPTE

Sistemele reale au masa distribuită. Configurația sistemului la un moment dat este determinată numai dacă se cunoaște poziția fiecărui punct. Rezultă că barele sînt sisteme cu număr infinit de grade de libertate. În cele ce urmează se studiază vibrațiile libere ale barelor drepte.

30.2.1. VIBRAȚII TRANSVERSALE

Se consideră o bară dreaptă, cu secțiune constantă, care execută vibrații în planul xOy (fig. 30.6). Ecuația fibrei medii deformate (22.27) are forma :

$$E \cdot I_z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -M(x, t), \quad (30.27)$$

unde $M(x, t)$ este momentul încovoietor în secțiunea x , la momentul t .

Derivînd ecuația (30.27) de două ori în raport cu x și utilizînd relațiile diferențiale între eforturi (19.1) și (19.2) sub forma

$$\frac{\partial M}{\partial x} = T(x, t), \quad (30.28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -q(x, t), \quad (30.29)$$

se obține : $E \cdot I_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} =$

$$= -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = q(x, t), \quad (30.30)$$

unde $q(x, t)$ este sarcina distribuită pe unitatea de lungime a grinzii.

În cazul vibrațiilor libere,

$$q(x, t) = -\rho \cdot A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (30.31)$$

unde ρA este masa pe unitatea de lungime a grinzii.

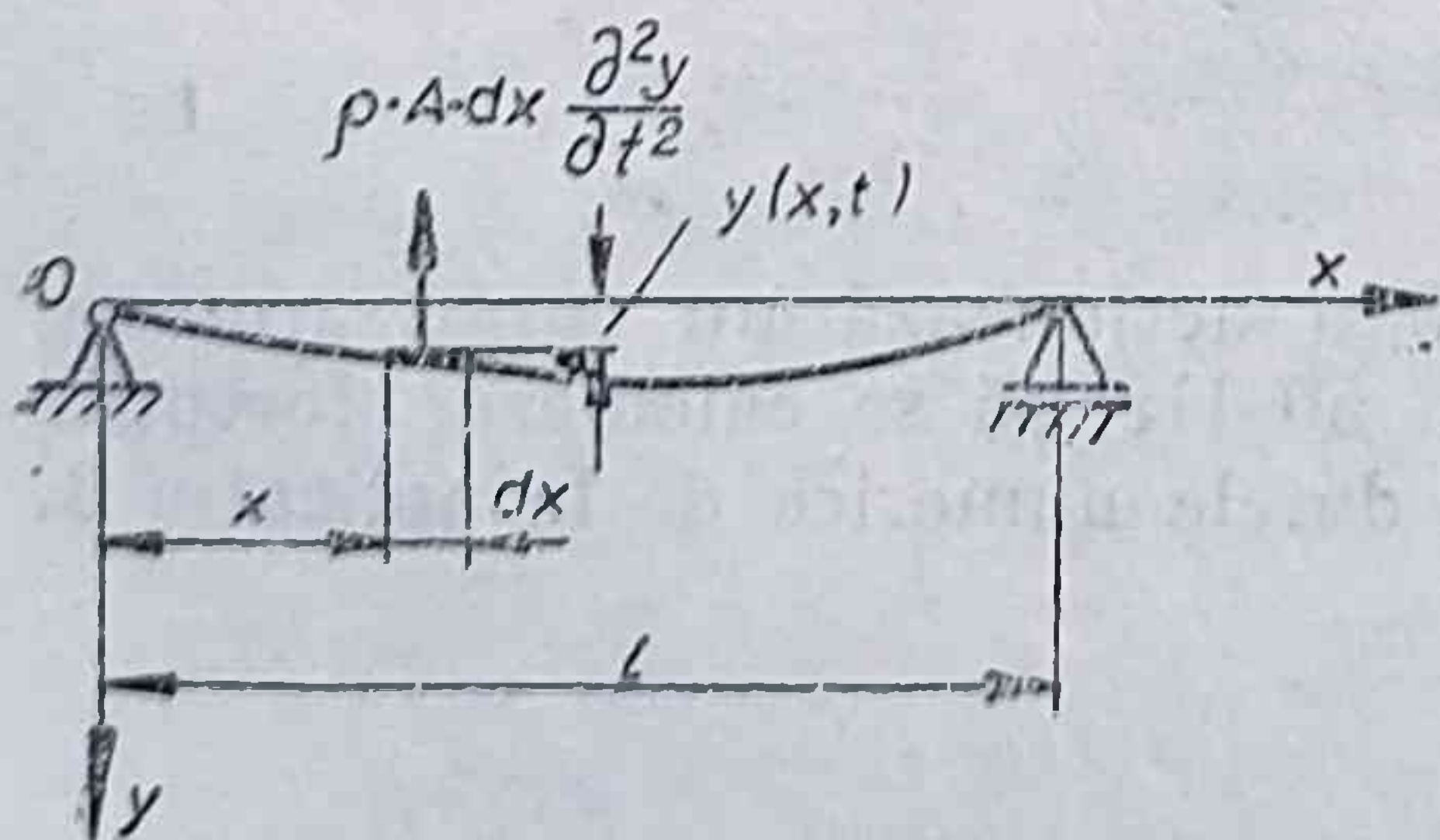


Fig. 30.6

În cazul vibrațiilor forțate,

$$q(x,t) = -\rho \cdot A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + q_0(x,t). \quad (30.32)$$

Funcția $y(x,t)$ trebuie să satisfacă atât condițiile inițiale, la $t = 0$:

$$y(0,t) = f(x); \quad \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad (30.33)$$

cît și condițiile la limită determinate de modul de rezemare. Pentru o secțiune oarecare $x = x_0$, cele mai uzuale condiții la limită sînt:

a) încastrare rigidă:

$$\begin{aligned} & - \text{săgeata este nulă, } y(x_0,t) = 0; \\ & - \text{rotirea este nulă, } \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{x=x_0} = 0; \end{aligned} \quad (30.34, a)$$

b) reazem simplu rigid (articulație):

$$\begin{aligned} & - \text{săgeata este nulă, } y(x_0,t) = 0; \\ & - \text{momentul încovoietor } M(x_0,t) = 0, \text{ deci } \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=x_0} = 0; \end{aligned} \quad (30.34, b)$$

c) capăt liber:

$$\begin{aligned} & - \text{forța tăietoare } T(x_0,t) \text{ este nulă, } \left. \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right|_{x=x_0} = 0; \\ & - \text{momentul încovoietor } M(x_0,t) \text{ este nul, } \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=x_0} = 0. \end{aligned} \quad (30.34, c)$$

Pentru studiul modurilor proprii de vibrație, se consideră ecuația diferențială a vibrațiilor libere

$$E \cdot I_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\rho \cdot A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

sau

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{E \cdot I_z} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (30.35)$$

Se caută să se stabilească în ce condiții toate punctele grinzii execută mișcări armonice sincrone, descrise de legea

$$y(x,t) = v(x) \sin(\omega \cdot t + \theta). \quad (30.36)$$

Înlocuind (30.36) în (30.35), rezultă:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{\rho \cdot A \cdot \omega^2}{E \cdot I_z} v = 0. \quad (30.37)$$

$$\text{Cu notația } \alpha^4 = \frac{\rho \cdot A \cdot \omega^2}{E \cdot I_z}, \quad (30.38)$$

ecuația (30.37) devine

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - \alpha^4 \cdot v = 0, \quad (30.39)$$

avînd soluția generală :

$$v(x) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 \operatorname{sh} \alpha x + C_4 \operatorname{ch} \alpha x, \quad (30.40, a)$$

unde constantele de integrare C_1, \dots, C_4 se determină pe baza condițiilor la limită ale problemei.

Primele trei derivate ale expresiei (30.40, a) se scriu

$$v'(x) = \alpha(C_1 \cos \alpha x - C_2 \sin \alpha x + C_3 \operatorname{ch} \alpha x + C_4 \operatorname{sh} \alpha x), \quad (30.40, b)$$

$$v''(x) = \alpha^2(-C_1 \sin \alpha x - C_2 \cos \alpha x + C_3 \operatorname{sh} \alpha x + C_4 \operatorname{ch} \alpha x), \quad (30.40, c)$$

$$v'''(x) = \alpha^3(-C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x + C_3 \operatorname{ch} \alpha x + C_4 \operatorname{sh} \alpha x). \quad (30.40, d)$$

Ca exemplu, se consideră bara simplu rezemată la capetele din figura 30.6. Condițiile la limită se scriu sub forma :

$$x = 0; \quad v(0) = 0; \quad v''(0) = 0; \quad (30.41, a)$$

$$x = l; \quad v(l) = 0; \quad v''(l) = 0. \quad (30.41, b)$$

Introducînd condițiile (30.41, a) în soluția (30.40, a) și în derivata a doua (30.40, c) rezultă :

$$C_2 + C_4 = 0 \text{ și } -C_2 + C_4 = 0,$$

deci $C_2 = C_4 = 0$.

Introducînd condițiile (30.41, b) în (30.40, a și c) rezultă

$$C_1 \sin \alpha l + C_3 \operatorname{sh} \alpha l = 0,$$

$$-C_1 \sin \alpha l + C_3 \operatorname{sh} \alpha l = 0,$$

deci $C_1 \sin \alpha l = 0$ și $C_3 \operatorname{sh} \alpha l = 0$.

Deoarece $\operatorname{sh} \alpha l \neq 0$ pentru $\alpha \neq 0$, rezultă $C_3 = 0$ și

$$\sin \alpha l = 0. \quad (30.42)$$

Ecuția (30.42) are o infinitate de rădăcini

$$\alpha_n \cdot l = n \cdot \pi, \quad (30.43)$$

deci bara poate executa vibrații armonice sincrone la pulsațiile

$$\omega_n = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{E \cdot I_z}{\rho \cdot A}} = \frac{\beta_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{E \cdot I_z}{\rho \cdot A}} = n^2 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E \cdot I_z}{\rho \cdot A}}, \quad (30.44)$$

numite pulsații proprii.

Forma deformată a barei la aceste pulsații se obține înlocuind $C_2 = C_3 = C_4 = 0$ și (30.43) în (30.40, a). Rezultă funcția proprie

$$v(x) = C_1 \sin \alpha_n x = C_1 \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}, \quad (30.45)$$

unde constanta C_1 are o valoare arbitrară. Funcția (30.45) definește forma modurilor proprii de vibrație.

APLICAȚIA 5

Să se determine modurile proprii de vibrație transversală la o bară de lungime l și secțiune constantă, încastrată la ambele capete.

Rezolvare

Condițiile la limită în acest caz se scriu :

$$x = 0 ; \quad v(0) = 0 ; \quad v'(0) = 0 ;$$

$$x = l ; \quad v(l) = 0 ; \quad v'(l) = 0.$$

Pentru primele două condiții, ecuațiile (30.40, a și b) dau

$$C_2 + C_4 = 0 ; \quad C_1 + C_3 = 0.$$

Înlocuind $C_4 = -C_2$ și $C_3 = -C_1$ în ecuațiile (30.40, a și b), din ultimela două condiții rezultă sistemul algebric omogen :

$$C_1(\sin \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l) + C_2(\cos \alpha l - \operatorname{ch} \alpha l) = 0,$$

$$C_1(\cos \alpha l - \operatorname{ch} \alpha l) + C_2(-\sin \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l) = 0.$$

Condiția de a avea soluții nenule se scrie :

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l & \cos \alpha l - \operatorname{ch} \alpha l \\ \cos \alpha l - \operatorname{ch} \alpha l & -(\sin \alpha l + \operatorname{sh} \alpha l) \end{vmatrix} = 0,$$

care se aduce la forma : $\cos \alpha l \operatorname{ch} \alpha l = 1$.

Ecuația de mai sus are ca soluții (v. fig. 30.7).

$$\alpha_1 \cdot l = \beta_1 = 4,730 ; \quad \alpha_2 \cdot l = \beta_2 = 7,8532 ; \quad \alpha_n \cdot l = \beta_n = \frac{2n+1}{2} \pi \quad (n > 2),$$

care introduse în relația (30.44) permit calculul pulsațiilor proprii.

Funcțiile proprii au expresia :

$$v(x) = C_1 \left[\sin \alpha x - \operatorname{sh} \alpha x - \frac{\sin \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l}{\cos \alpha l - \operatorname{ch} \alpha l} (\cos \alpha x - \operatorname{ch} \alpha x) \right].$$

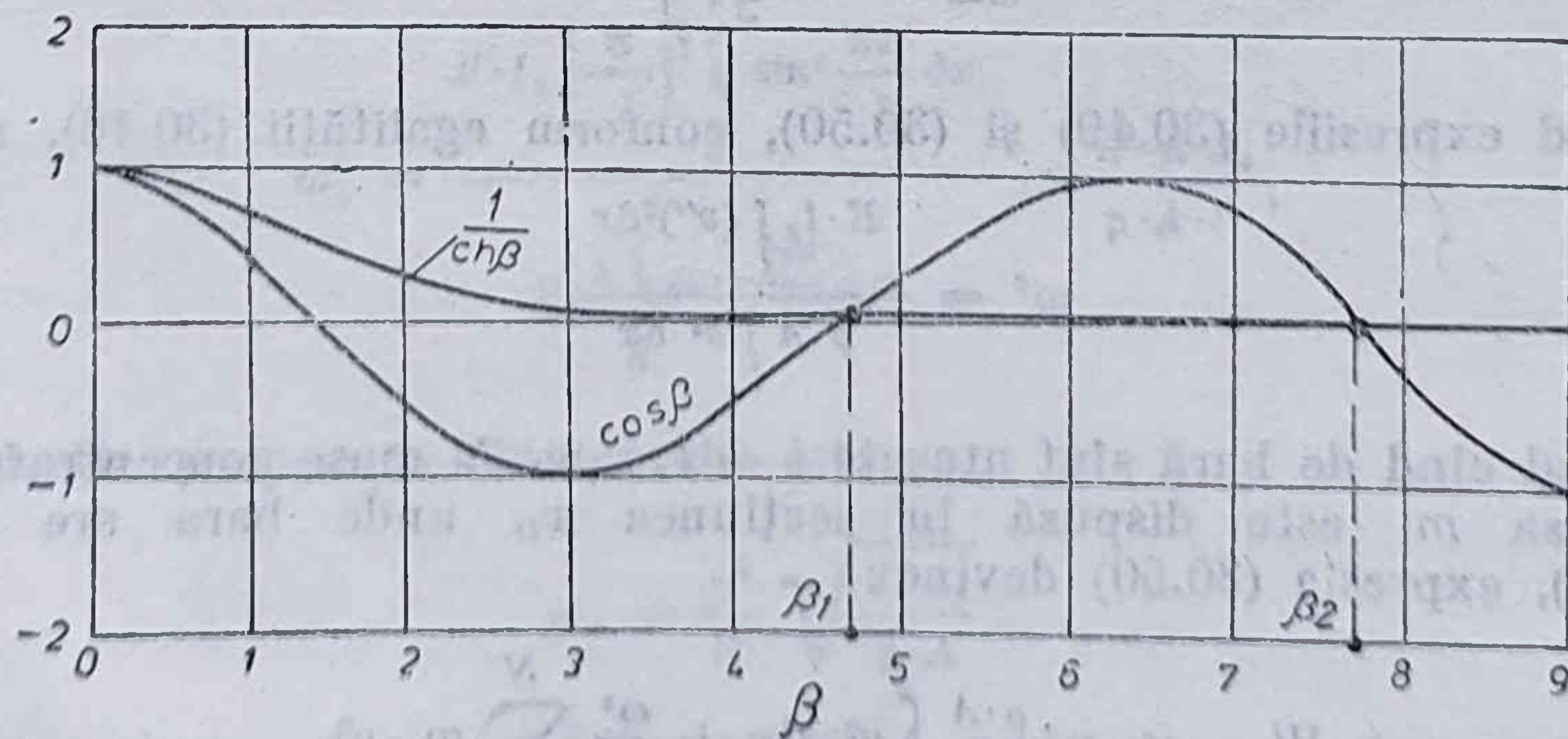


Fig. 30.7

30.2.2. METODA LUI RAYLEIGH

La un sistem conservativ (fără disipare de energie și fără forțe „urmăritoare”), care execută vibrații libere, energia totală este constantă. Energia cinetică maximă (la trecerea prin poziția de echilibru static) este egală cu energia potențială maximă (în poziția de elongație maximă):

$$W_{e_{max}} = W_{p_{max}}. \quad (30.46)$$

Considerînd că sistemul elastic vibrează în modul propriu fundamental, relația (30.46) permite calculul pulsației proprii fundamentale.

Energia de deformare la încovoiere pentru bare drepte cu secțiune constantă se scrie sub forma:

$$W_p = \int_l \frac{M^2 \cdot dx}{2E \cdot I_z} = \int_l \frac{(E \cdot I_z)^2}{2E \cdot I_z} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{E \cdot I_z}{2} \int_l (y'')^2 dx, \quad (30.47)$$

unde s-a utilizat relația (30.27).

Energia cinetică are expresia:

$$W_c = \int_l \frac{\rho \cdot A}{2} \dot{y}^2 \cdot dx = \frac{\rho \cdot A}{2} \int_l \dot{y}^2 \cdot dx. \quad (30.48)$$

În cazul vibrației într-un mod propriu de vibrație, toate punctele barei execută mișcări armonice sincrone. Înlocuind (30.36) în expresiile energiilor (30.47) și (30.48) se obține:

$$W_p = \frac{E \cdot I_z}{2} \sin^2(\omega \cdot t + \theta) \int_l (v'')^2 dx,$$

$$W_c = \frac{\rho \cdot A \cdot p^2}{2} \cos^2(\omega \cdot t + \theta) \int_l v^2 \cdot dx,$$

de unde rezultă valorile maxime ale celor două energii:

$$W_{p_{max}} = \frac{E \cdot I_z}{2} \int_l (v'')^2 dx, \quad (30.49)$$

$$W_{c_{max}} = \omega^2 \frac{\rho \cdot A}{2} \int_l v^2 \cdot dx. \quad (30.50)$$

Egalînd expresiile (30.49) și (30.50), conform egalității (30.46), rezultă:

$$\omega^2 = \frac{E \cdot I_z \int_l (v'')^2 dx}{\rho \cdot A \int_l v^2 \cdot dx}. \quad (30.51)$$

În cazul cînd de bară sînt atașate $i = 1, \dots, N$ mase concentrate, astfel încît masa m_i este dispusă în secțiunea x_i , unde bara are săgeata $v_i = v(x_i)$, expresia (30.50) devine:

$$W_{c_{max}} = \omega^2 \frac{\rho \cdot A}{2} \int_l v^2 \cdot dx + \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot v_i^2,$$

iar pulsația proprie fundamentală se calculează cu relația :

$$\omega^2 = \frac{E \cdot I_z \int_l (v'')^2 dx}{\rho \cdot A \int_l v^2 dx + \sum_{i=1}^N m_i \cdot v_i^2} \quad (30.52)$$

Dacă în formulele (30.51) și (30.52) funcția $v(x)$ este deformată dinamică reală a sistemului, se obține valoarea *exactă* a pulsației proprii fundamentale.

Rayleigh a arătat că alegând o funcție $v(x)$ *aproximativă*, dar apropiată de cea reală și îndeplinind condițiile la limită geometrice, relațiile (30.51) și (30.52) dau o valoare aproximativă a pulsației proprii fundamentale, apropiată de cea exactă și totdeauna *mai mare*.

Acest rezultat se explică prin aceea că orice deviație de la deformată dinamică reală necesită legături adiționale, condiție care implică rigiditate mai mare și deci pulsație proprie mai mare. În general, utilizarea deformației statice a barei cu aceeași rezemare conduce la o valoare suficient de precisă a pulsației proprii.

APLICAȚIA 6

Să se calculeze pulsația proprie fundamentală a vibrațiilor transversale ale unei bare de secțiune constantă, simplu rezemată la capete, alegând o deformată de forma :

$$v(x) = v_0 \sin \frac{\pi \cdot x}{l} \quad (30.53)$$

Rezolvare

Se calculează derivata a doua a funcției (30.53) :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = - \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 v_0 \sin \frac{\pi \cdot x}{l} \quad (30.54)$$

Înlocuind (30.53) și (30.54) în expresia (30.51), se obține :

$$\omega_1^2 = \frac{E \cdot I_z \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx}{\rho \cdot A \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx} = \frac{\pi^4 \cdot E \cdot I_z}{\rho \cdot A \cdot l^4};$$

deci, pulsația proprie fundamentală este :

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E \cdot I_z}{\rho \cdot A}}.$$

Întrucât funcția aleasă (30.53) este chiar cea reală, s-a obținut valoarea exactă a pulsației ω_1 .

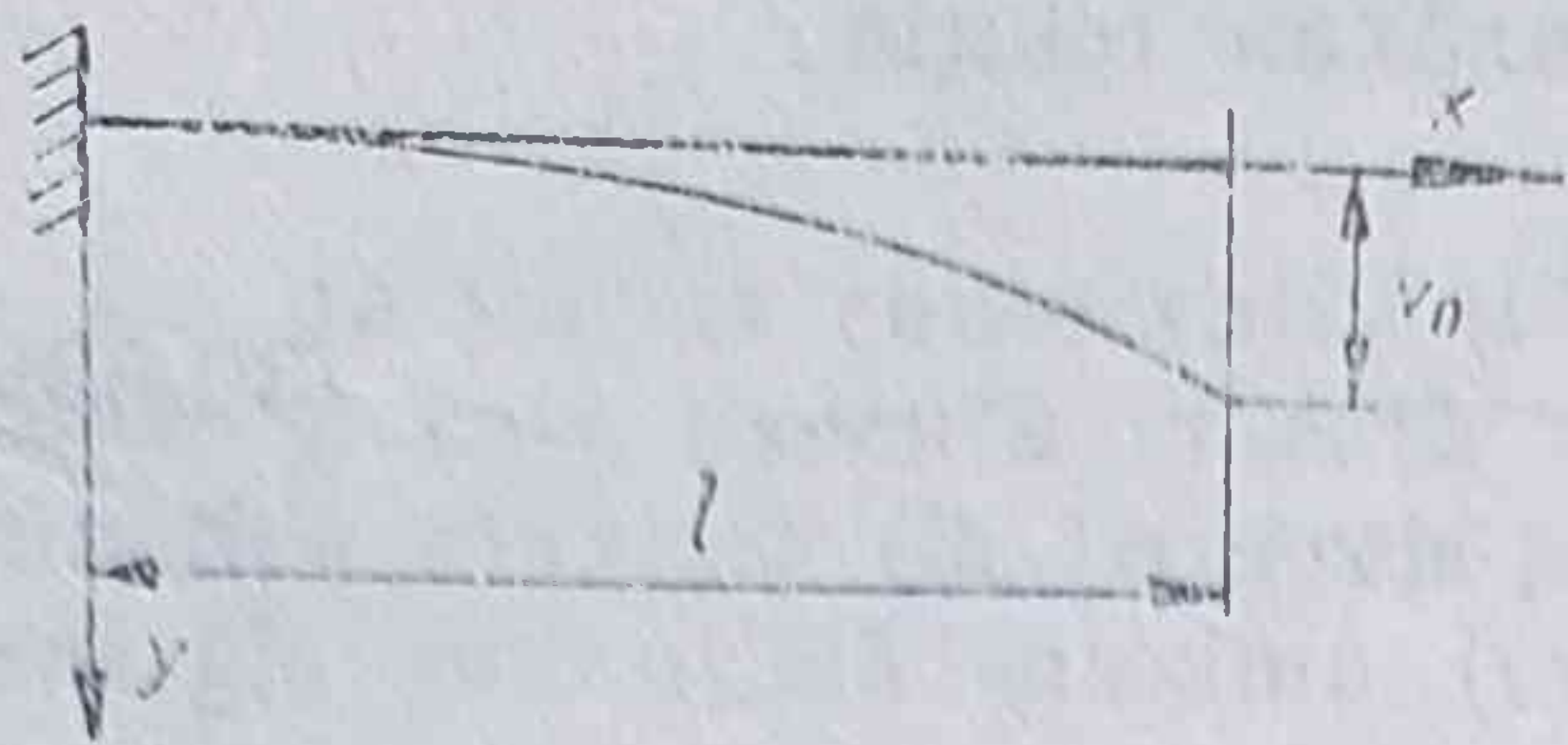


Fig. 30.8

APLICAȚIA 7

Să se calculeze pulsație proprie fundamentală a vibrațiilor transversale ale barei în consolă din figura 30.8.

Rezolvare

Dacă se alege o funcție de forma :

$$v(x) = v_0 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right), \quad (30.55)$$

atunci

$$v''(x) = \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 v_0 \cos \frac{\pi x}{2l},$$

și înlocuind în (30.51), se obține :

$$\omega_1^2 = \frac{E \cdot I_z \left(\frac{\pi}{2l} \right)^4 v_0^2 \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{2l} dx}{\rho \cdot A \cdot v_0^2 \int_0^l \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)^2 dx} = \frac{E \cdot I_z \frac{\pi^4}{16 l^4} \cdot \frac{l}{2}}{\rho \cdot A \cdot l \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right)} = \frac{13,424}{l^4} \frac{E \cdot I_z}{\rho \cdot A},$$

deci :

$$\omega_1 = \frac{3,6638}{l^2} \sqrt{\frac{E \cdot I_z}{\rho \cdot A}}.$$

Față de valoarea exactă $\frac{1,875^2}{l^2} \sqrt{\frac{E \cdot I_z}{\rho \cdot A}}$, eroarea este de 4,2%.

Dacă $v(x)$ se alege deformată statică a unei grinzi în consolă, cu o forță aplicată la capătul liber,

$$v(x) = \frac{1}{2} v_0 \left[3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right], \quad (30.56)$$

se obține

$$\omega_1^2 = \frac{E \cdot I_z \frac{9}{l^4} v_0^2 \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 dx}{\rho \cdot A \frac{1}{4} v_0^2 \int_0^l \left[3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right] dx} = \frac{E \cdot I_z \frac{9}{l^4} \frac{l}{3}}{\rho \cdot A \frac{33}{140} l} = \frac{12,727}{l^4} \frac{E \cdot I_z}{\rho \cdot A}, \quad (30.57)$$

deci :

$$\omega_1 = \frac{3,5675}{l^2} \sqrt{\frac{E \cdot I_z}{\rho \cdot A}},$$

cu o eroare de numai 1,47% față de valoarea exactă.

Comparînd relația (30.57) cu formula pulsației proprii a sistemului cu un grad de libertate, rezultă că, în cazul în care se admite funcția (30.56) pentru deformată sistemului, bara cu masa distribuită este echivalentă cu o bară de greutate neglijabilă avînd o masă $\frac{33}{140} \rho \cdot A \cdot l = 0,236 \rho \cdot A \cdot l$ concentrată la capătul liber.

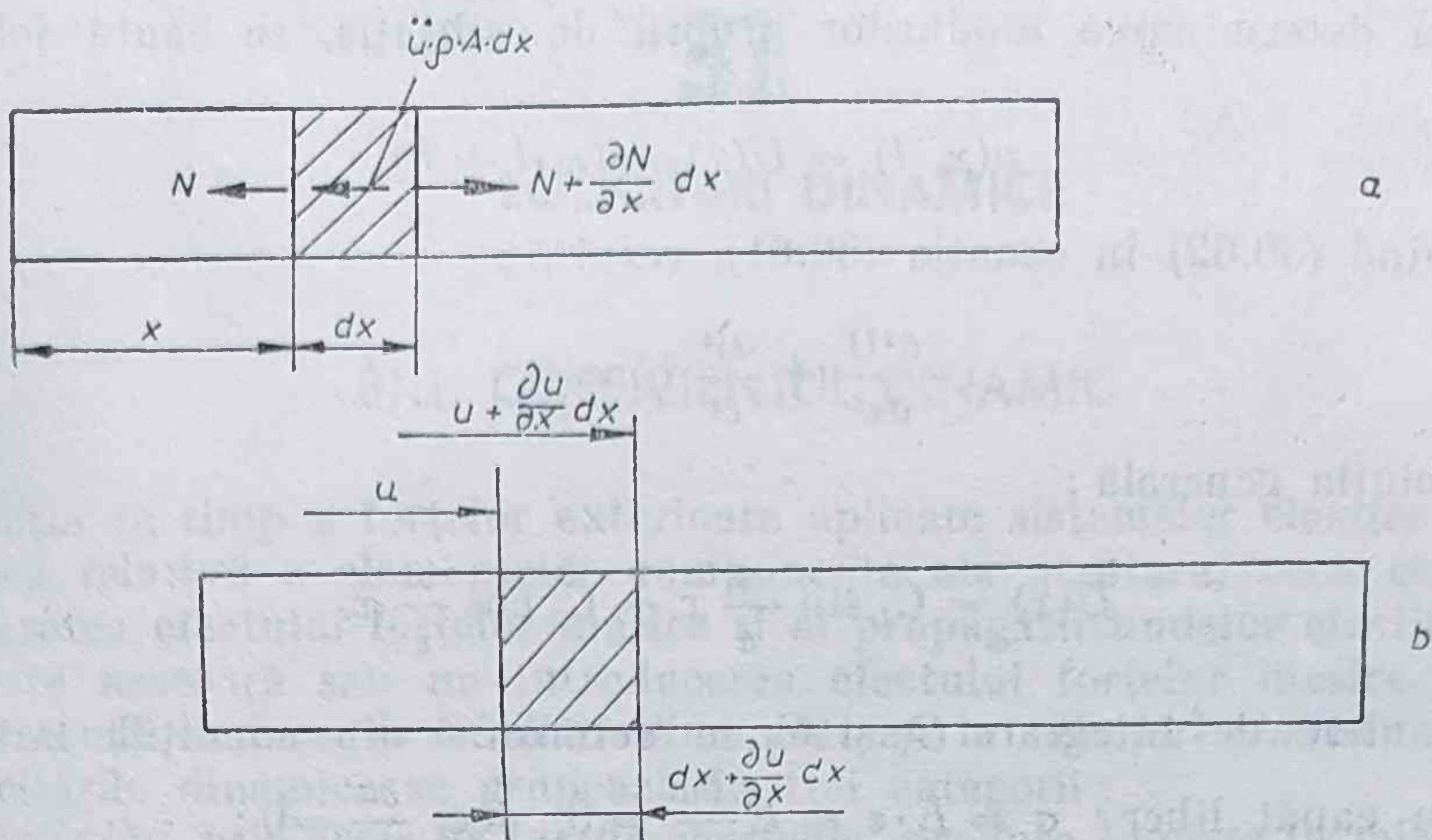


Fig. 30.9

30.2.3. VIBRAȚII LONGITUDINALE

Fie o bară de secțiune constantă, avînd dimensiunile transversale mici în comparație cu lungimea. Sub acțiunea unor solicitări axiale se produc deplasări $u(x, t)$ în lungul barei, care sînt funcție de poziția x și de timpul t .

Se consideră un element de bară de lungime dx (fig. 30.9). Dacă secțiunea x are o deplasare u , atunci secțiunea $x + dx$ va avea o deplasare $u + (\partial u / \partial x) dx$. Rezultă că, în noua poziție, elementul dx și-a modificat lungimea cu $(\partial u / \partial x) dx$,

deci deformația specifică este $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$. Aplicînd legea lui Hooke

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{E \cdot A}$$

și derivînd în raport cu x , se obține:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{E \cdot A} \frac{\partial N}{\partial x} \quad (30.58)$$

Ecuatia de echilibru pe direcția x se scrie utilizînd principiul lui d'Alembert:

$$N + \frac{\partial N}{\partial x} dx - N - \rho \cdot A \cdot dx \cdot \ddot{u} = 0,$$

de unde rezultă: $\frac{\partial N}{\partial x} = \rho \cdot A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. (30.59)

Eliminînd $\frac{\partial N}{\partial x}$ între expresiile (30.58) și (30.59), se obține ecuația diferențială a vibrațiilor longitudinale libere:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (30.60)$$

care se mai scrie: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, (30.61)

unde $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ este viteza de propagare a undelor de tensiune în bară.

Pentru determinarea modurilor proprii de vibrație, se caută soluții de forma :

$$u(x, t) = U(x) \sin(\omega \cdot t + 0). \quad (30.62)$$

Înlocuind (30.62) în ecuația (30.61), rezultă :

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} U = 0, \quad (30.63)$$

avînd soluția generală :

$$U(x) = C_1 \sin \frac{\omega}{c} x + C_2 \cos \frac{\omega}{c} x. \quad (30.64)$$

Constantele de integrare C_1 și C_2 se determină din condițiile la limită :

pentru capăt liber : $\sigma = E \cdot \varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, deci $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$;

pentru încastrare : $u = 0$.

APLICAȚIA 8

Să se determine modurile proprii de vibrație longitudinală la bara încastată la un capăt și liberă la celălalt.

Rezolvare

Condițiile la limită se scriu :

$$\begin{aligned} u &= 0 \text{ la } x = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \text{ la } x = l. \end{aligned} \quad (30.65)$$

Rezultă : $C_2 = 0$ și $C_1 \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} = 0$.

Deoarece, pentru a avea vibrații, trebuie ca $C_2 \neq 0$ și $\omega \neq 0$, se obține condiția :

$$\cos \frac{\omega \cdot l}{c} = 0,$$

sau

$$\frac{\omega_n \cdot l}{c} = \omega_n \cdot l \sqrt{\frac{\rho}{E}} = (2n - 1) \frac{\pi}{2}.$$

Pulsațiile proprii au expresia :

$$\omega_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (30.66)$$

unde n este ordinul modului de vibrație. Funcția proprie corespunzătoare este :

$$U(x) = C_1 \sin \frac{\omega_n \cdot x}{l} = C_1 \sin \frac{2n - 1}{2} \frac{\pi \cdot x}{l}. \quad (30.67)$$

Similar se tratează problema vibrațiilor torsionale ale barelor drepte.

31.

SOLICITĂRI DINAMICE

31.1. COEFICIENTUL DINAMIC

Variația în timp a forțelor exterioare aplicate sistemelor elastice produce mișcarea relativă a elementelor componente ale acestora, ceea ce impune considerarea efectului forțelor masice și al propagării undelor elastice. După cum este necesară sau nu introducerea efectului forțelor masice, calculul de rezistență se face la *solicitări dinamice* sau la *solicitări statice*.

Solicitările dinamice se grupează în trei categorii :

a) *Solicitări prin forțe de inerție constante*, produse la piese în mișcare, ale căror accelerații depind foarte puțin de deformațiile pieselor. Acestea se întâlnesc la piese în mișcare de rotație cu viteză unghiulară constantă (palete de turbină, pale de elice, discuri sau volanți) sau în mișcare de translație cu accelerație constantă (cabluri de macara sau de ascensor).

b) *Solicitări prin șoc*, produse de sarcini cu variație bruscă în timp, de durată inferioară perioadei proprii fundamentale de vibrație a sistemului. Acestea se întâlnesc la ciocnirea corpurilor, ciocane pneumatice, utilaje de forjă, solicitări prin unde de șoc, manevrări bruște etc.

c) *Solicitări prin forțe periodice* produse în piese în vibrație, sub acțiunea forțelor datorate dezechilibrului sau dezaxării, a pulsațiilor fluidelor în conducte sau a altor forțe perturbatoare periodice care apar în timpul funcționării mașinilor.

Problemele de solicitări dinamice se rezolvă prin reducere la probleme de solicitări statice. Se determină o sarcină fictivă P_d , care, acționînd static asupra unei piese, produce aceleași deformații și eforturi unitare ca și sarcina reală P care acționează dinamic. Se stabilește relația :

$$P_d = \psi \cdot P, \quad (31.1)$$

în care ψ se numește *coeficient dinamic*. În cazul șocurilor, acesta mai poartă numele de *multiplicator de impact*.

Dacă forța P aplicată static produce efortul unitar σ_{st} , atunci forța $P_d = \psi \cdot P$ aplicată static produce efortul unitar

$$\sigma_d = \psi \cdot \sigma_{st}, \quad (31.2)$$

egal cu efortul unitar produs de forța P aplicată dinamic.

Valoarea coeficientului dinamic ψ depinde de legea de variație în timp a sarcinii dinamice și de caracteristicile dinamice ale piesei solicitate.

31.2. SOLICITĂRI PRIN FORȚE DE INERȚIE CONSTANTE

Piese în mișcare de translație cu accelerație constantă, sau în rotație cu turație constantă, sînt solicitate prin forțe masice constante. Se calculează forțele de inerție și se adaugă forțele statice, efectuînd calculul de rezistență la fel ca la solicitări statice.

$\omega = \text{const.}$

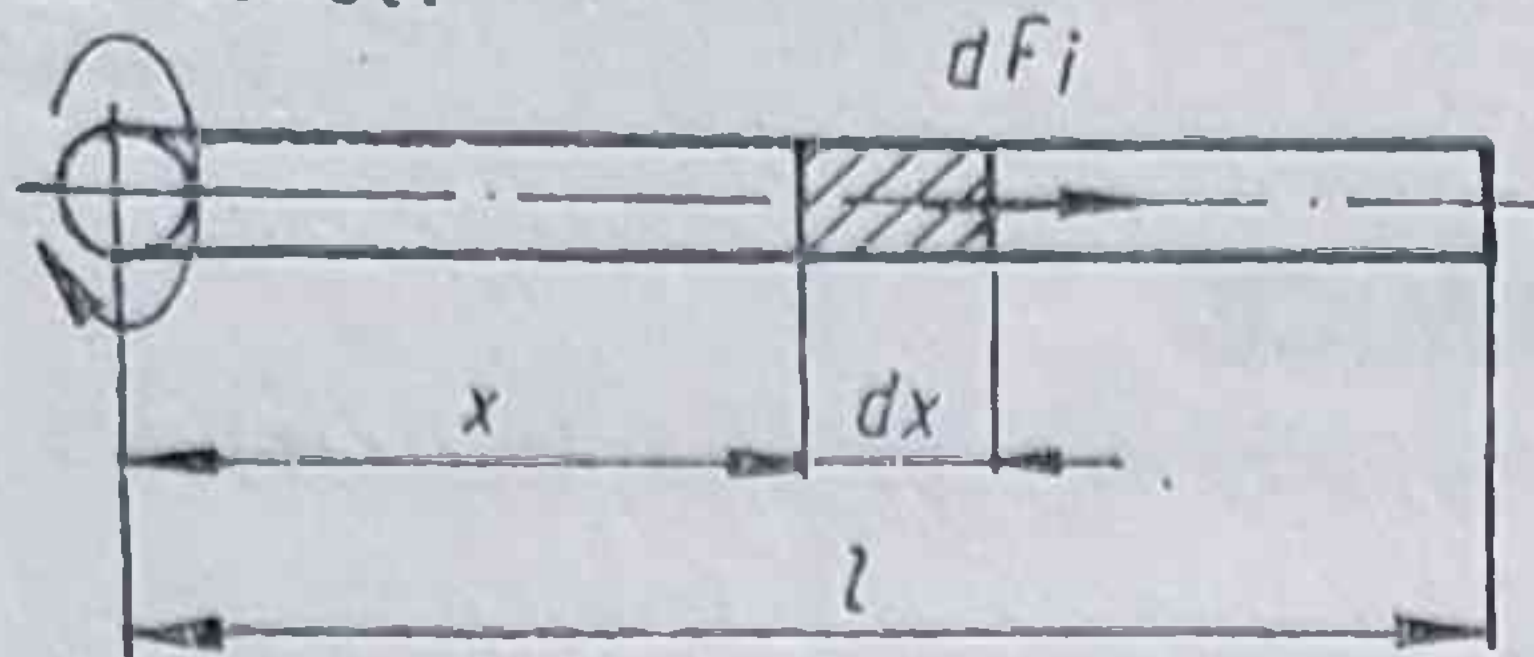


Fig. 31.1

31.2.1. CALCULUL UNEI BARE IN ROTAȚIE

Se consideră o bară dreaptă, cu secțiunea constantă A , care se rotește într-un plan orizontal, cu viteza unghiulară $\omega = \text{const.}$ în jurul punctului 0 (fig. 31.1).

Asupra unui element de lungime dx acționează forța de inerție

$$dF_i = a_c \cdot dm = x \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot A \cdot dx,$$

unde ρ este masa specifică a materialului barei.

Rezultă că asupra barei acționează o sarcină longitudinală cu distribuție liniară

$$q_l = \frac{dF_i}{dx} = \omega^2 \cdot \rho \cdot A \cdot x,$$

care solicită bara la întindere.

În secțiunea x , forța axială este :

$$N_x = \omega^2 \cdot \rho \cdot A \int_x^l x \cdot dx = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \rho \cdot A (l^2 - x^2),$$

iar efortul unitar normal corespunzător este

$$\sigma_x = \frac{\rho \cdot \omega^2}{2} (l^2 - x^2).$$

Efortul unitar maxim apare în secțiunea $x = 0$, avînd valoarea

$$\sigma_{max} = \frac{\rho \cdot l^2}{2} \omega^2,$$

independentă de aria secțiunii transversale.

31.2.2. CALCULUL CABLULUI DE MACARA

O greutate P este suspendată de un cablu elastic (fig. 31.2), avînd greutatea pe unitatea de lungime egală cu q și aria secțiunii transversale A .

În repaus, forța axială în secțiunea x este

$$N_{st} = P + q \cdot x. \quad (31.3)$$

La ridicarea greutății cu accelerația constantă a , forța axială în secțiunea x devine :

$$\begin{aligned} N_a &= N_{st} + F_i = P + q \cdot x + \frac{P + q \cdot x}{g} a = \\ &= (P + q \cdot x) \left(1 + \frac{a}{g} \right), \end{aligned} \quad (31.4)$$

unde F_i este forța de inerție corespunzătoare masei $\frac{P + q \cdot x}{g}$ situate sub secțiunea x .

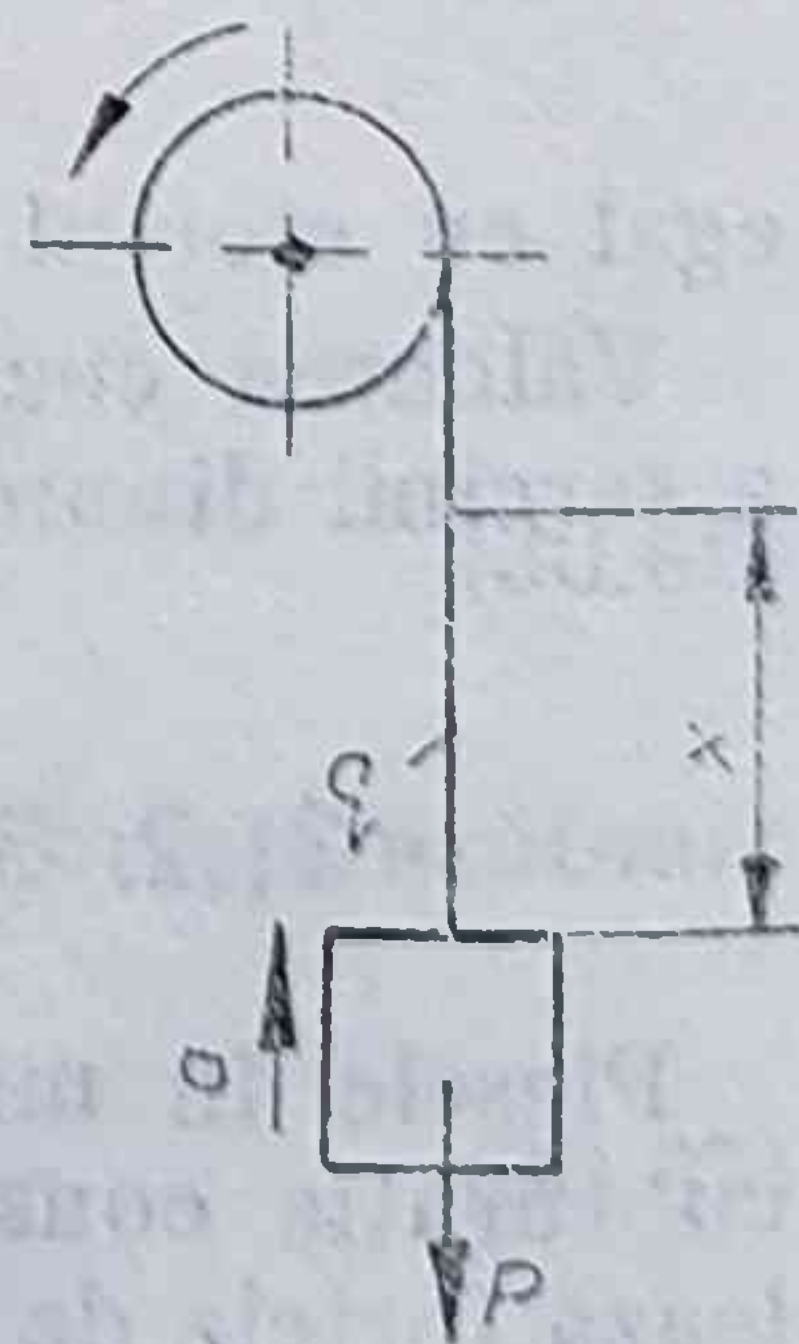


Fig. 31.2

Relația (31.4) se poate scrie sub forma :

$$N_d = \left(1 + \frac{a}{g}\right) N_{st} = \psi \cdot N_{st}, \quad (31.5)$$

unde ψ este coeficientul dinamic.

Eforturile unitare se calculează cu relația (31.2)

$$\sigma_d = \left(1 + \frac{a}{g}\right) \sigma_{st}, \quad (31.6)$$

unde

$$\sigma_{st} = \frac{N_{st}}{A} = \frac{P + q \cdot x}{A}.$$

La coborîrea sarcinii, accelerația $a < 0$, coeficientul dinamic $\psi < 1$, deci $\sigma_d < \sigma_{st}$.

31.3. SOLICITĂRI PRIN ȘOC

Solicitările prin șoc apar în funcționarea mașinilor cu mișcare rectilinie alternativă, la ciocane de forjă sau pneumatice, la structuri solicitate prin unde de șoc.

31.3.1. RĂSPUNSUL LA O FORȚĂ VARIABILĂ ÎN TIMP

Se consideră un sistem cu un grad de libertate (fig. 31.3), asupra căruia acționează o forță $F(t)$ avînd o variație în timp ca în figura 31.4.

Pe durata unui interval $d\tau$, forța $F(\tau)$ poate fi considerată constantă. Aria suprafeței hașurate din figura 31.4 reprezintă un impuls infinitezimal, care produce variația de viteză

$$dy = \frac{F(\tau) \cdot d\tau}{m}. \quad (31.7)$$

Deplasarea elementară dy a masei m , datorită acestui impuls, este :

$$dy = \frac{F(\tau) \cdot d\tau}{m} \cdot \frac{1}{\omega} \sin \omega(t - \tau) \quad \text{pentru } t \geq \tau,$$

ceea ce se deduce direct din relația (10.3.19), considerînd că masa are deplasare nulă și viteză inițială dy la momentul $t = \tau$.

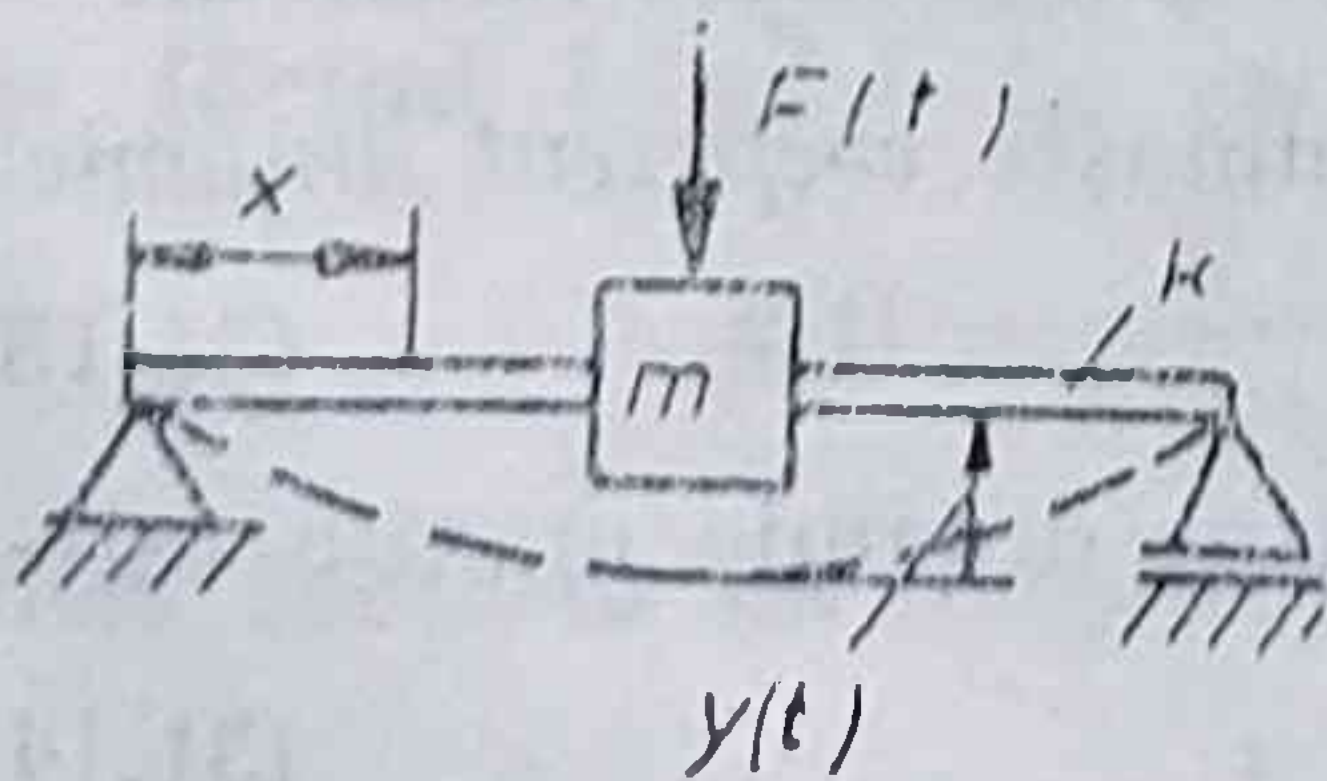


Fig. 31.3

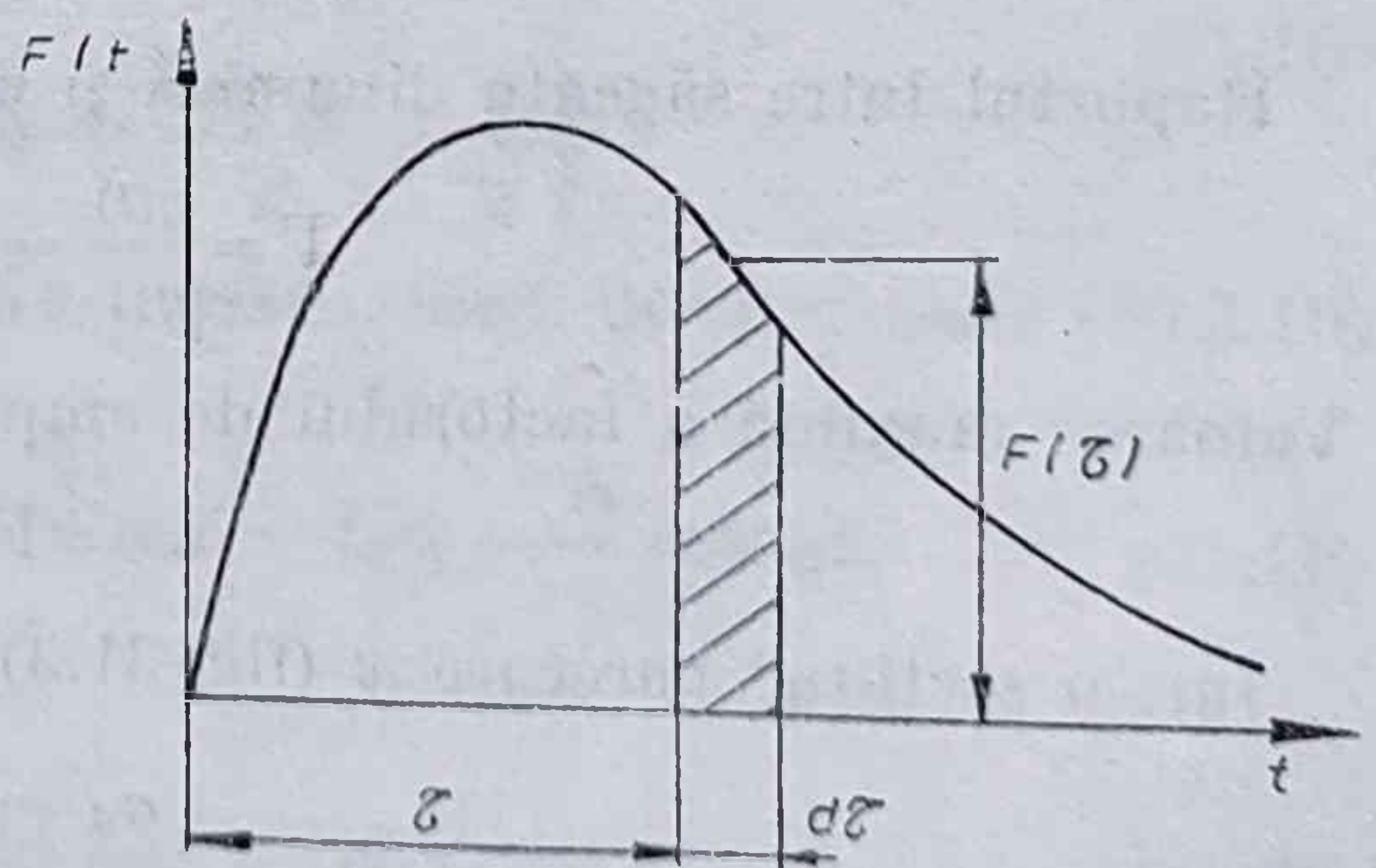


Fig. 31.4

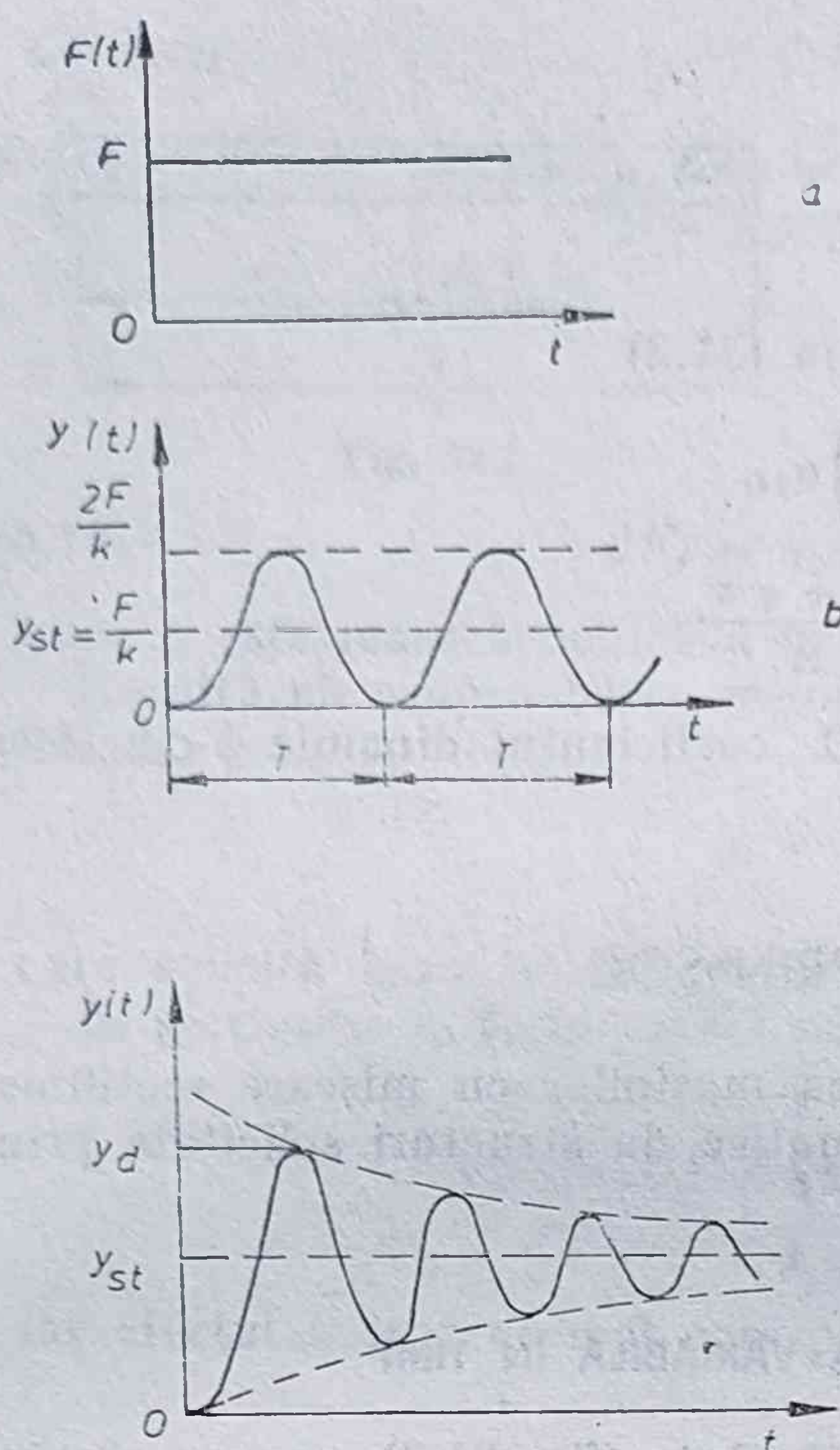


Fig. 31.5

Însumînd efectele tuturor impulsurilor infinitezimale între momentele $\tau = 0$ și $\tau = t$, se obține expresia deplasării masei m sub acțiunea forței $F(t)$, sub forma integralei de convoluție :

$$y(t) = \frac{1}{m \cdot \omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (31.8)$$

31.3.2. RĂSPUNSUL LA O FORȚĂ CONSTANTĂ APLICATĂ BRUSC

Se consideră sistemul din figura 31.3, solicitat de o forță concentrată constantă $F(t) = F$, sub formă de treaptă (fig. 31.5, a).

Ecuatia diferențială a mișcării este :

$$m \cdot \ddot{y} + k \cdot y = F,$$

avînd soluția generală :

$$y(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{F}{k}. \quad (31.9)$$

Se presupune că la $t = 0$, $y_0 = \dot{y}_0 = 0$. Înlocuind aceste condiții inițiale în relația (31.9), rezultă constantele de integrare $C_1 = 0$ și $C_2 = -\frac{F}{k}$, deci expresia deplasării masei m este :

$$y(t) = \frac{F}{k} (1 - \cos \omega t), \quad (31.10)$$

fiind reprezentată grafic în figura 31.5, b.

Dacă forța F ar fi aplicată static, ar produce o deplasare

$$y_{st} = \frac{F}{k}. \quad (31.11)$$

Raportul între săgeata dinamică și cea statică este *factorul de amplificare*:

$$\Gamma = \frac{y(t)}{y_{st}} = 1 - \cos \omega t. \quad (31.12)$$

Valoarea maximă a factorului de amplificare se numește *coeficient dinamic*:

$$\psi = \Gamma_{max} = 2. \quad (31.13)$$

Într-o secțiune oarecare x (fig. 31.3), efortul unitar dinamic maxim este :

$$\sigma_d = \psi \cdot \sigma_{st}, \quad (31.14)$$

unde σ_{st} este valoarea corespunzătoare aplicării statice a forței F .

Forța F face ca sistemul să vibreze în jurul poziției de echilibru static, definită de y_{st} , după cum se arată în figura 31.5, *b*.

Dacă se ține seama și de amortizarea inherentă din sistem, variația în timp a deplasării masei m are alura din figura 31.5, *c*, coeficientul dinamic ψ determinându-se ca raport între deplasarea maximă y_d și deplasarea statică y_{st} , corespunzătoare poziției la care masa m ajunge după amortizarea completă a vibrațiilor :

$$\psi = \frac{y_d}{y_{st}}.$$

Ca o consecință a relațiilor liniare între forțe și deformații, pe de o parte, între forțe și eforturi unitare, pe de altă parte, o vibrogramă similară celei din figura 31.5, *c* se obține la măsurarea eforturilor unitare din bară, permițînd determinarea experimentală a coeficienților dinamici cu relația (31.14).

31.3.3. RĂSPUNSUL LA UN IMPULS TRIUNGHIULAR

Se consideră sistemul din figura 31.3, solicitat de forțe $F(t)$ avînd o variație în timp ca în figura 31.6, exprimată analitic sub forma :

$$F(t) = F \left(1 - \frac{\tau}{t_d} \right). \quad (31.15)$$

Cu condițiile inițiale $y_0 = \dot{y}_0 = 0$ la $t = 0$, problema se rezolvă utilizînd soluția generală (31.8).

a) *Stadiul 1*. Pentru $\tau \leq t_d$, deci pe durata cît acționează forța, înlocuind expresia (31.15) în (31.8), după efectuarea calculelor rezultă :

$$y(t) = \frac{F}{k} (1 - \cos \omega \cdot t) + \frac{F \cdot t}{k \cdot t_d} \left(\frac{\sin \omega t}{\omega \cdot t} - 1 \right). \quad (31.16)$$

Factorul de amplificare dinamică este :

$$\Gamma = \frac{y(t)}{y_{st}} = \frac{y(t)}{\frac{F}{k}} = 1 - \cos \omega t + \frac{\sin \omega t}{\omega \cdot t_d} - \frac{t}{t_d}. \quad (31.17)$$

b) *Stadiul 2*. Pentru $\tau \geq t_d$, deci după încetarea acțiunii forței, condițiile inițiale ale mișcării se determină înlocuind $t = t_d$ în expresia (31.16) și în expresia derivatei acesteia în raport cu timpul.

Se obține :

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{F}{k} \left(\frac{\sin \omega t_d}{\omega \cdot t_d} - \cos \omega t_d \right), \\ \dot{y}_0 &= \frac{F}{k} \left(\omega \sin \omega t_d + \frac{\cos \omega t_d}{t_d} - \frac{1}{t_d} \right). \end{aligned} \quad (31.18)$$

Înlocuind expresiile (31.18) în ecuația mișcării libere neamortizate (10.3.19) și făcînd $t = t - t_d$, se obține :

$$y(t) = \frac{F}{k \cdot \omega \cdot t_d} [\sin \omega t_d - \sin \omega(t - t_d)] - \frac{F}{k} \cos \omega t, \quad (31.19)$$

deci factorul de amplificare este :

$$\Gamma = \frac{1}{\omega \cdot t_d} [\sin \omega t_d - \sin \omega(t - t_d)] - \cos \omega t. \quad (31.20)$$

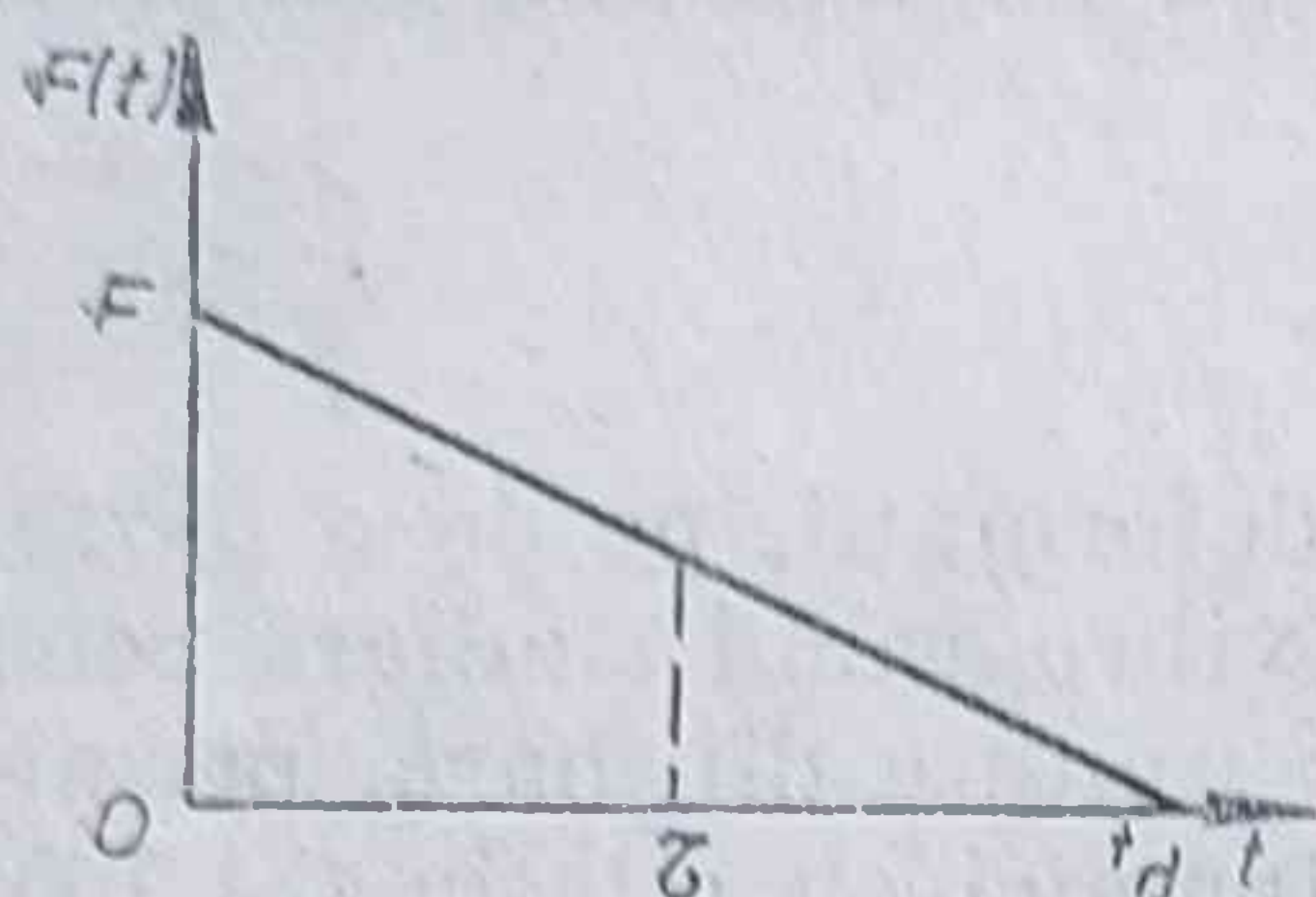


Fig. 31.6

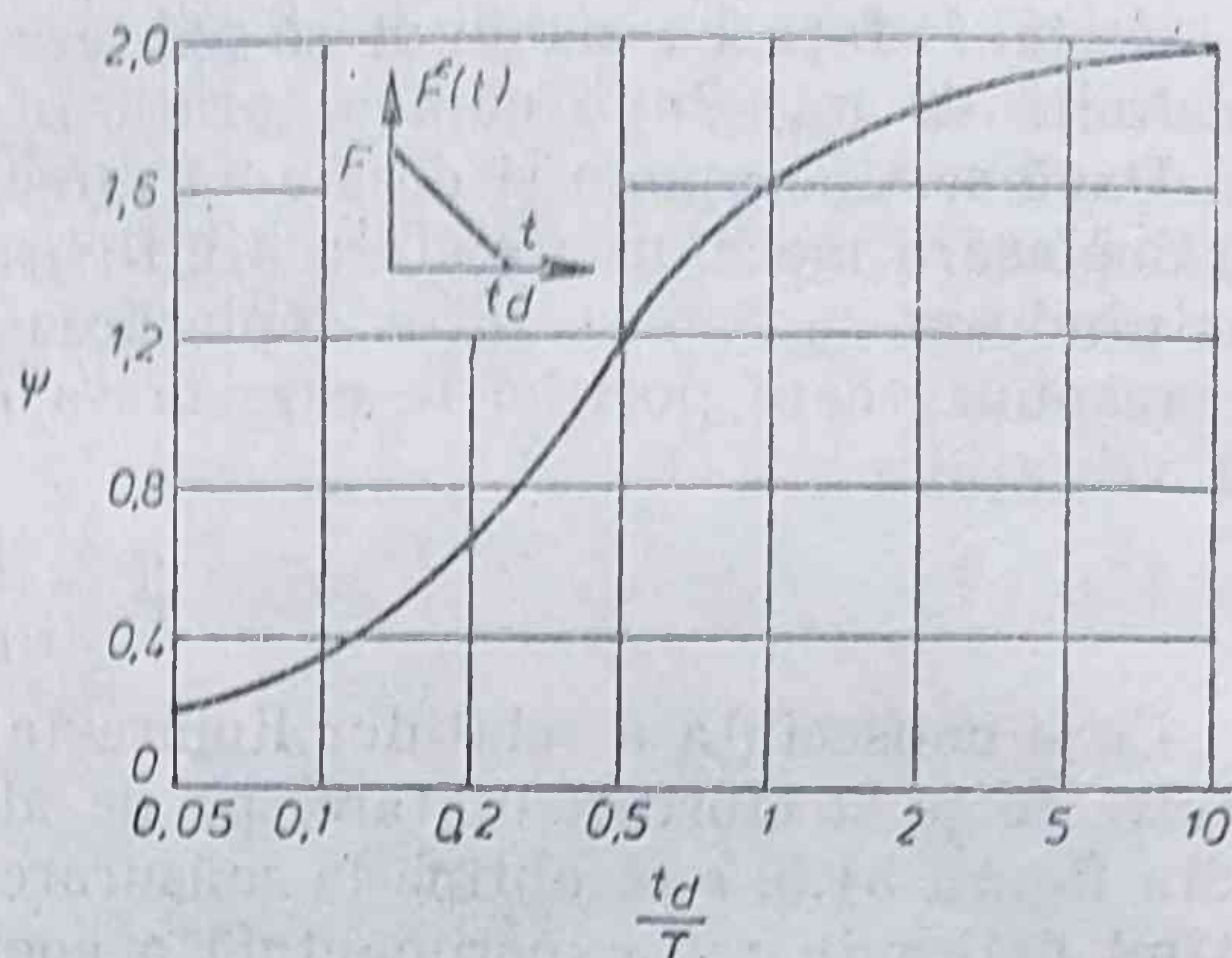


Fig. 31.7

Din relațiile (31.17) și (31.20) rezultă că factorii de amplificare sînt funcții de timp. Anulînd derivata în raport cu timpul a funcției $\Gamma(t)$, se obține timpul t_m , măsurat din momentul aplicării forței, după care apare răspunsul maxim. Înlocuind această valoare în expresia factorului de amplificare, se obține coeficientul dinamic :

$$\psi = \Gamma_{max} = \Gamma(t_m). \quad (31.21)$$

În figura 31.7 se prezintă variația lui ψ în funcție de raportul $\frac{t_d}{T}$, unde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ este perioada proprie de vibrație a sistemului. În figura 31.8 se arată variația raportului $\frac{t_m}{T}$ în funcție de $\frac{t_d}{T}$. Acest tip de diagrame sînt deosebit de utile în proiectare, deoarece este suficient să se cunoască T și t_d pentru a se calcula t_m și ψ . Efortul unitar dinamic maxim se calculează apoi cu relația (31.14).

În figurile 31.9 și 31.10 se dau diagrame similare pentru o forță impulsivă dreptunghiulară. Pentru alte legi de variație în timp a forței $F(t)$, valorile lui ψ se calculează cu ajutorul metodelor numerice, utilizînd calculatorul.

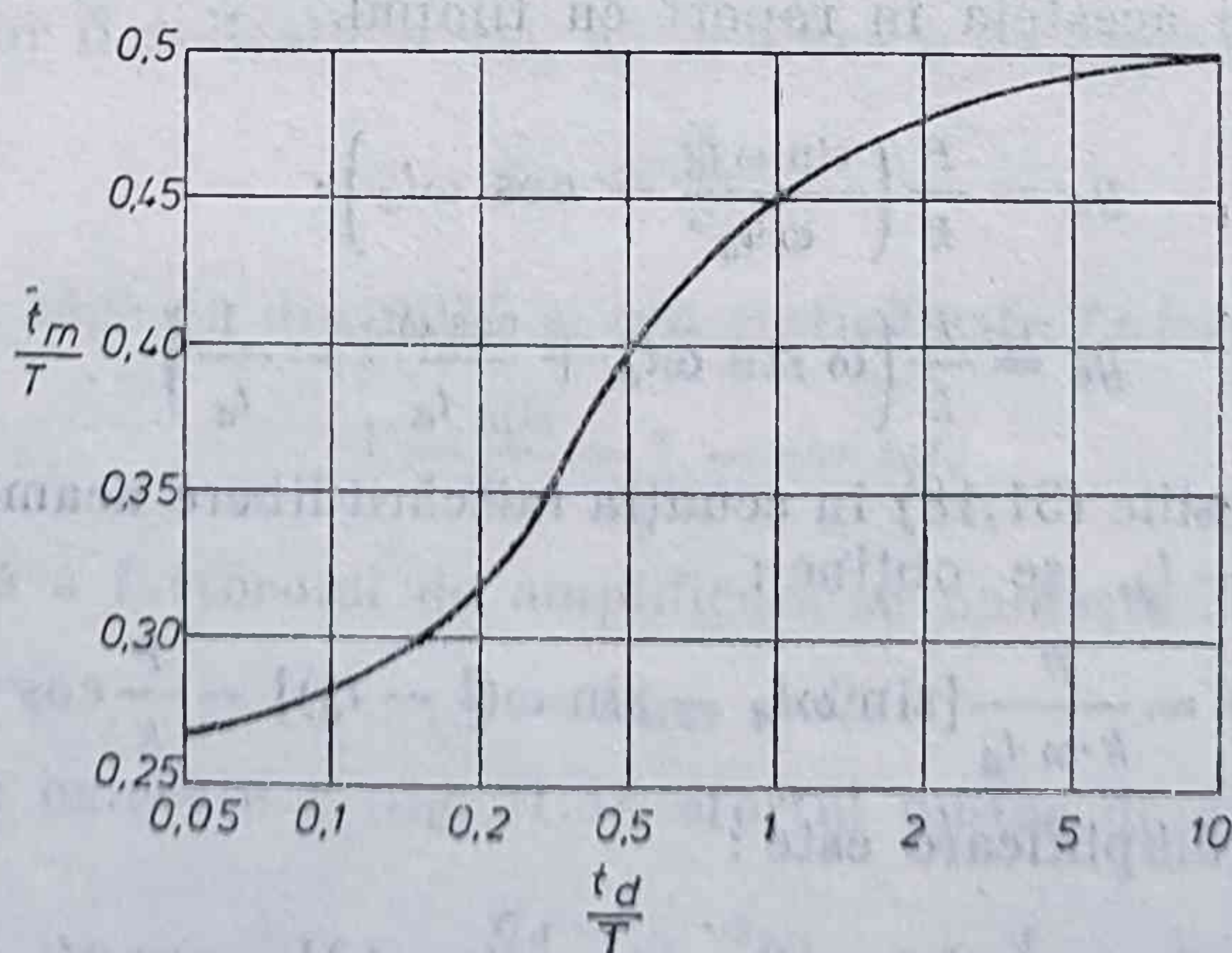


Fig. 31.8

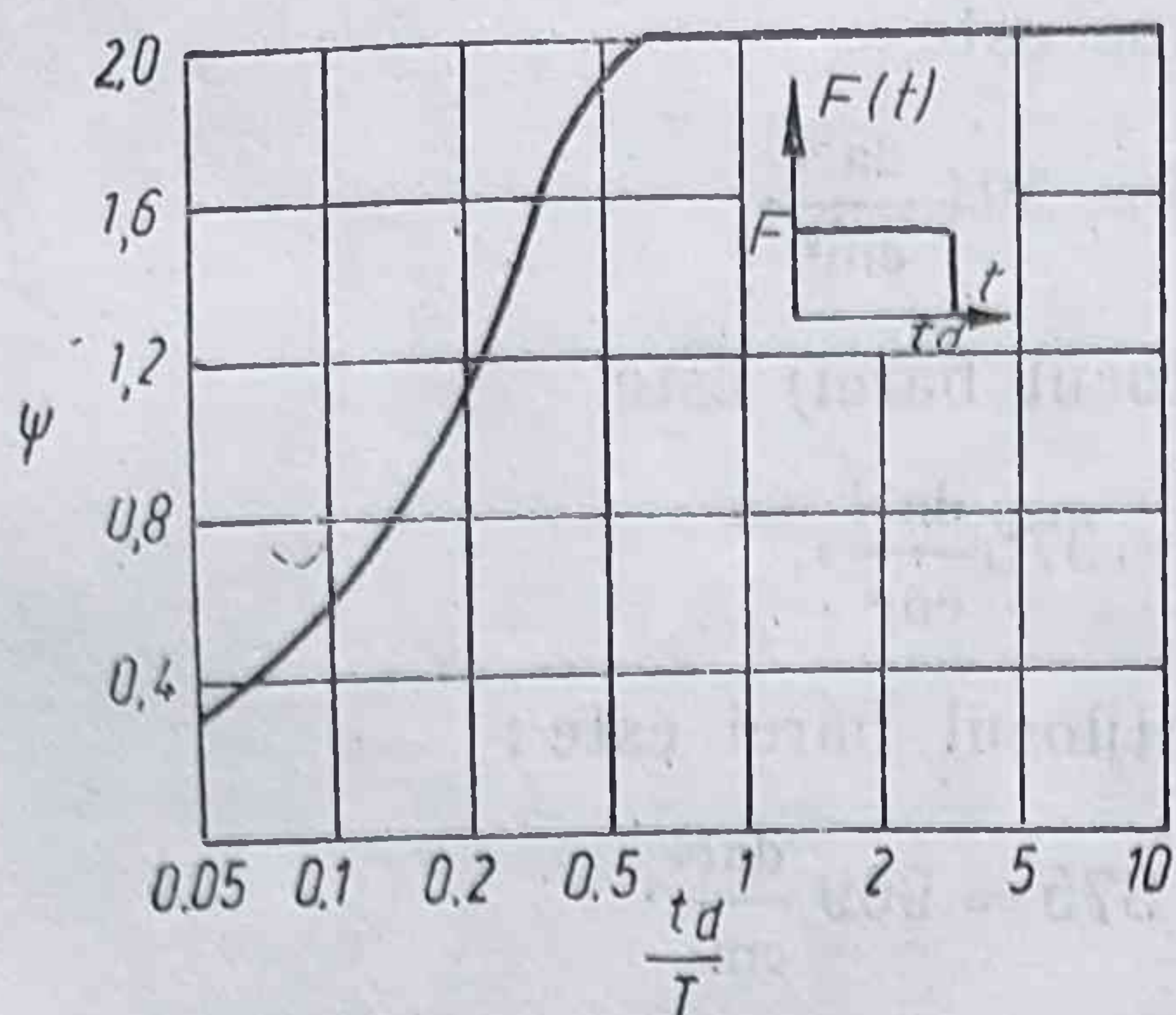


Fig. 31.9

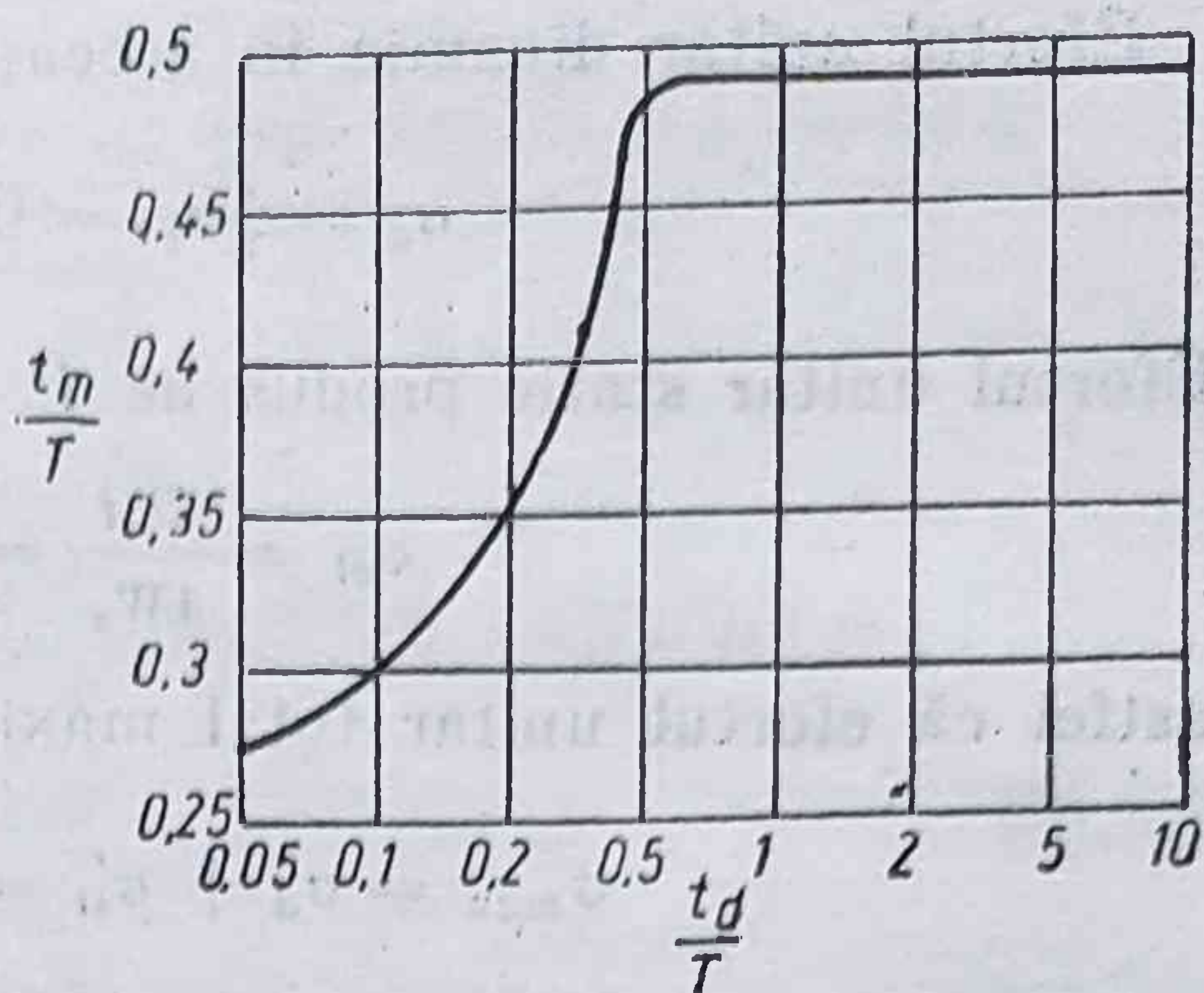


Fig. 31.10

APLICAȚIA 1

Sistemul din figura 31.11, a este format din o greutate $P = 3 \text{ daN}$, atașată la mijlocul unei grinzi din oțel, cu lungimea $l = 25 \text{ cm}$ și diametrul $d = 8 \text{ mm}$. Asupra sistemului acționează forța $F(t)$ avînd variația în timp ca în figura 31.11, b. Se cere valoarea efortului unitar maxim din bară.

Rezolvare

$W_z = 0,05 \text{ cm}^3$, $I_z = 0,02 \text{ cm}^4$. Constanta elastică a barei este

$$k = \frac{48EI_z}{l^3} = \frac{48 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,02}{25^3} = 129 \frac{\text{daN}}{\text{cm}}.$$

Pulsația proprie a sistemului este

$$\omega = \sqrt{\frac{k \cdot g}{P}} = \sqrt{\frac{129 \cdot 981}{3}} = 205,4 \text{ rad/s},$$

iar perioada proprie de vibrație

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{205,4} = 0,03 \text{ s}.$$

Se calculează raportul adimensional

$$\frac{t_d}{T} = \frac{0,01}{0,03} = 0,333,$$

pentru care, din figurile 31.7 și 31.8 se obține

$$\psi = 0,95 \quad \text{și} \quad \frac{t_m}{T} = 0,365.$$

Efortul unitar static produs la mijlocul barei de forța $F = 5 \text{ daN}$ este

$$\sigma_{st} = \frac{M}{W_z} = \frac{F \cdot l}{4W_z} = \frac{5 \cdot 25}{4 \cdot 0,05} = 625 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

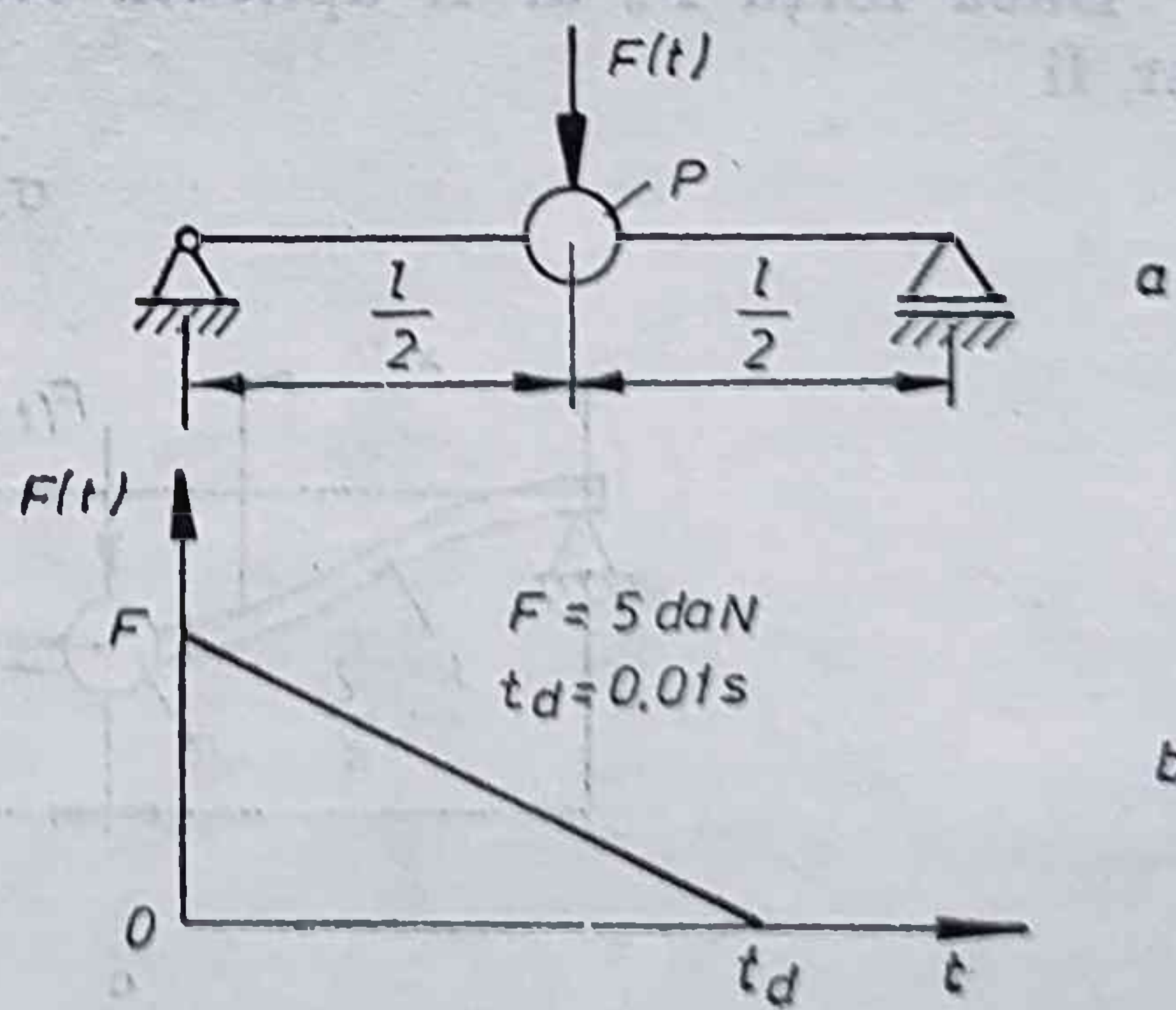


Fig. 31.11

Efortul unitar dinamic în aceeași secțiune este

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st} = 0,95 \cdot 625 = 594 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

Efortul unitar static produs de P (la mijlocul barei) este

$$\sigma'_{st} = \frac{P \cdot l}{4 W_z} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 0,05} = 375 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2},$$

astfel că efortul unitar total maxim la mijlocul barei este :

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma'_{st} = 594 + 375 = 969 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

31.4. SOLICITĂRI PRIN FORȚE PERIODICE

Fie sistemul din figura 31.12, *a* acționat de forța armonică

$$F(t) = F_0 \sin pt, \quad (31.22)$$

de amplitudine F_0 și pulsație p .

Ecuția diferențială a mișcării, scrisă pe baza condiției de echilibru dinamic a masei m (fig. 31.12, *b*), este :

$$m \cdot \ddot{y} + k \cdot y = F_0 \sin pt. \quad (31.23)$$

În regim staționar, soluția ecuației (31.23) are forma :

$$y(t) = \frac{Y_{st}}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}} \sin p \cdot t = Y \sin pt,$$

unde $Y_{st} = \frac{F_0}{k}$ este deformația produsă de forța F_0 aplicată static, iar ω este pulsația proprie a sistemului.

$$\text{Raportul } \Gamma = \frac{|Y|}{Y_{st}} = \frac{1}{\left| 1 - \frac{p^2}{\omega^2} \right|} \quad (31.24)$$

se numește *factor de amplificare* și este reprezentat grafic în figura 10.23.

Dacă forța F_0 ar fi aplicată static, efortul unitar maxim în secțiunea x ar fi

$$\sigma_{st} = \frac{F_0 \cdot x}{2 W_z}. \quad (31.25)$$

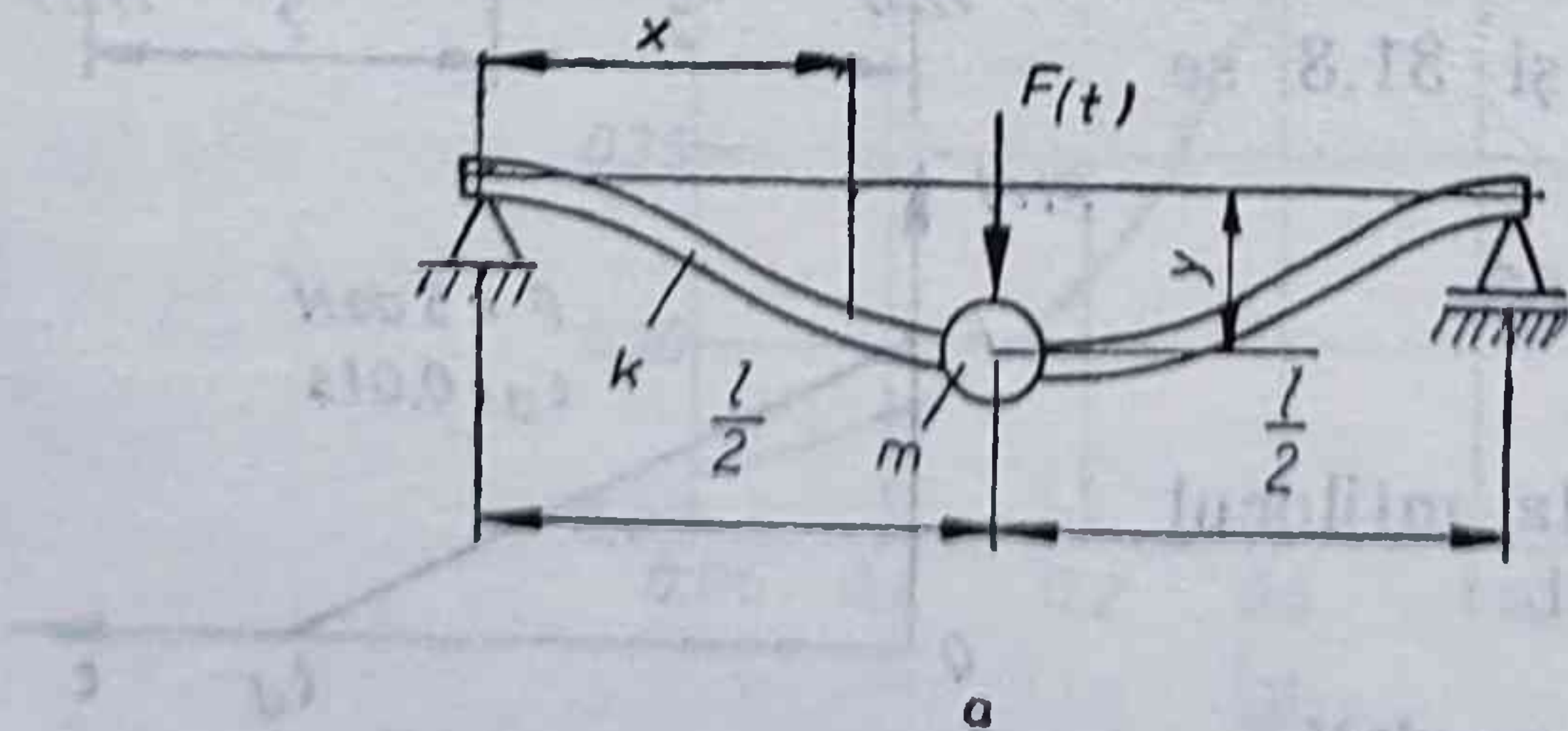


Fig. 31.12

În regim dinamic, asupra barei acționează forța $k \cdot y$ de amplitudine

$$k \cdot |Y| = \frac{F_0}{\left| 1 - \frac{p^2}{\omega^2} \right|}$$

care produce în secțiunea x eforturi unitare maxime de amplitudine :

$$\sigma_d = \frac{|kY|x}{2W_s} = \frac{|kY|}{F_0} \sigma_{st} = \frac{|Y|}{Y_{st}} \sigma_{st} = \psi \cdot \sigma_{st}, \quad (31.26)$$

unde coeficientul dinamic $\psi = \Gamma$, deci este egal cu factorul de amplificare (31.24), fiind funcție de pulsația mișcării forțate p .

Eforturile unitare statice maxime produse în secțiunea x de greutatea $m \cdot g$ se calculează cu relația :

$$\sigma'_{st} = \frac{m \cdot g \cdot x}{2W_s}$$

și nu trebuie confundate de eforturile unitare σ_{st} produse de forța F_0 dacă ar acționa static.

APLICAȚIA 2

Să se calculeze efortul unitar maxim produs la mijlocul barei din figura 31.11, a de o forță $F(t) = F_0 \sin p \cdot t$, unde $F_0 = 5$ daN și $p = 100$ rad/s.
Rezolvare

Pulsația proprie a sistemului a fost calculată la exemplul 31.1 fiind :

$$\omega = 205,4 \text{ rad/s.}$$

Coeficientul dinamic este :

$$\psi = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{100}{205,4} \right)^2} = 1,31.$$

Efortul unitar static maxim produs de F_0 este :

$$\sigma_{st} = \frac{M}{W_s} = \frac{F_0 \cdot l}{4W_s} = \frac{5 \cdot 25}{4 \cdot 0,05} = 625 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

Efortul unitar dinamic produs de forța $F_0 \sin p \cdot t$ este :

$$\sigma_d = \psi \cdot \sigma_{st} = 1,31 \cdot 625 = 819 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

Efortul unitar static produs de greutatea P este $\sigma'_{st} = 375$ daN/cm², deci efortul unitar total maxim la mijlocul barei este :

$$\sigma_{max} = \sigma + \sigma'_{st} = 819 + 375 = 1\,194 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

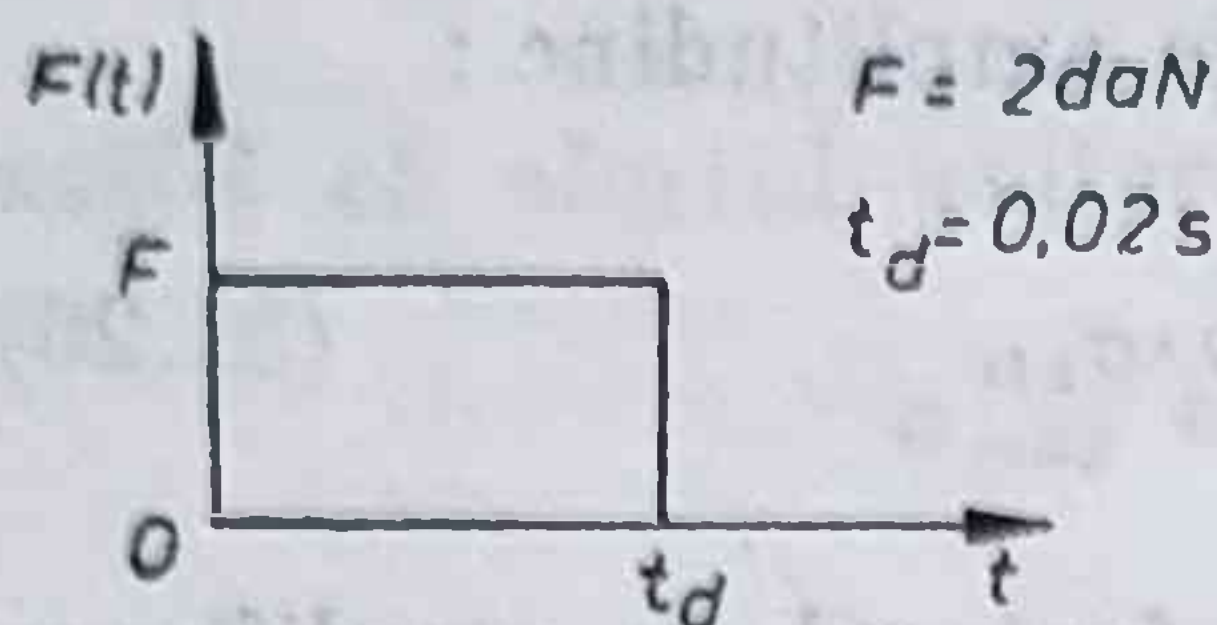
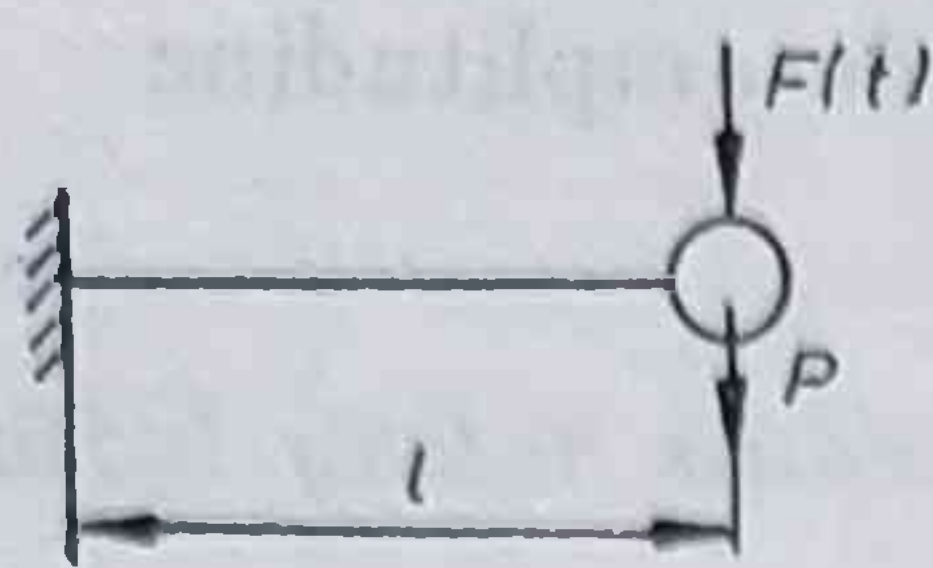


Fig. 31.13

APLICAȚIA 3

La sistemul din figura 31.13, a se dau
 $P = 4 \text{ daN}$ și $l = 20 \text{ cm}$. Bara este din
 oțel cu secțiunea pătrată, cu latura $a =$
 $= 10 \text{ mm}$. Să se calculeze efortul unitar
 maxim care apare în secțiunea din în-

castrare :
 a) dacă în capătul liber al barei acțio-
 nează forța $F(t)$ avînd variația în timp
 reprezentată în figura 31.13, b ;

b) dacă în capătul liber al barei acțio-
 nează forța $F(t) = F_0 \sin p \cdot t$, unde $F_0 =$
 $= 2 \text{ daN}$, iar $p = 80 \text{ rad/s}$.

Rezolvare

Pentru secțiunea dreptunghiulară :

$$W_z = \frac{1}{6} = 0,167 \text{ cm}^3; \quad I_z = \frac{1}{12} = 0,0833 \text{ cm}^4.$$

Constanta elastică a barei este :

$$k = \frac{3E \cdot I_z}{l^3} = \frac{3 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,0833}{20^3} = 65,6 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

Pulsația proprie a sistemului este :

$$\omega = \sqrt{\frac{k \cdot g}{P}} = \sqrt{\frac{65,6 \cdot 981}{4}} = 126,84 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

iar perioada proprie de vibrație $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{126,84} = 0,0495 \text{ s}$.

a) Dacă asupra barei acționează forța $F(t)$, avînd variația în timp repre-
 zentată în figura 31.13, b, raportul $\frac{t_d}{T}$ va fi :

$$\frac{t_d}{T} = \frac{0,02}{0,0495} = 0,404,$$

pentru care din figurile 31.9 și 31.10 se obțin :

$$\psi = 1,8 \text{ și } \frac{t_m}{T} = 0,45.$$

Efortul unitar static produs de forța $F = 2 \text{ daN}$ în secțiunea din încastrare
 este :

$$\sigma_{st} = \frac{M}{W_z} = \frac{F \cdot l}{W_z} = \frac{2 \cdot 20}{0,167} = 239,52 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2},$$

iar efortul unitar dinamic :

$$\sigma_d = \psi \cdot \sigma_{st} = 1,8 \cdot 239,52 = 431,136 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

Efortul unitar static produs de P în secțiunea din încastrare este :

$$\sigma'_{st} = \frac{P \cdot l}{W_z} = \frac{4 \cdot 20}{0,167} = 479,04 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

Efortul unitar total maxim în secțiunea din încastrare este

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma'_{st} = 431,136 + 479,04 = 910,176 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

b) Dacă asupra barei acționează forța $F(t) = F_0 \sin p \cdot t$, unde $F_0 = 2 \text{ daN}$, iar $p = 80 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, coeficientul dinamic va fi :

$$\psi = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{80}{126,84}\right)^2} = 1,66.$$

Efortul unitar static produs de F_0 în secțiunea din încastrare este :

$$\sigma_{st} = \frac{M}{W_z} = \frac{F_0 \cdot l}{W_z} = \frac{2 \cdot 20}{0,167} = 239,52 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

Efortul unitar dinamic produs de forța $F_0 \sin p \cdot t$ în secțiunea încastrării este :

$$\sigma_d = \psi \cdot \sigma_{st} = 1,66 \cdot 239,52 = 397,6 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

Efortul unitar static produs de P în încastrare a fost calculat la punctul anterior : $\sigma'_{st} = 479,04 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$.

Efortul unitar total maxim în secțiunea din încastrare este

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma'_{st} = 397,6 + 479,04 = 876,64 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

32.

OBOSEALA MATERIALELOR

32.1. REZISTENȚA LA OBOSEALĂ

Prin oboseală se înțelege micșorarea proprietăților de rezistență ale materialelor sub efectul solicitărilor variabile în timp.

Considerînd cazul particular al solicitărilor variabile periodice (fig. 31.1), se definesc σ_{max} — efortul unitar maxim, σ_{min} — efortul unitar minim,

$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{max} + \sigma_{min})$ — efortul unitar mediu și $\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min})$ — amplitudinea efortului unitar.

Un ciclu de solicitare variabilă, de durată T , este complet definit prin două mărimi : σ_{max} și σ_{min} , sau σ_m și σ_a , frecvența solicitării neinfluențînd rezistența la oboseală a metalelor.

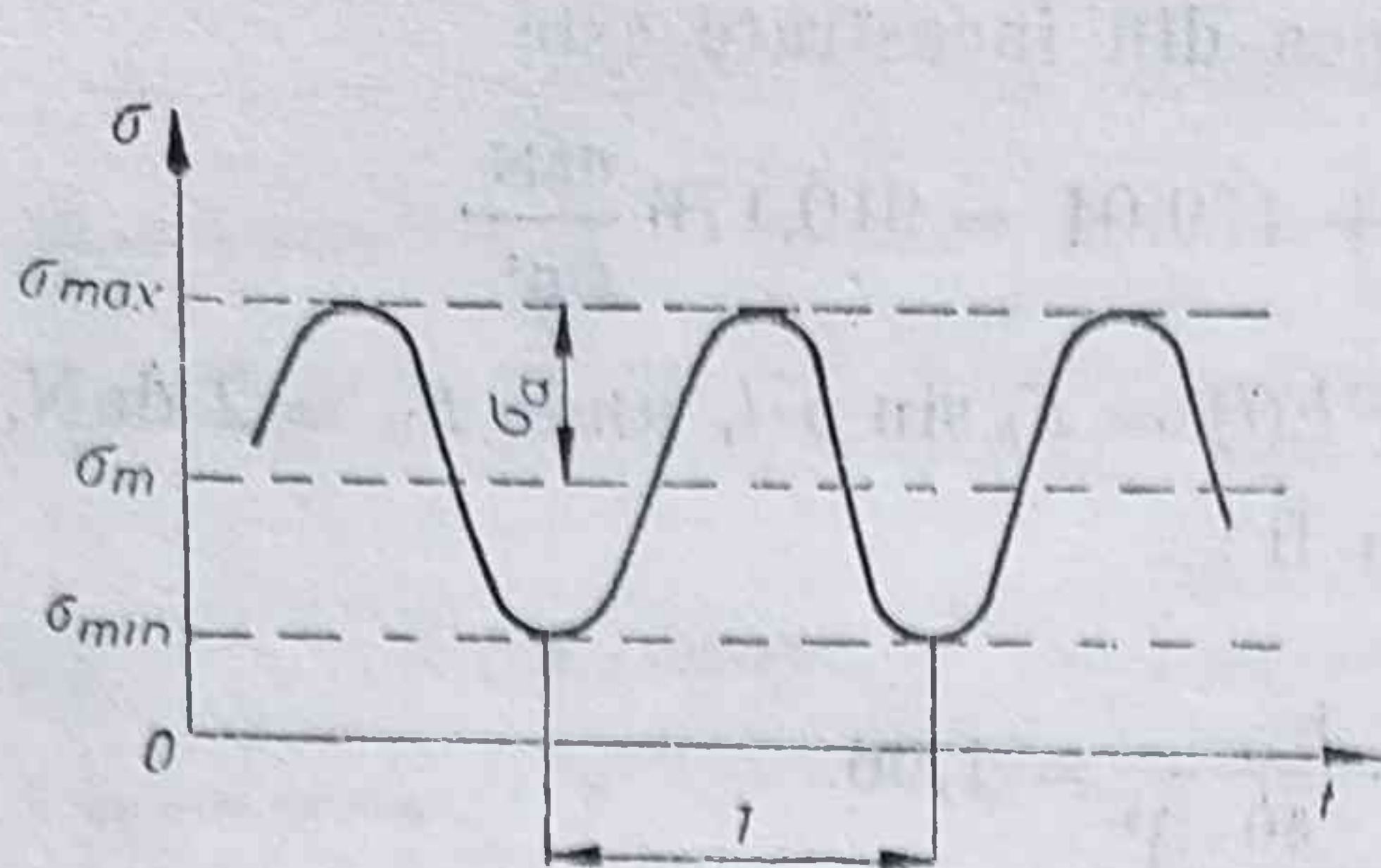


Fig. 32.1

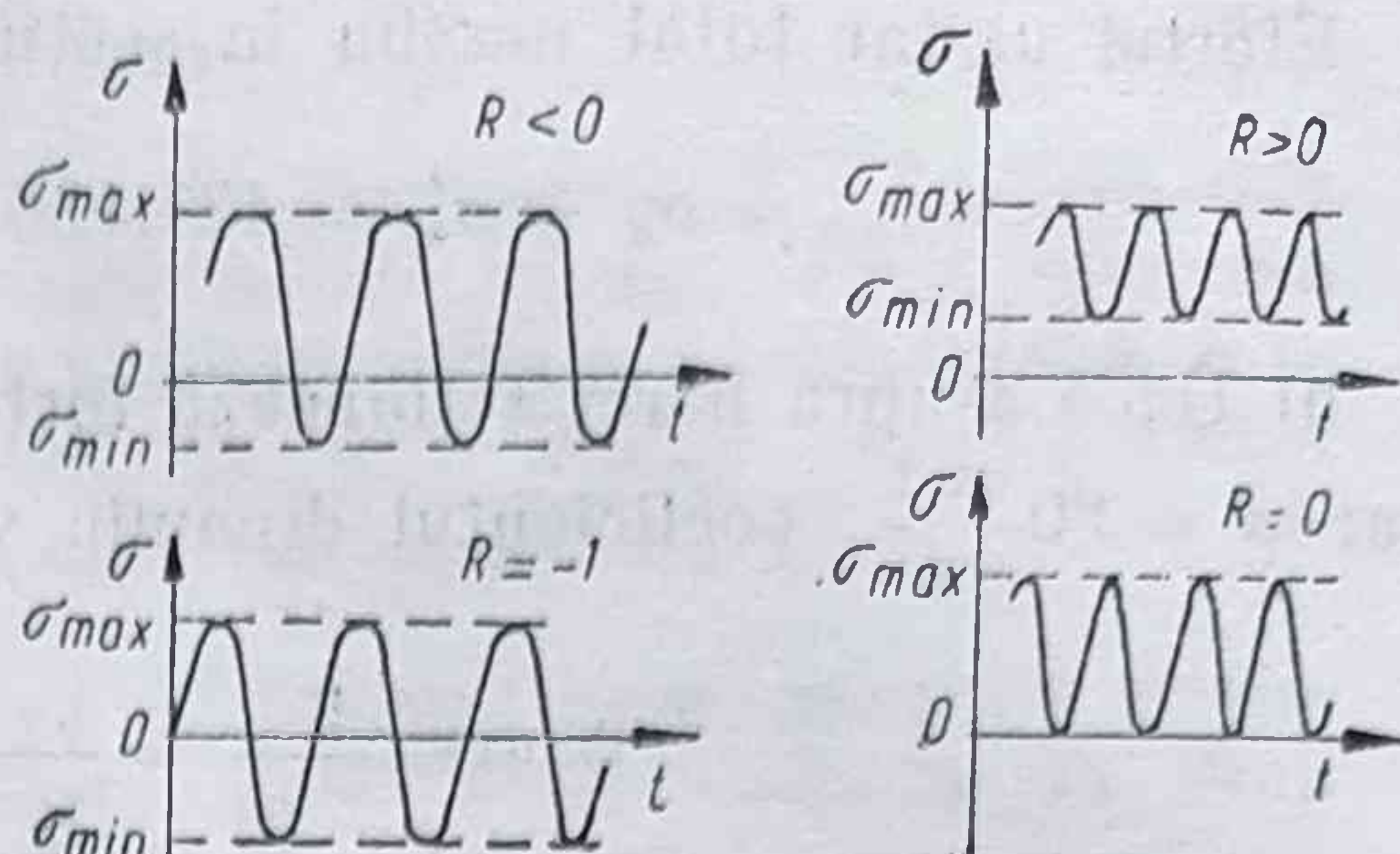


Fig. 32.2

Se numește *coeficient de asimetrie* al ciclului, raportul

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \quad (32.1)$$

Se disting cicluri alternante ($R < 0$) și cicluri ondulate ($R > 0$) (fig. 32.2). Cazuri particulare importante sînt *ciclurile alternant-simetrice* ($R = -1$) *ciclurile pulsante* ($R = 0$) și solicitarea statică ($R = +1$).

Caracteristica mecanică a unui material care definește comportarea acestuia la solicitări variabile este *rezistența la oboseală*. Rezistența la oboseală σ_R este cea mai mare valoare a efortului unitar maxim σ_{\max} al ciclurilor de solicitări variabile care, acționînd timp nelimitat asupra unei piese, nu produce ruperea prin oboseală.

Rezistența la oboseală la solicitări prin cicluri alternant simetrice se notează cu σ_{-1} (sau τ_{-1}), iar prin cicluri pulsante cu σ_0 (sau τ_0).

Determinarea experimentală a rezistenței la oboseală a metalelor (conform STAS 5878-69), se face prin încercarea la încovoiere rotativă, trasînd o diagramă în coordonate $\sigma_{\max} - N$ (N = numărul de cicluri pînă la rupere), numită curba lui Wöhler (fig. 32.3).

Punctul A corespunde unei epruvete care, solicitată cu $\sigma_{\max} = \sigma_A$ și un anumit R , se rupe după N_A cicluri.

Punctul B corespunde altei epruvete care, solicitată cu $\sigma_{\max} = \sigma_B = \sigma_A - (1 \dots 2) \text{ daN/mm}^2$ și același R , se rupe după N_B cicluri.

Pentru fiecare epruvetă încercată se marchează un punct pe diagrama $\sigma_{\max} - N$. Curba trasată prin aceste puncte are în general o asimptotă orizontală. Ordonata acesteia reprezintă valoarea lui σ_{\max} pentru care ruperea nu se mai produce, fiind deci egală cu *rezistența la oboseală* σ_R . Practic, pentru măsurări mai precise, la fiecare nivel de solicitare se încearcă mai multe epruvete, curba trasîndu-se prin punctele cu probabilitate maximă de rupere.

În prezent se utilizează și metode rapide de încercare la oboseală. Prezentarea acestora se face în monografiile de specialitate [18].

32.2. DIAGRAMA REZISTENȚELOR LA OBOSEALĂ

Pentru o anumită solicitare (întindere, încovoiere, răsucire), rezistența la oboseală a unui material variază cu coeficientul de asimetrie R .

Reprezentarea grafică a acestei dependențe se face prin diagrame ale rezistențelor la oboseală. Diagrama lui Haigh (fig. 32.4) se trasează în coordonate $\sigma_m - \sigma_a$. Coordonatele unui punct (σ_{aM} , σ_{mM}) definesc complet ciclul de solicitare variabilă reprezentat prin punctul M .

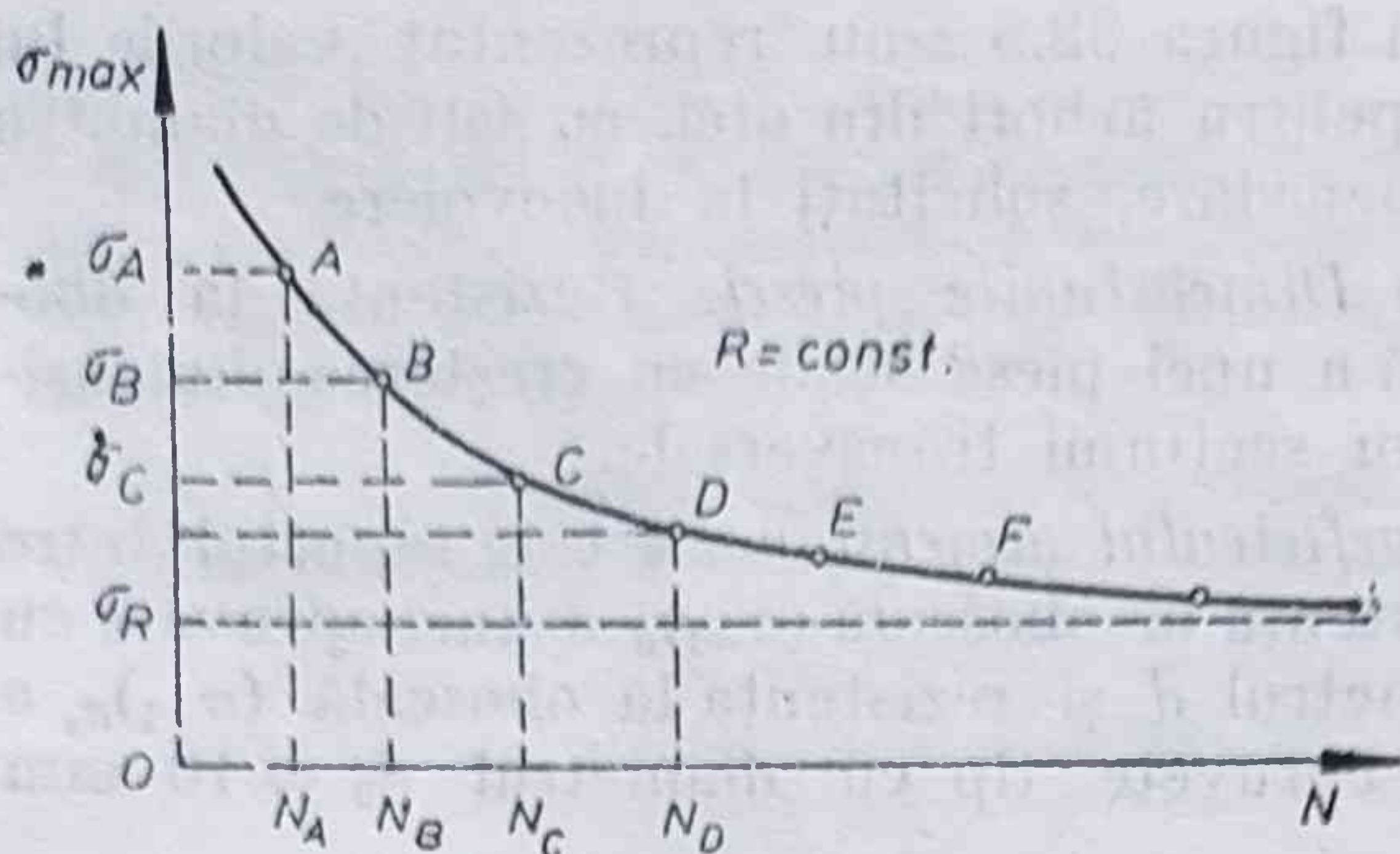


Fig. 32.3

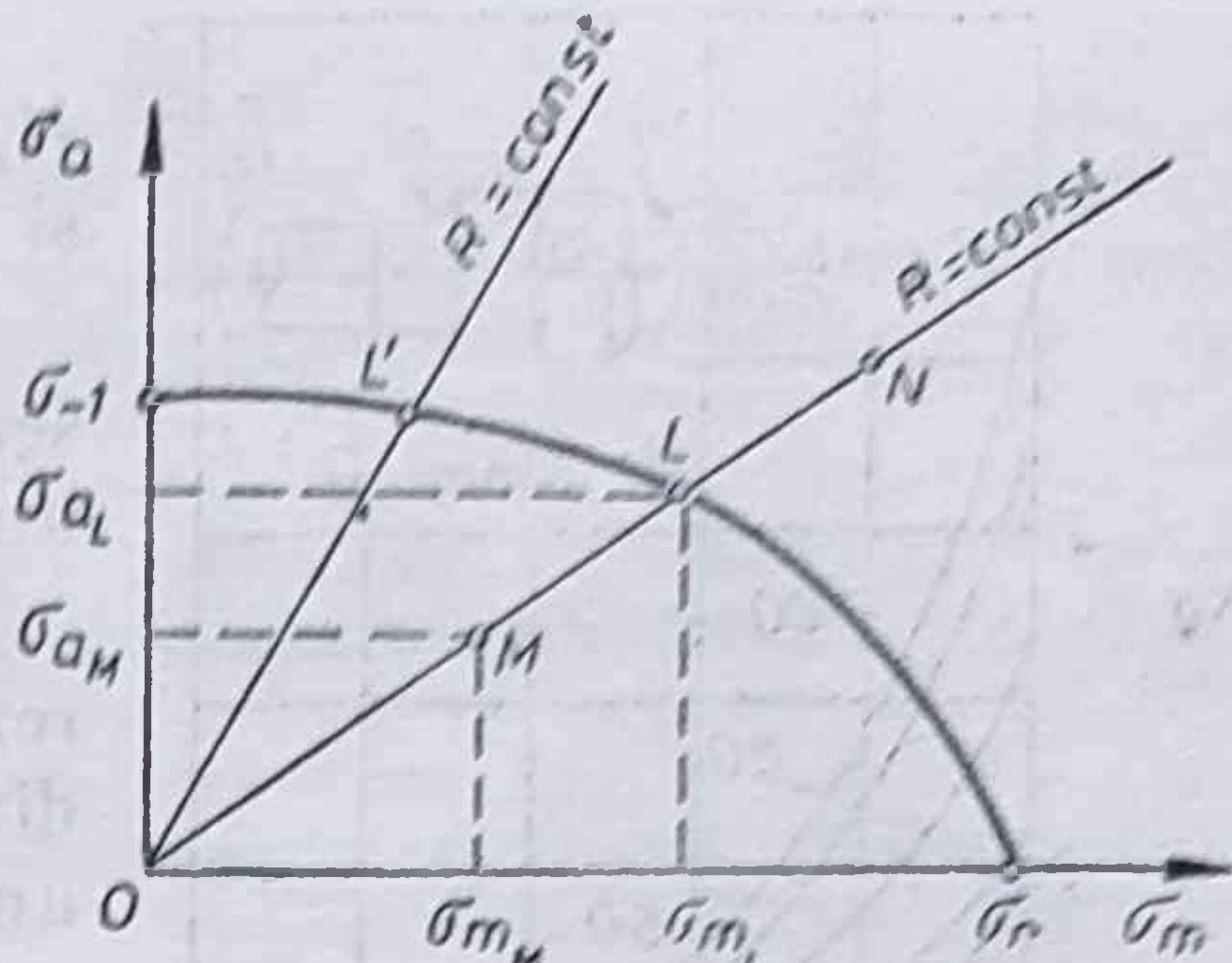


Fig. 32.4

Toate punctele, situate pe o dreaptă care trece prin origine, definesc cicluri de solicitări variabile cu același coeficient de asimetrie. Într-adevăr,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sigma_{aM}}{\sigma_{mM}} = \frac{\sigma_{\max M} - \sigma_{\min M}}{\sigma_{\max M} + \sigma_{\min M}} = \frac{1 - R}{1 + R}.$$

Suma coordonatelor unui punct reprezintă efortul unitar maxim al ciclului :

$$\sigma_{\max M} = \sigma_{mM} + \sigma_{aM}.$$

Pe măsura îndepărtării de origine, punctele de pe dreapta OM reprezintă cicluri de solicitare cu σ_{\max} tot mai mare, astfel că într-un punct L, σ_{\max} devine egal cu rezistența la oboseală a materialului :

$$\sigma_{\max L} = \sigma_{mL} + \sigma_{aL} = \sigma_R.$$

Pe o altă dreaptă, de înclinare diferită, punctul L' corespunde unui ciclu cu $\sigma_{\max L'} = \sigma_{R'}$. Locul geometric al punctelor L (care reprezintă cicluri de solicitare avînd efortul unitar maxim egal cu rezistența la oboseală a materialului) se numește *curba ciclurilor limită* sau *diagrama rezistențelor la oboseală*. Orice punct M, situat între curbă și axe de coordonate, definește un ciclu de solicitări variabile care nu duce la ruperea prin oboseală, iar orice punct N, situat în afara curbei, reprezintă un ciclu care duce la rupere prin oboseală.

32.3. FACTORII CARE INFLUENȚEAZĂ REZISTENȚA LA OBOSEALĂ

Rezistența la oboseală a pieselor de mașini depinde de o serie de factori, dintre care o parte (concentrarea eforturilor unitare, dimensiunile pieselor și calitatea suprafeței) intervin în calcule prin intermediul unor coeficienți cu ajutorul cărora se exprimă rezistența la oboseală a piesei reale, în funcție de rezistența la oboseală a epruvetei standardizate.

a) *Concentrarea eforturilor unitare* micșorează rezistența la oboseală a unei piese.

Coeficientul efectiv de concentrare la solicitări variabile K_σ se definește prin raportul între rezistența la oboseală σ_{-1} a unei epruvete fără concentrator și rezistența la oboseală $(\sigma_{-1})_k$ a unei epruvete cu concentrator de eforturi unitare, cu aceeași secțiune și din același material :

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(\sigma_{-1})_k}.$$

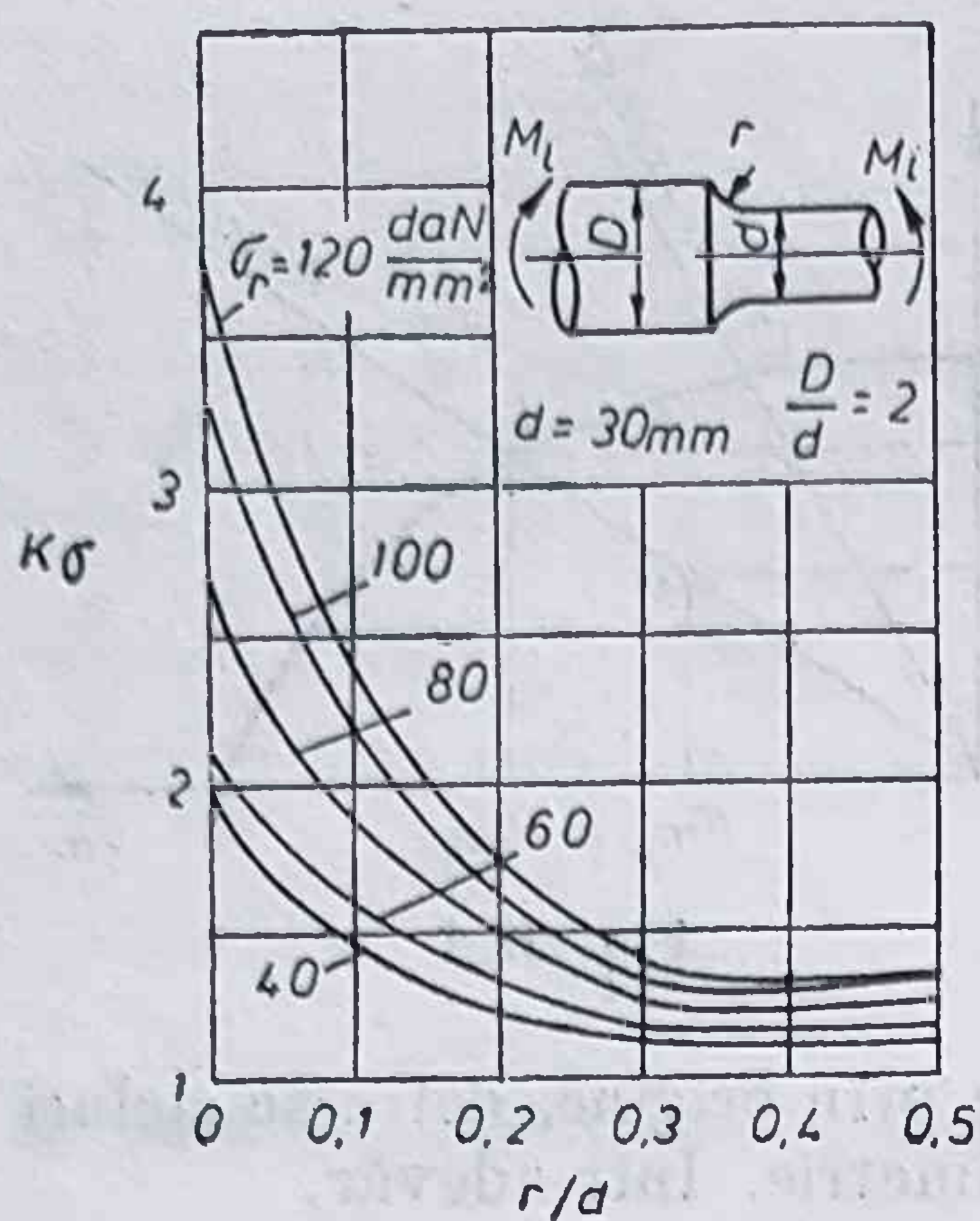


Fig. 32.5

În figura 32.5 s-au reprezentat valorile lui K_σ pentru arbori din oțel, cu salt de diametru și racordare, solicitați la încovoiere.

b) *Dimensiunile piesei.* Rezistența la oboseală a unei piese scade cu creșterea dimensiunilor secțiunii transversale.

Coeficientul dimensional ϵ este raportul între rezistența la oboseală $(\sigma_{-1})_a$ a unei epruvete cu diametrul d și rezistența la oboseală $(\sigma_{-1})_{a_0}$ a unei epruvete tip cu diametrul $d_0 = 10$ mm

$$\epsilon = \frac{(\sigma_{-1})_a}{(\sigma_{-1})_{a_0}}$$

În diagrama din figura 32.6 sînt date valorile lui ϵ pentru solicitarea la încovoiere cu $R = -1$, în funcție de material și concentrarea de eforturi unitare :

1 — oțel carbon fără concentratori de eforturi unitare ; 2 — oțel aliat fără concentratori și oțel carbon cu concentratori moderați ; 3 — oțel aliat cu concentratori moderați ; 4 — oțel aliat cu concentratori puternici.

c) *Calitatea suprafeței* piesei este factorul determinant al rezistenței la oboseală, deoarece ruperea prin oboseală este amorată de fisuri superficiale.

Coeficientul de stare a suprafeței γ este raportul între rezistența la oboseală $(\sigma_{-1})_p$ a unei epruvete cu o prelucrare oarecare și rezistența la oboseală σ_{-1} a unei epruvete cu aceleași dimensiuni, dar cu suprafața lustruită :

$$\gamma = \frac{(\sigma_{-1})_p}{\sigma_{-1}}$$

În figura 32.7 se dau valorile lui γ pentru piese din oțel solicitate la încovoiere. Linia 1 corespunde unei suprafețe lustruite, curba 2 — unei suprafețe

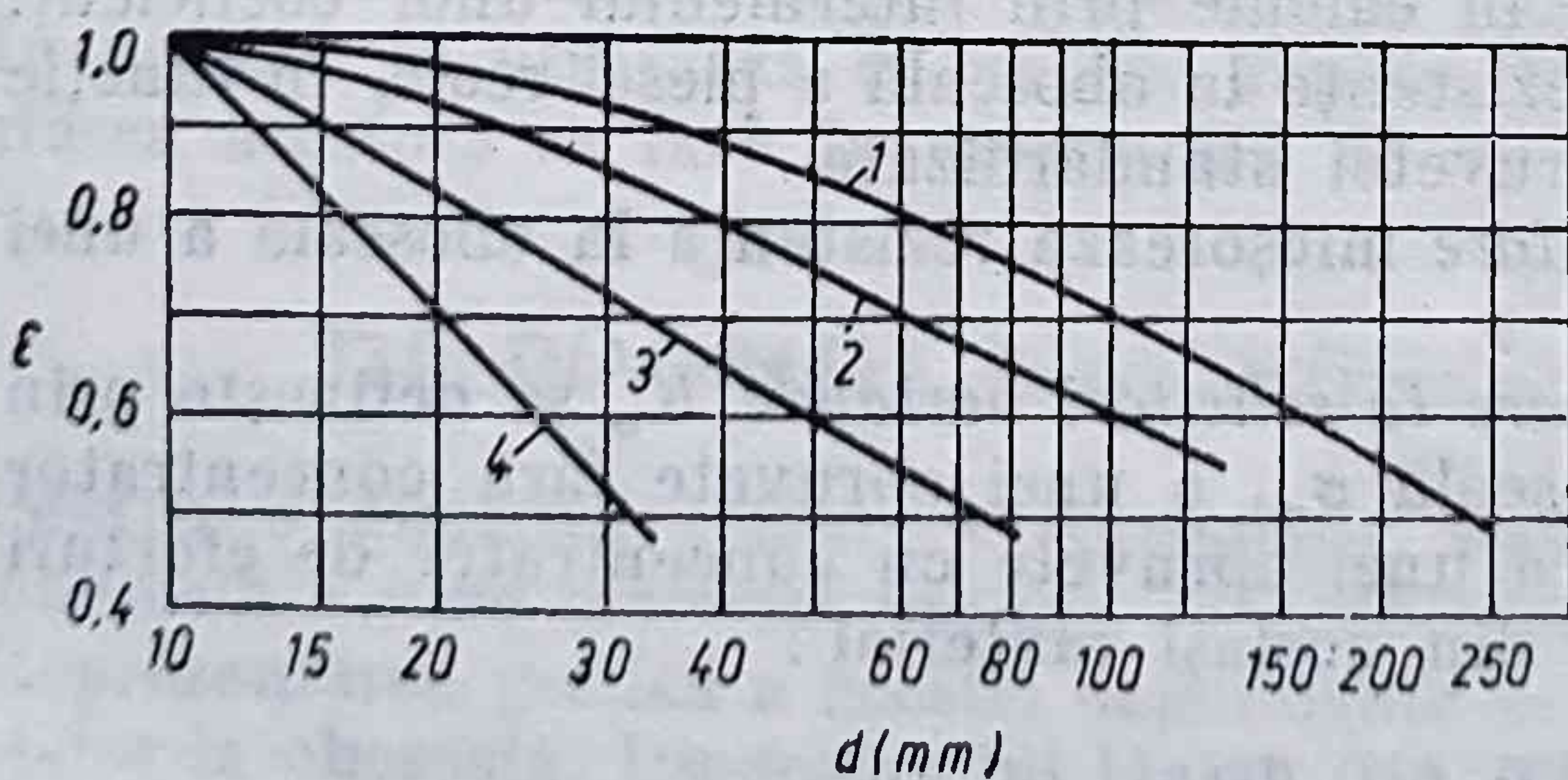


Fig. 32.6

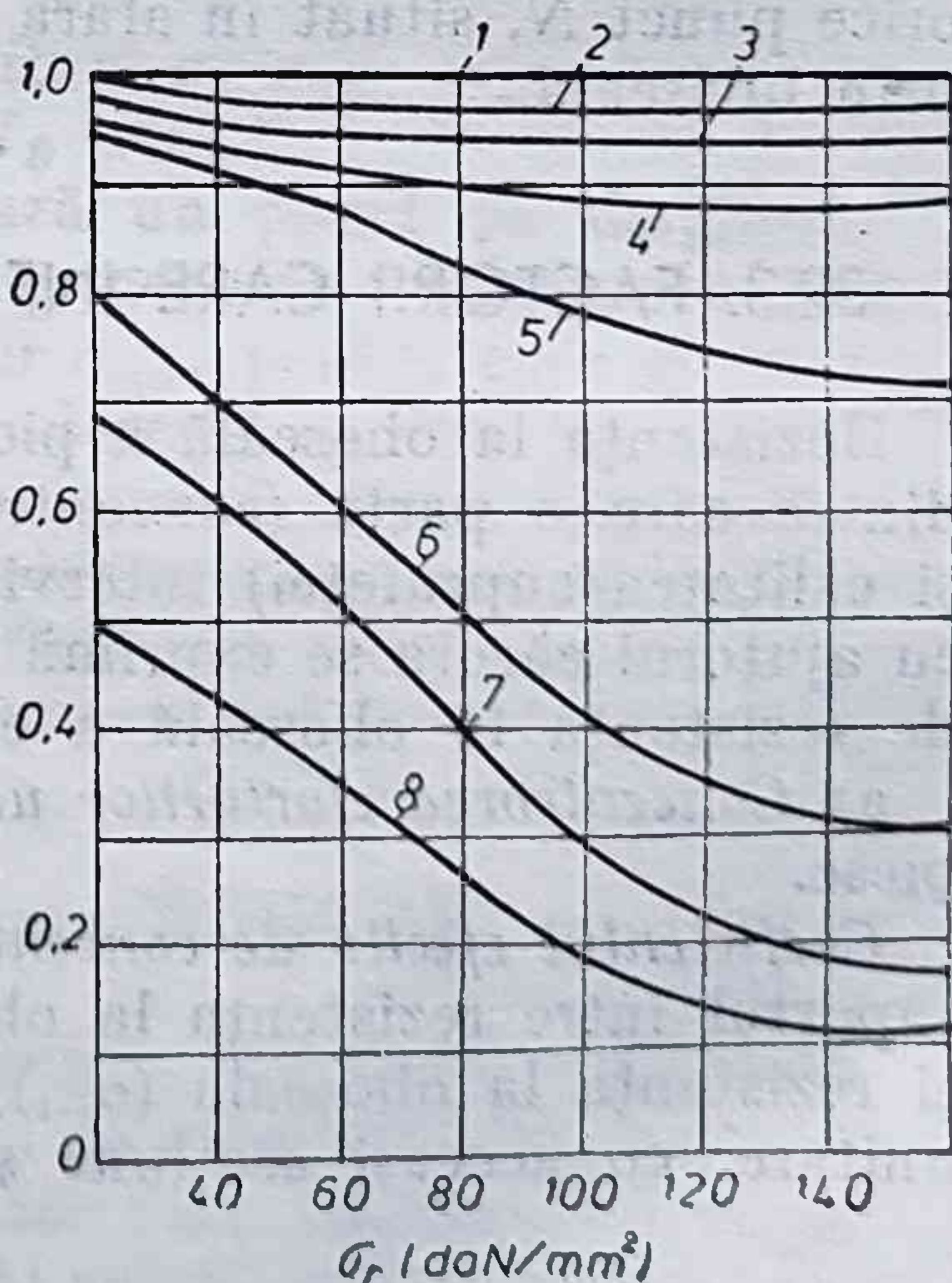


Fig. 32.7

rectificate fin, curba 3 — unei suprafețe rectificate semifin, curba 4 — unei suprafețe finisate cu o sculă așchietoare, curba 5 — unei suprafețe degroșate, curba 6 — unei suprafețe cu crustă de laminare, curba 7 — unei suprafețe supuse coroziunii în apă dulce și curba 8 — unei suprafețe supuse coroziunii în apă sărată.

Dacă se cunoaște rezistența la oboseală a epruvetei $(\sigma_{-1})_{ep}$ și valorile coeficienților K_σ , ϵ , γ , rezistența la oboseală a piesei se calculează cu relația :

$$(\sigma_{-1})_{piesă} = \frac{\epsilon \cdot \gamma}{K_\sigma} (\sigma_{-1})_{eprovă}. \quad (32.2)$$

32.4. CALCULUL COEFICIENTULUI DE SIGURANȚĂ LA OBOSEALĂ

Pentru calculul coeficientului de siguranță la oboseală prin solicitări simple, Soderberg a propus schematizarea diagramei lui Haigh printr-o linie dreaptă (fig. 32.8). Linia ciclurilor limită BC corespunde unui coeficient de siguranță $c = 1$. În figură, $OB = \sigma_{-1}$ este rezistența la oboseală la cicluri alternant simetrice, iar $OC = \sigma_c$ este limita de curgere statică.

Pentru ciclul corespunzător punctului M , coeficientul de siguranță la oboseală se definește ca raport între efortul unitar maxim al ciclului limită cu același coeficient de asimetrie $\sigma_{max_L} = \sigma_R$ și efortul unitar al ciclului considerat σ_{max_M} :

$$c = \frac{\sigma_{max_L}}{\sigma_{max_M}}.$$

Dreapta $B'C'$, paralelă cu BC , este locul geometric al punctelor care definesc cicluri de solicitare, pentru care coeficientul de siguranță la oboseală are valoarea c .

Într-adevăr, din asemănarea triunghiurilor OMN și OLK rezultă :

$$\frac{OK}{ON} = \frac{\sigma_{m_L}}{\sigma_{m_M}} = \frac{LK}{MN} = \frac{\sigma_{a_L}}{\sigma_{a_M}} = \frac{\sigma_{m_L} + \sigma_{a_L}}{\sigma_{m_M} + \sigma_{a_M}} = \frac{\sigma_{max_L}}{\sigma_{max_M}} = c,$$

deci $OB' = \frac{\sigma_{-1}}{c}$ și $OC' = \frac{\sigma_c}{c}$.

Ecuatia dreptei $B'C'$ se scrie :

$$\frac{\sigma_a}{\frac{\sigma_{-1}}{c}} + \frac{\sigma_m}{\frac{\sigma_c}{c}} = 1.$$

Rezultă formula coeficientului de siguranță la solicitări prin cicluri nesimetrice :

$$c = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_c}}. \quad (32.3)$$

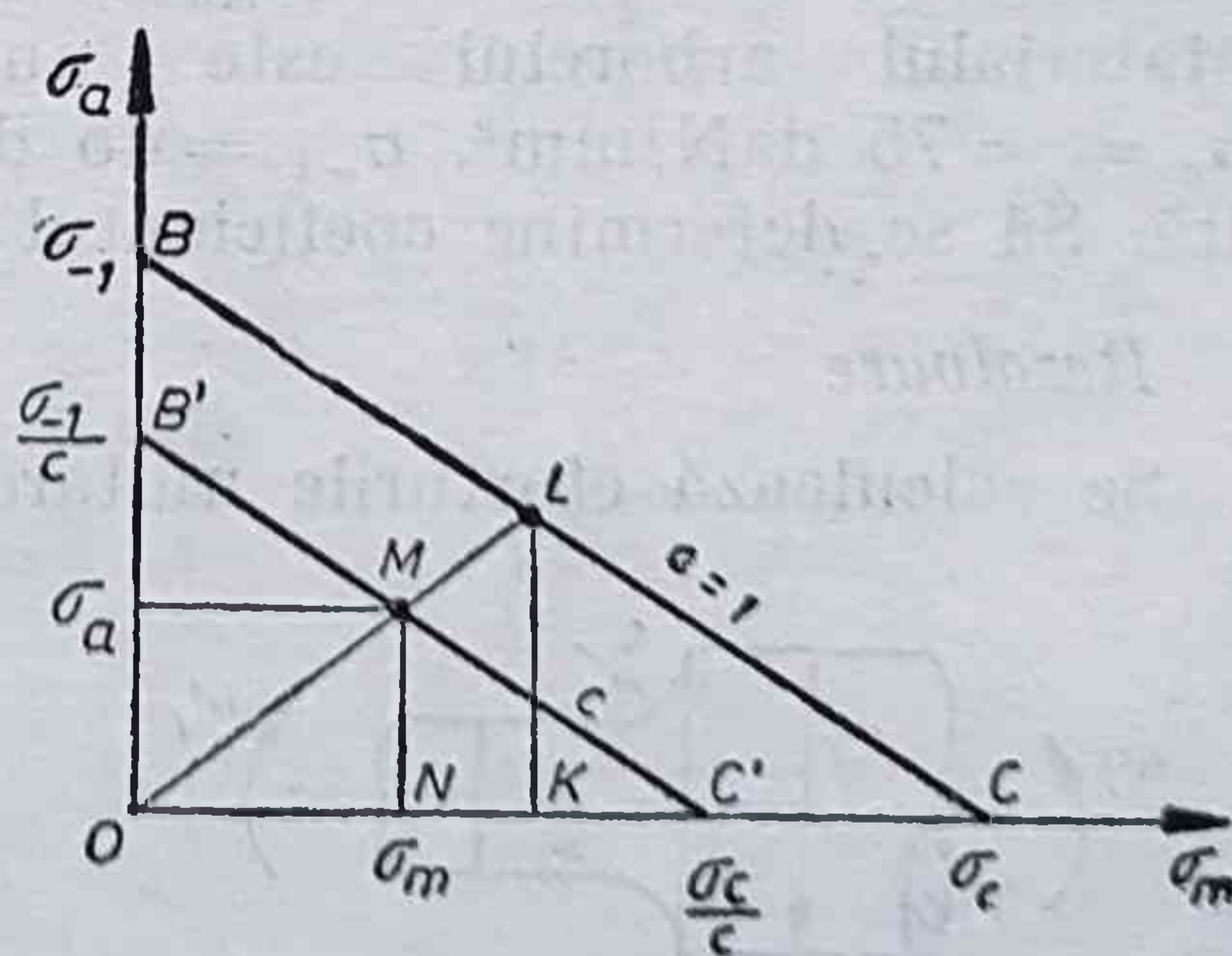


Fig. 32.8

Dacă se notează cu σ_{-1} rezistența la oboseală a epruvetei tip, atunci conform relației (32.3) rezultă coeficientul de siguranță la oboseală al piesei reale :

$$c = \frac{1}{\frac{K_{\sigma}}{\varepsilon \cdot \gamma} \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_e}}. \quad (32.4)$$

Valorile astfel determinate se compară cu cele recomandate în norme de calcul.

APLICAȚIA 1

Un arbore de secțiune circulară, cu diametrul $d = 40$ mm, avînd suprafața rectificată fin, este confecționat din oțel OL 50 cu $\sigma_{-1} = 20$ daN/mm². Să se calculeze coeficientul de siguranță la oboseală dacă arborele este solicitat la încovoiere cu un moment care variază între limitele ± 640 Nm.

Rezolvare

Pentru solicitarea prin ciclu alternant simetric, $\sigma_m = 0$.

Se calculează :

$$W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 4^3}{32} = 6,28 \text{ cm}^3,$$

$$\sigma_{max} = \sigma_a = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{6\,400}{6,28} = 1\,019 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

Pentru suprafața rectificată fin și $\sigma_r = 50 \frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}$, curba 2 din figura 32.7 dă $\gamma = 0,97$. Din figura 32.6 se obține $\varepsilon = 0,88$ (curba 1 și $d = 40$ mm). Se consideră $K_{\sigma} = 1$. Rezultă :

$$c = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_{\sigma}}{\varepsilon \cdot \gamma} \sigma_a} = \frac{2\,000}{\frac{1}{0,88 \cdot 0,97} \cdot 1\,019} = 1,67.$$

APLICAȚIA 2

Un arbore avînd dimensiunile $d = 30$ mm, $D = 60$ mm și $r = 3$ mm (fig. 32.9) este supus la o solicitare ondulantă de încovoiere, momentul variînd între valorile $M_{i_{max}} = 6\,000$ daNcm și $M_{i_{min}} = 2\,000$ daNcm. Materialul arborelui este un oțel aliat cu $\sigma_r = 100$ daN/mm², $\sigma_e = 75$ daN/mm², $\sigma_{-1} = 45$ daN/mm², suprafața arborelui fiind lustruită. Să se determine coeficientul de siguranță la oboseală.

Rezolvare

Se calculează eforturile unitare ale ciclului :

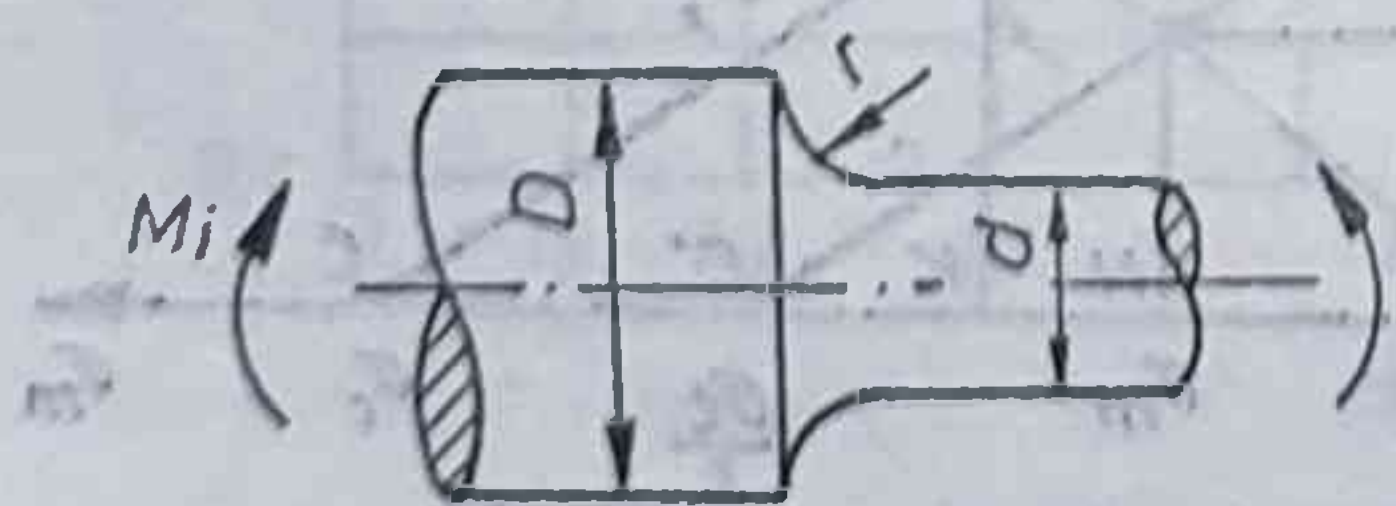


Fig. 32.9

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i_{max}}}{W_z} = \frac{6\,000 \cdot 32}{\pi \cdot 3^3} = 2264,69 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2},$$

$$\sigma_{min} = \frac{M_{i_{min}}}{W_z} = \frac{2\,000 \cdot 32}{\pi \cdot 3^3} = 754,9 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2},$$

$$\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_{max} + \sigma_{min}) = \frac{1}{2} (2264,69 + 754,9) = 1509,8 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2},$$

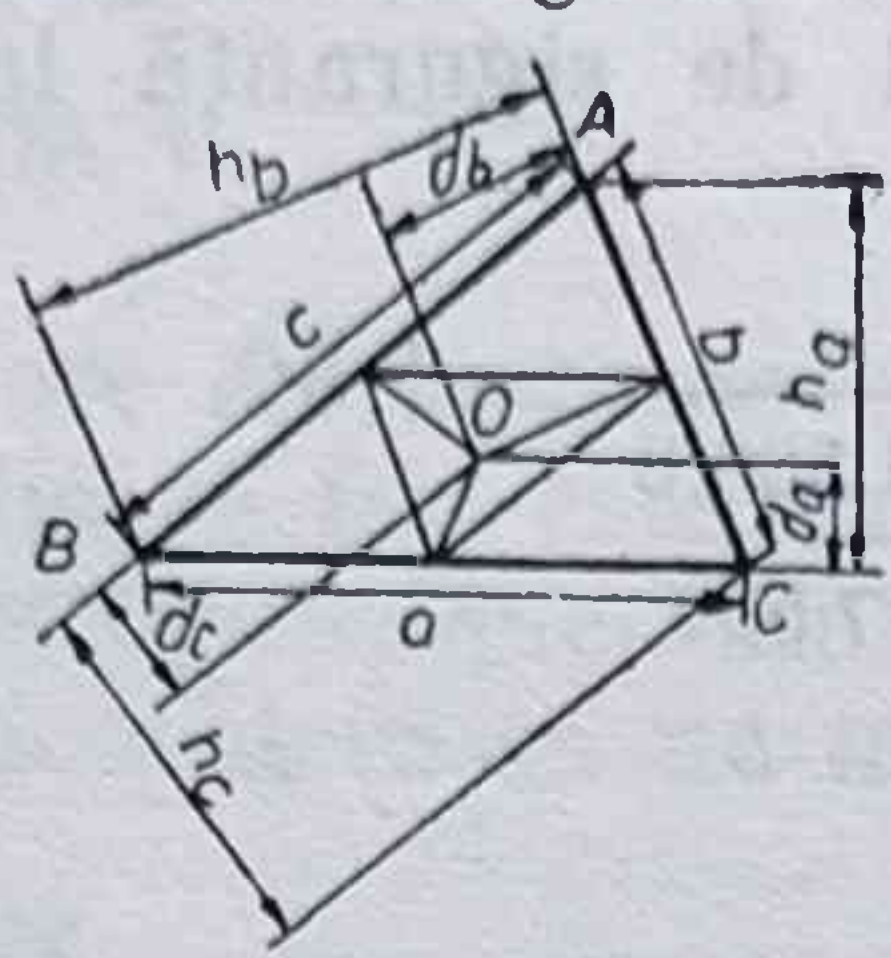
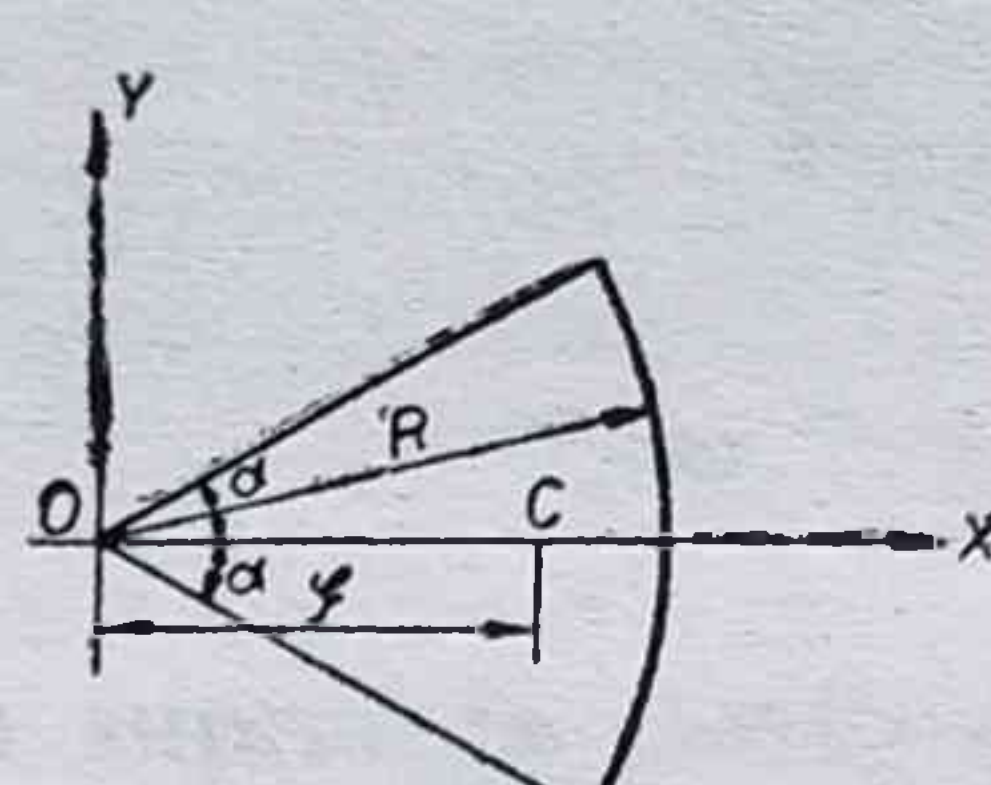
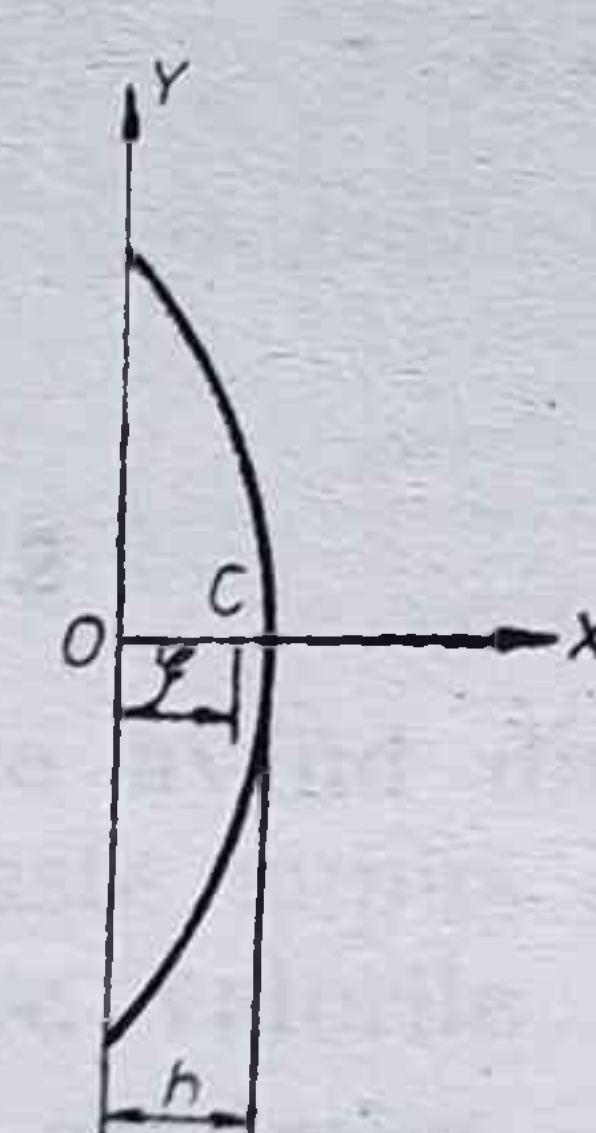
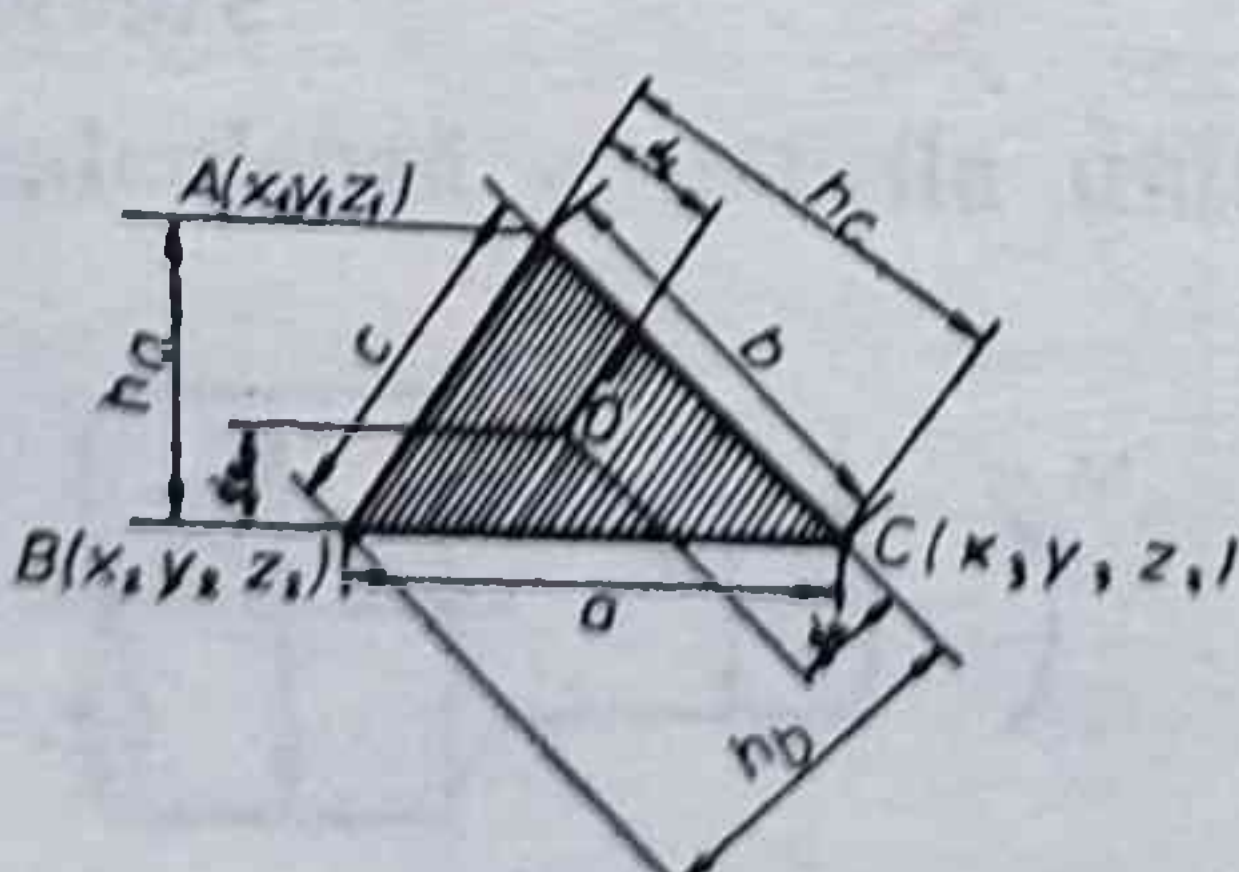
$$\sigma_a = \frac{1}{2} (\sigma_{max} - \sigma_{min}) = \frac{1}{2} (2264,69 - 754,9) = 754,9 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

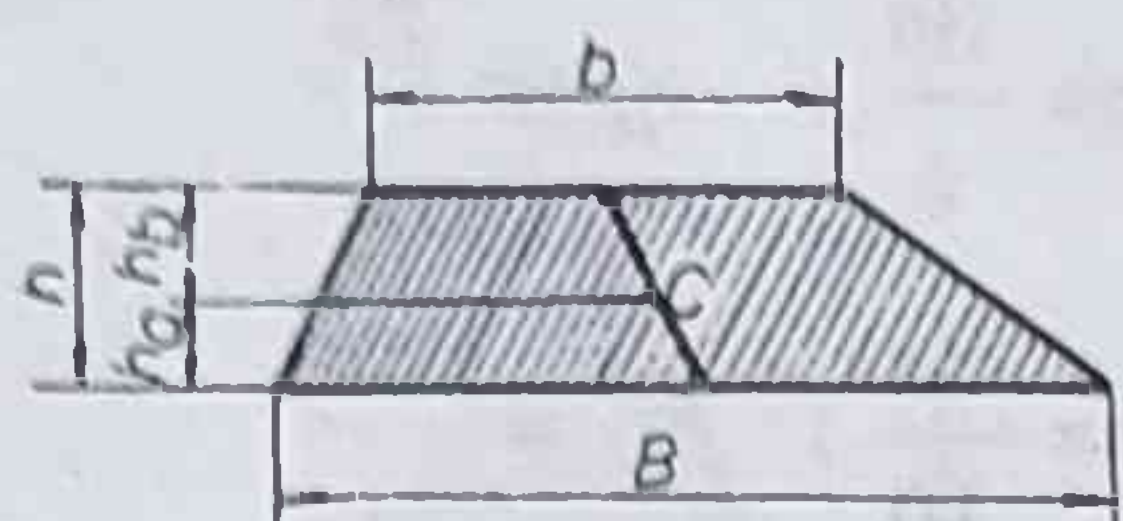
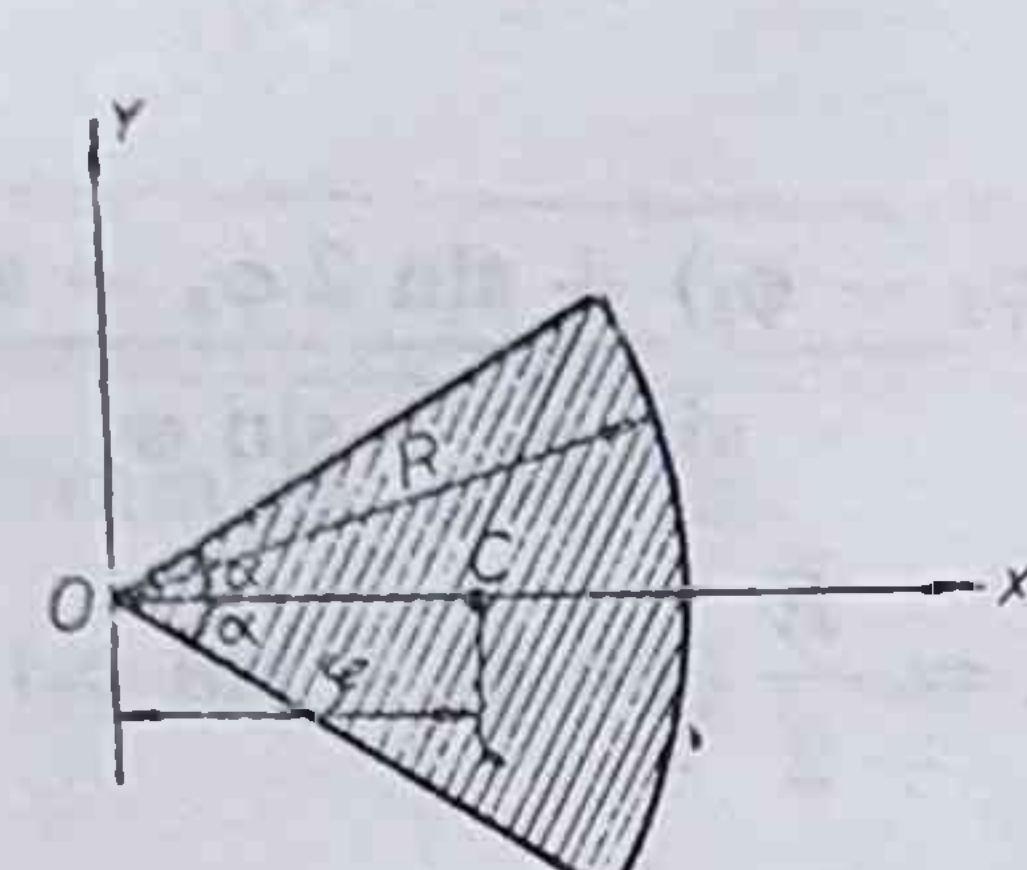
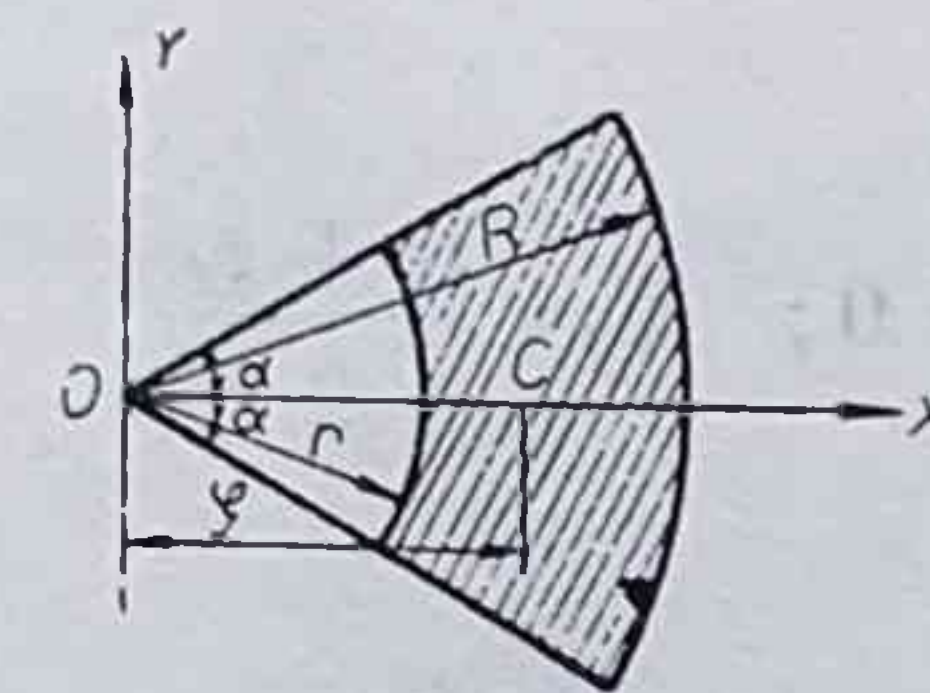
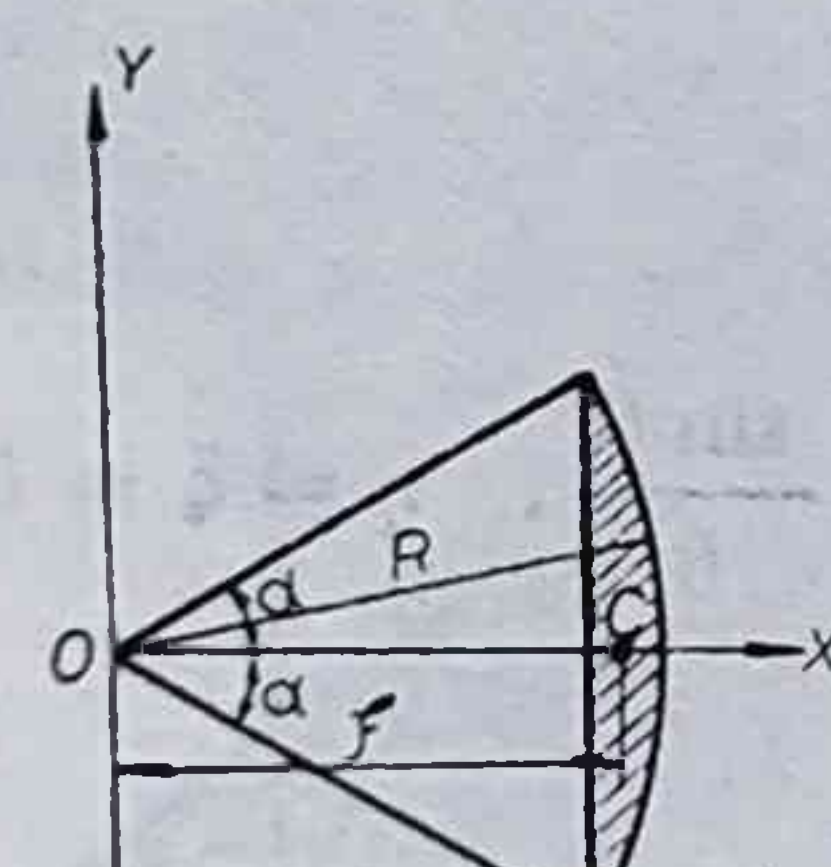
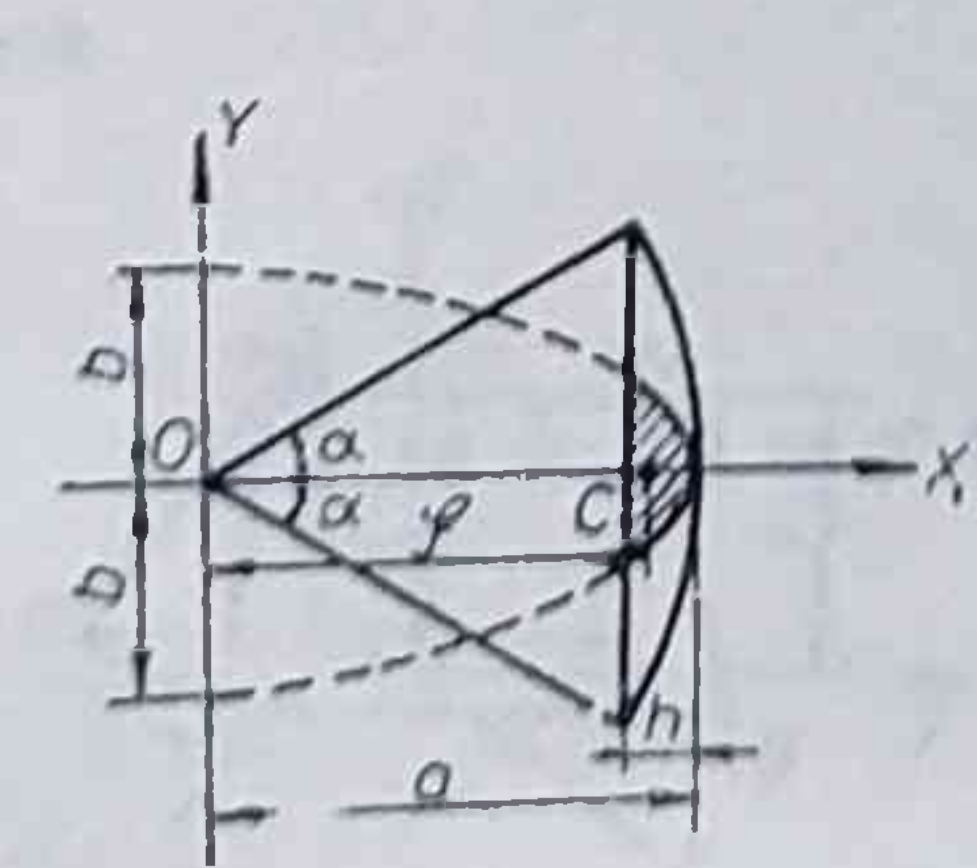
Pentru $\frac{r}{d} = \frac{3}{30} = 0,1$ și $\sigma_r = 100 \text{ daN/mm}^2$, din figura 32.5 rezultă :

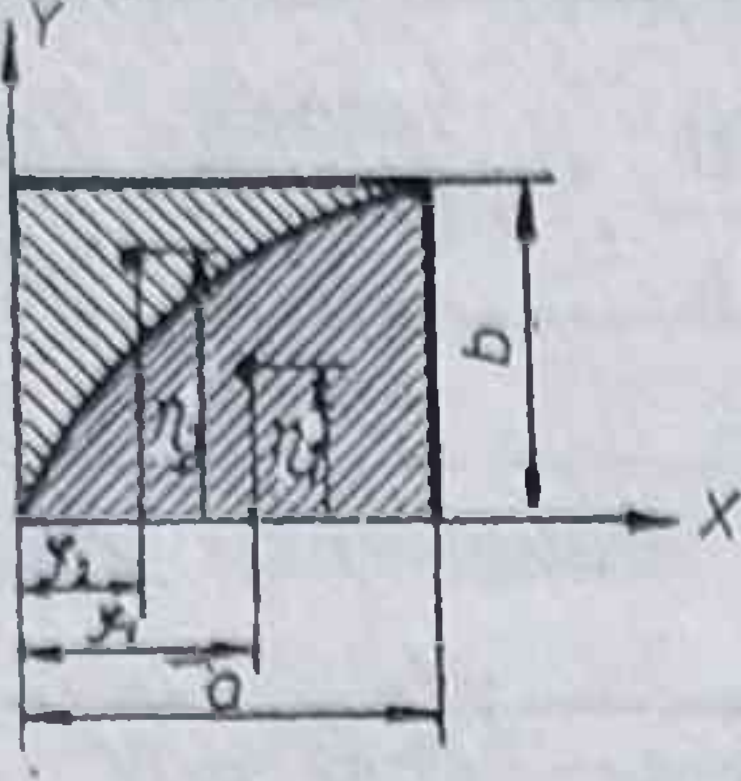
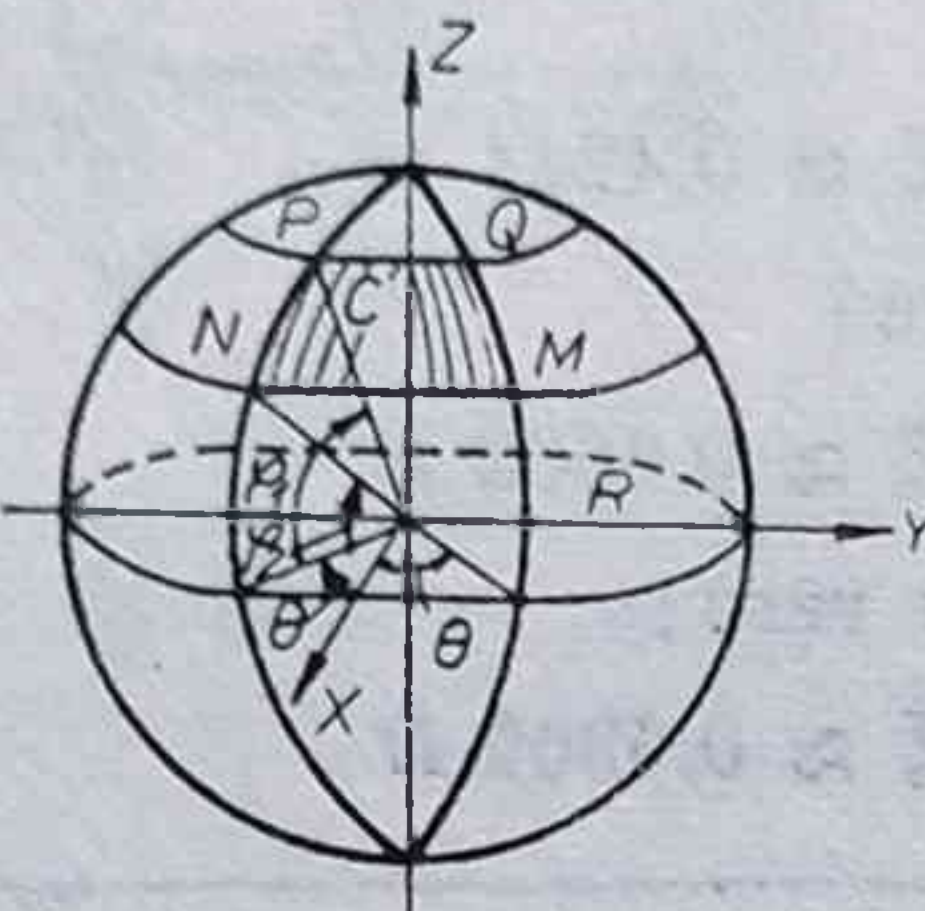
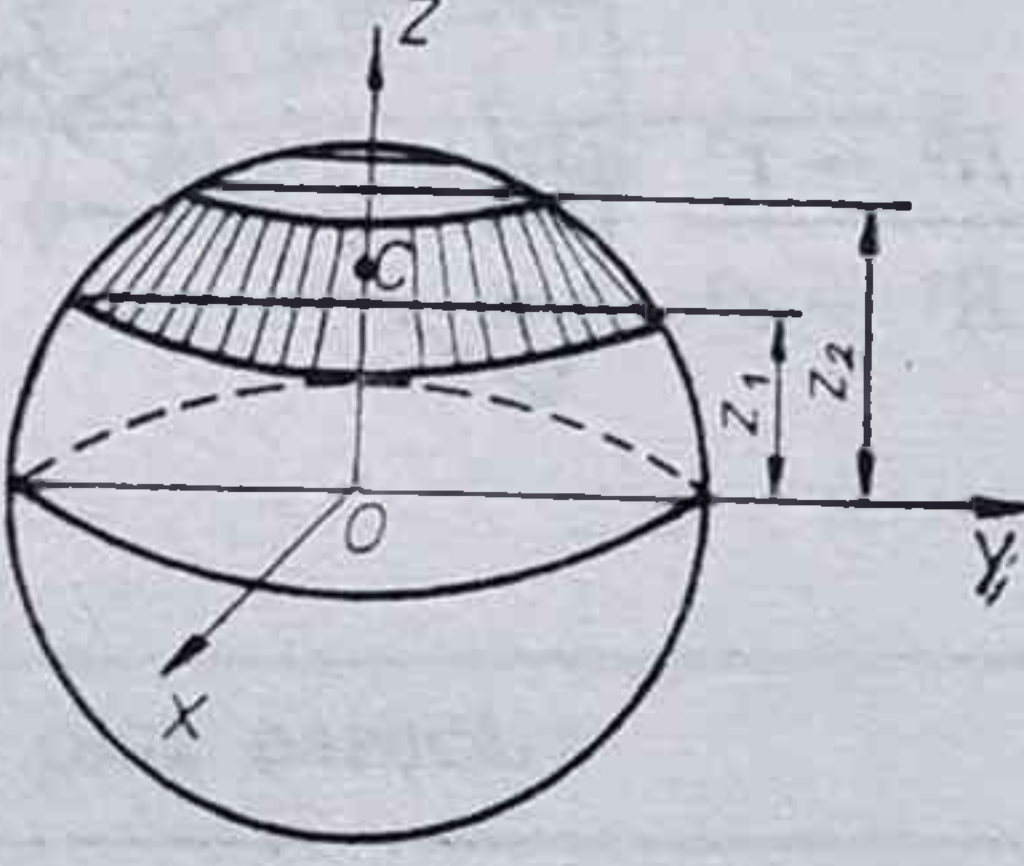
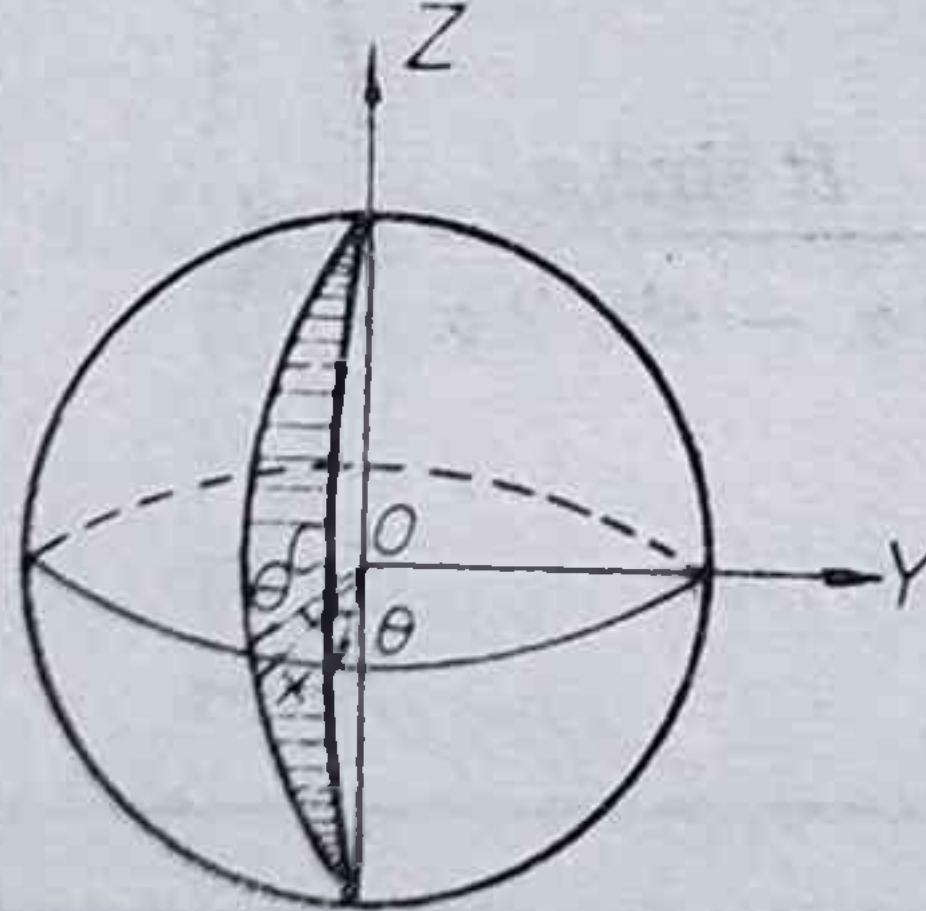
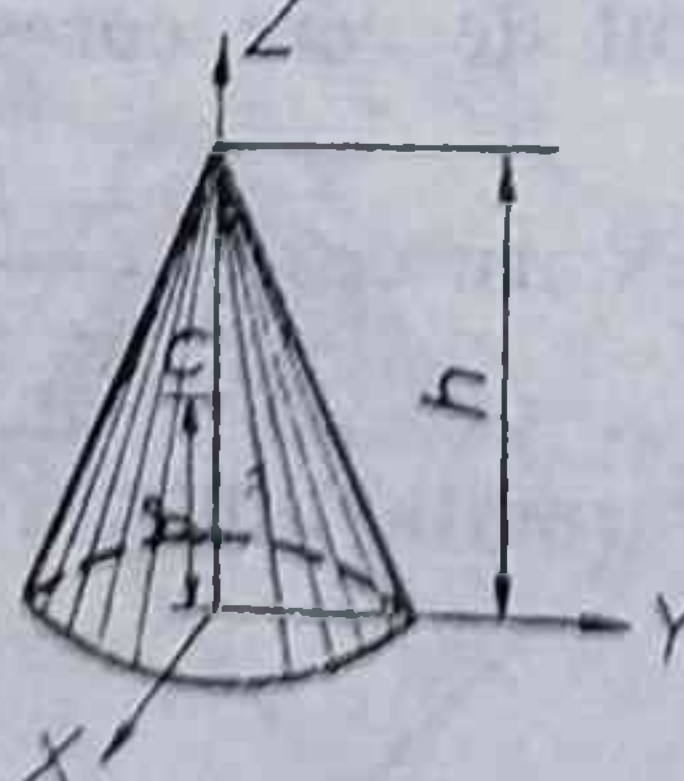
$K_\sigma = 1,85$. Pentru oțel aliat cu concentratori moderați (curba 3) și $d = 30 \text{ mm}$, din figura 32.6 se obține : $\varepsilon = \varepsilon_k = 0,725$. Suprafața fiind lustruită, rezultă $\gamma = 1$ (fig. 32.7). Coeficientul de siguranță la oboseală este :

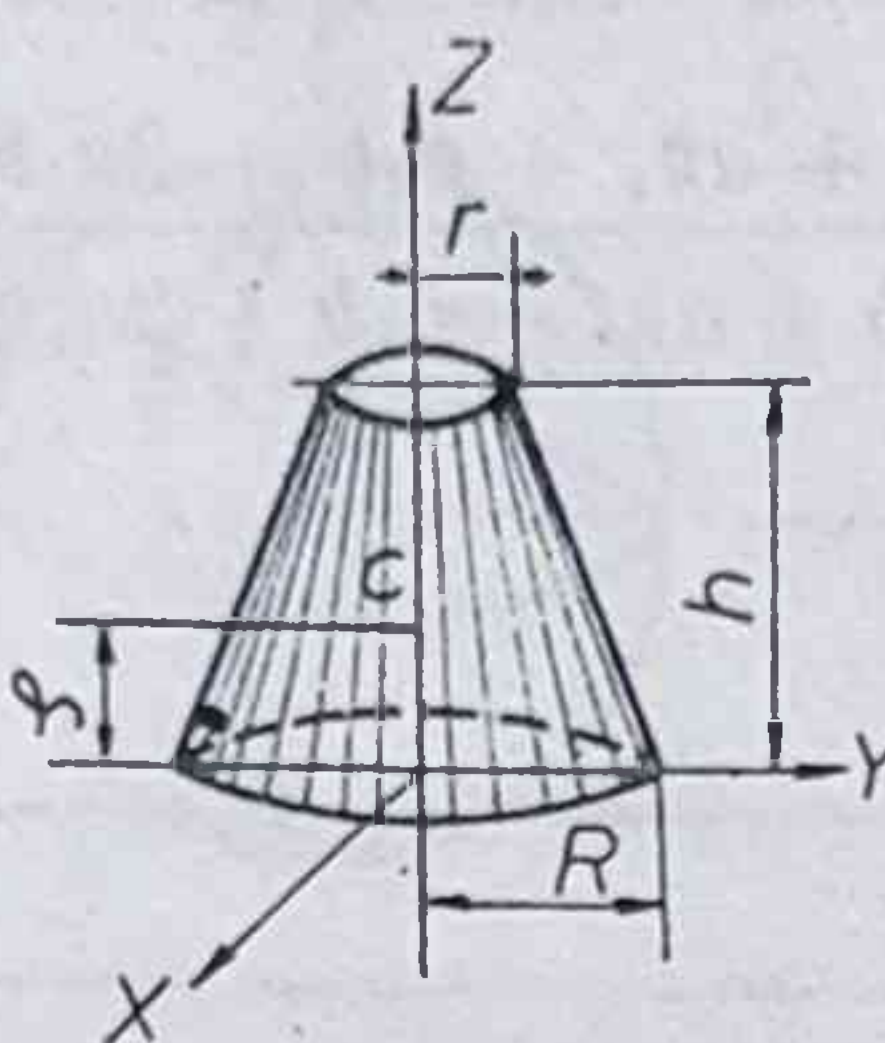
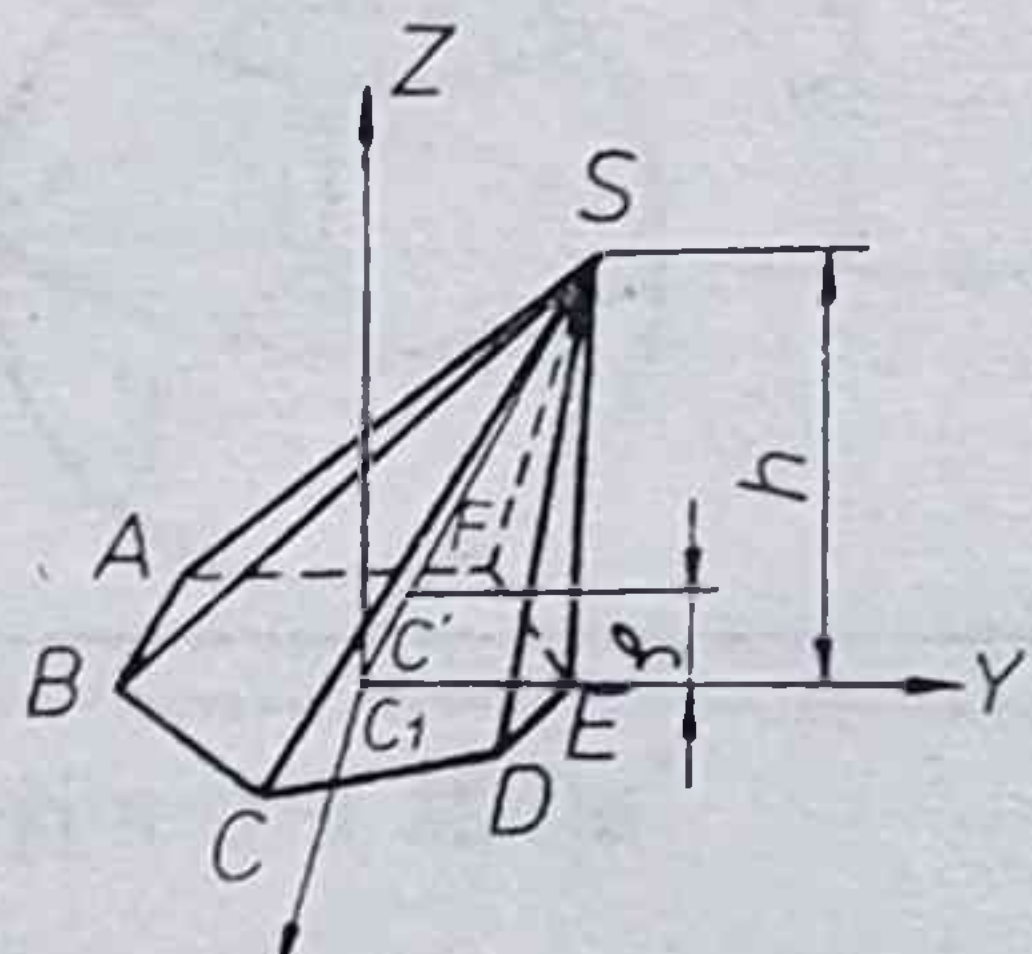
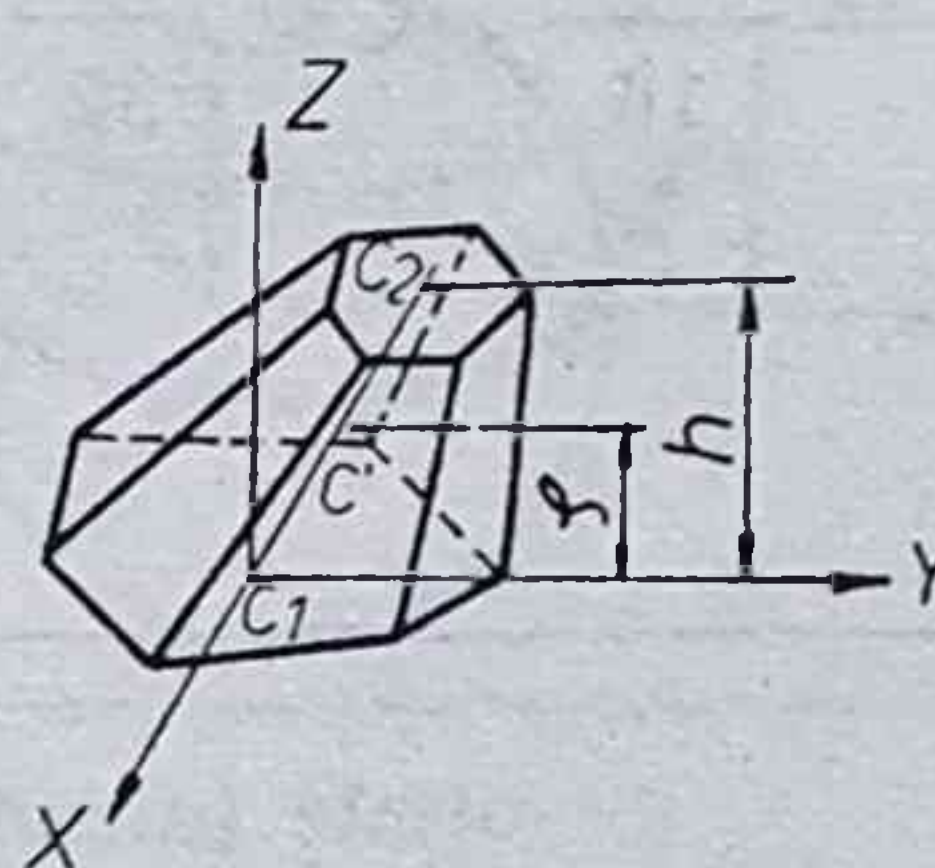
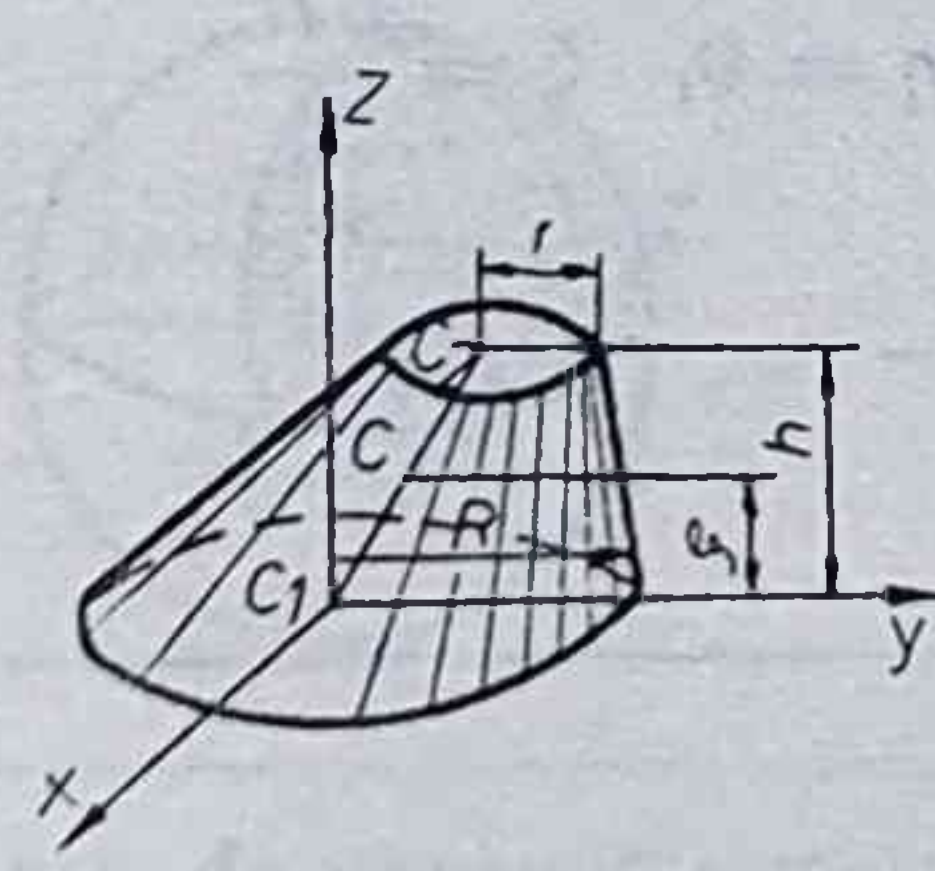
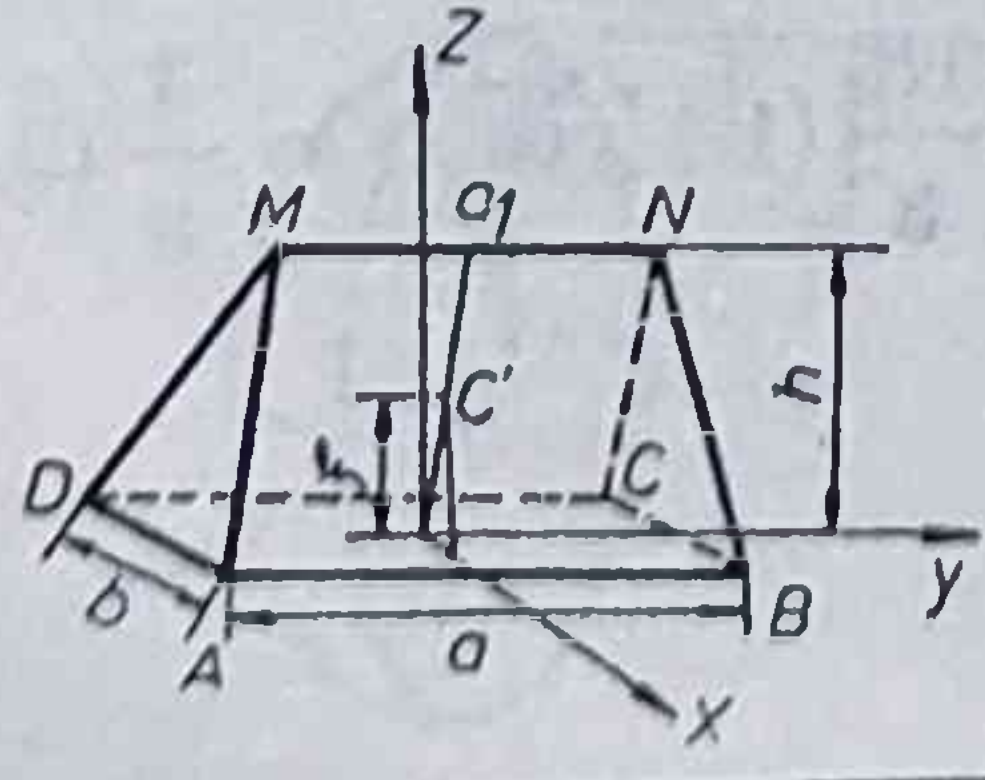
$$c = \frac{1}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon \cdot \gamma} \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_c}} = \frac{1}{\frac{1,85}{0,725} \frac{754,9}{4500} + \frac{1509,8}{7500}} = 1,59.$$

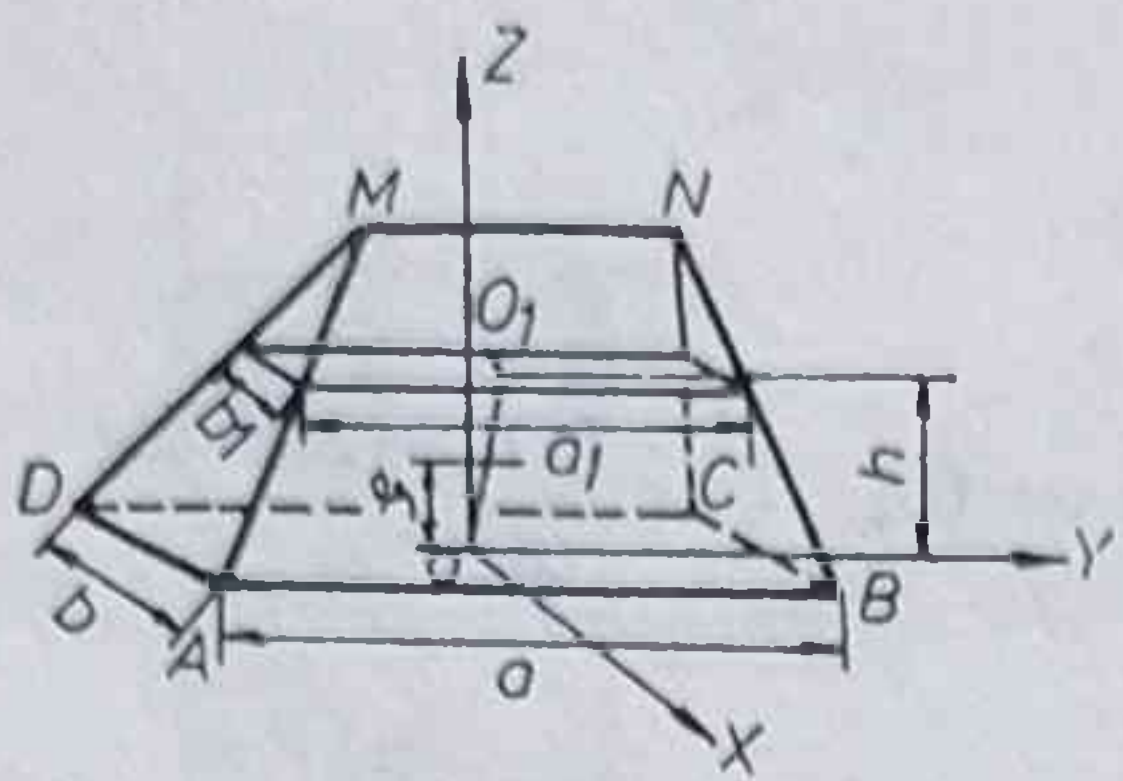
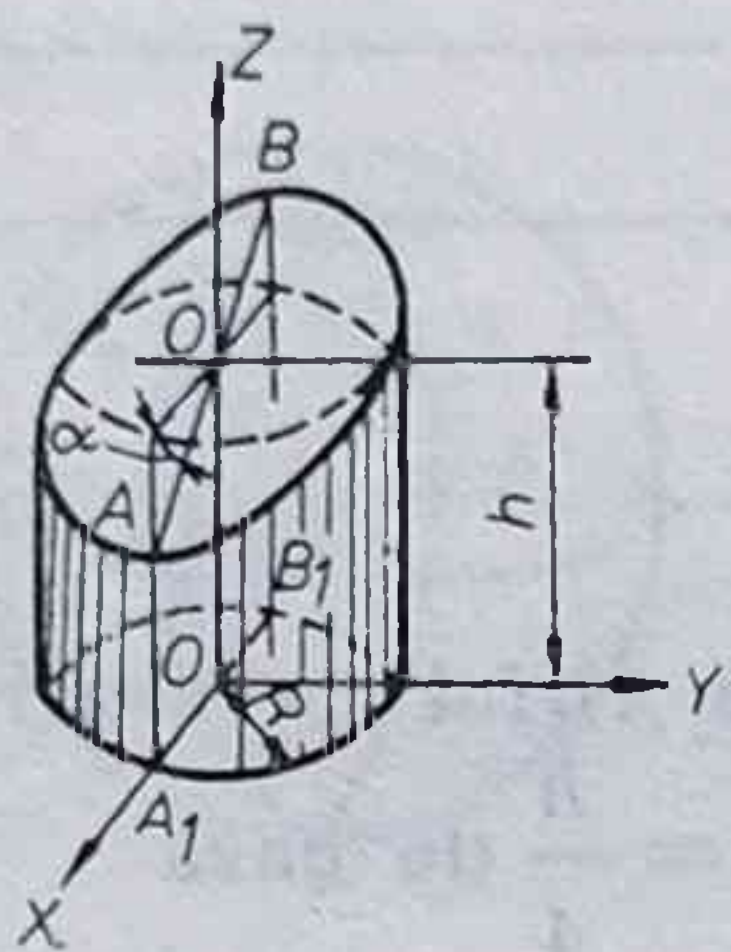
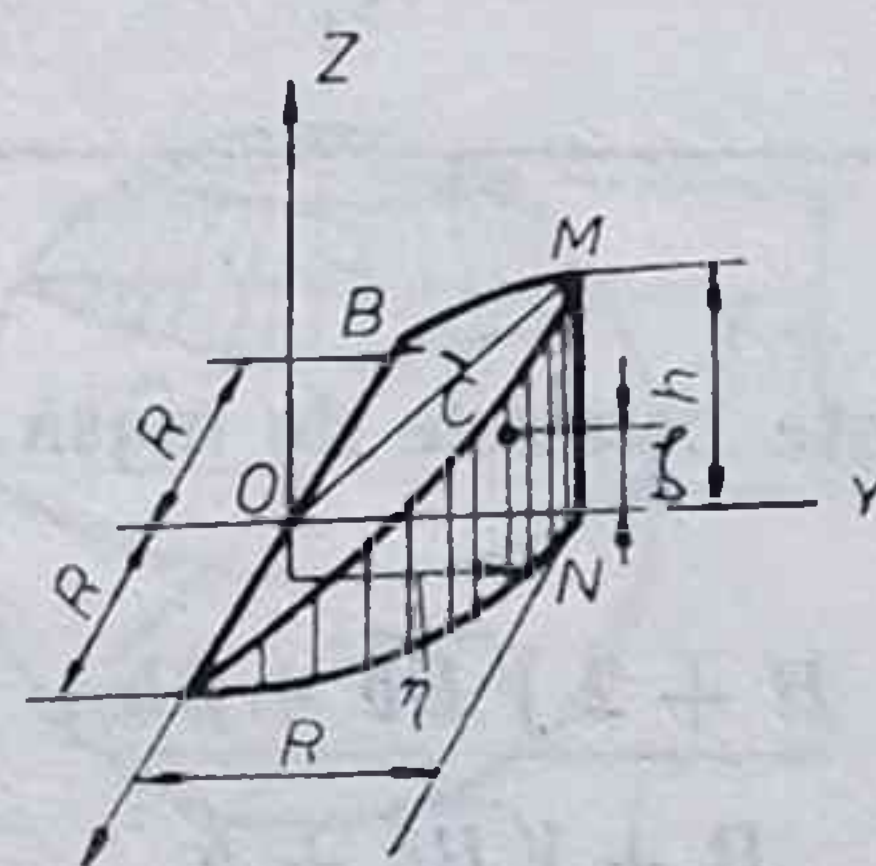
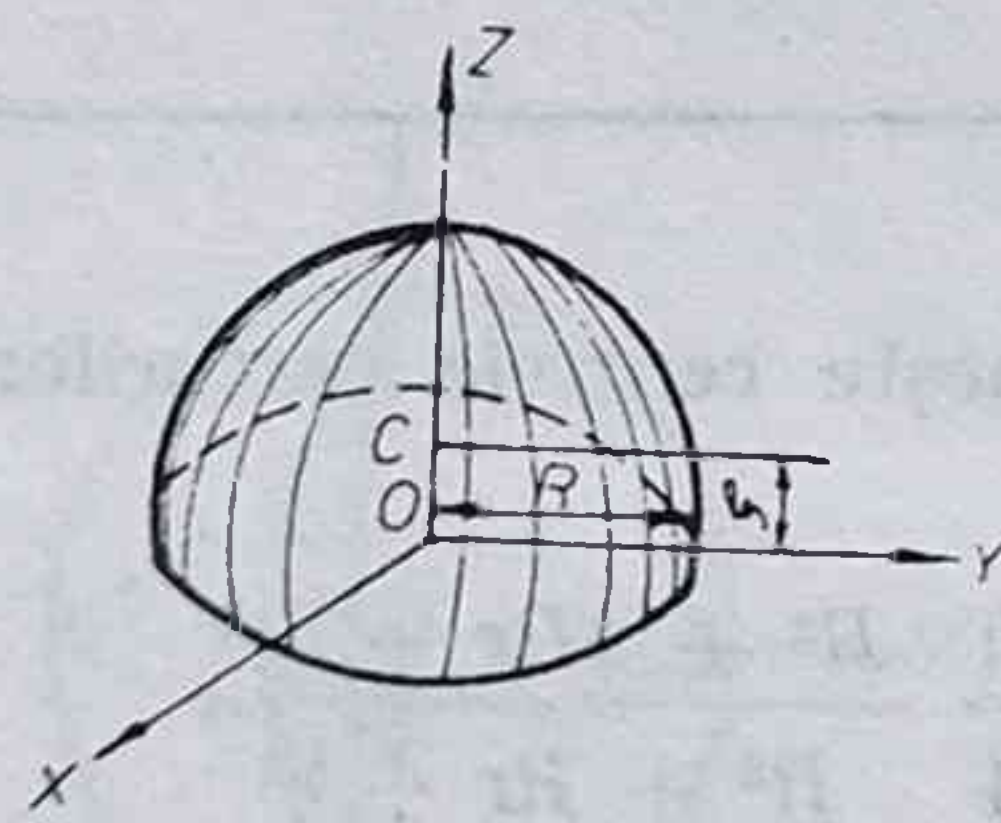
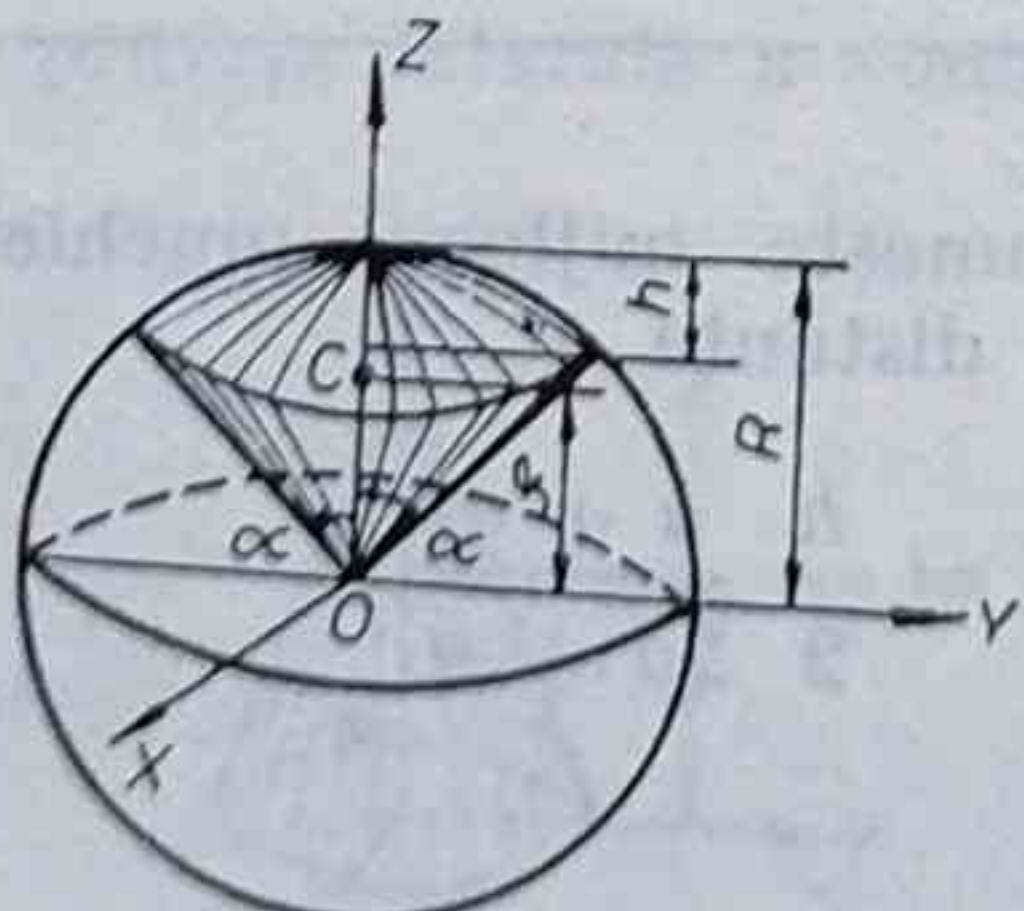
**Relații pentru determinarea poziției centrului de masă
a diverselor figuri geometrice**

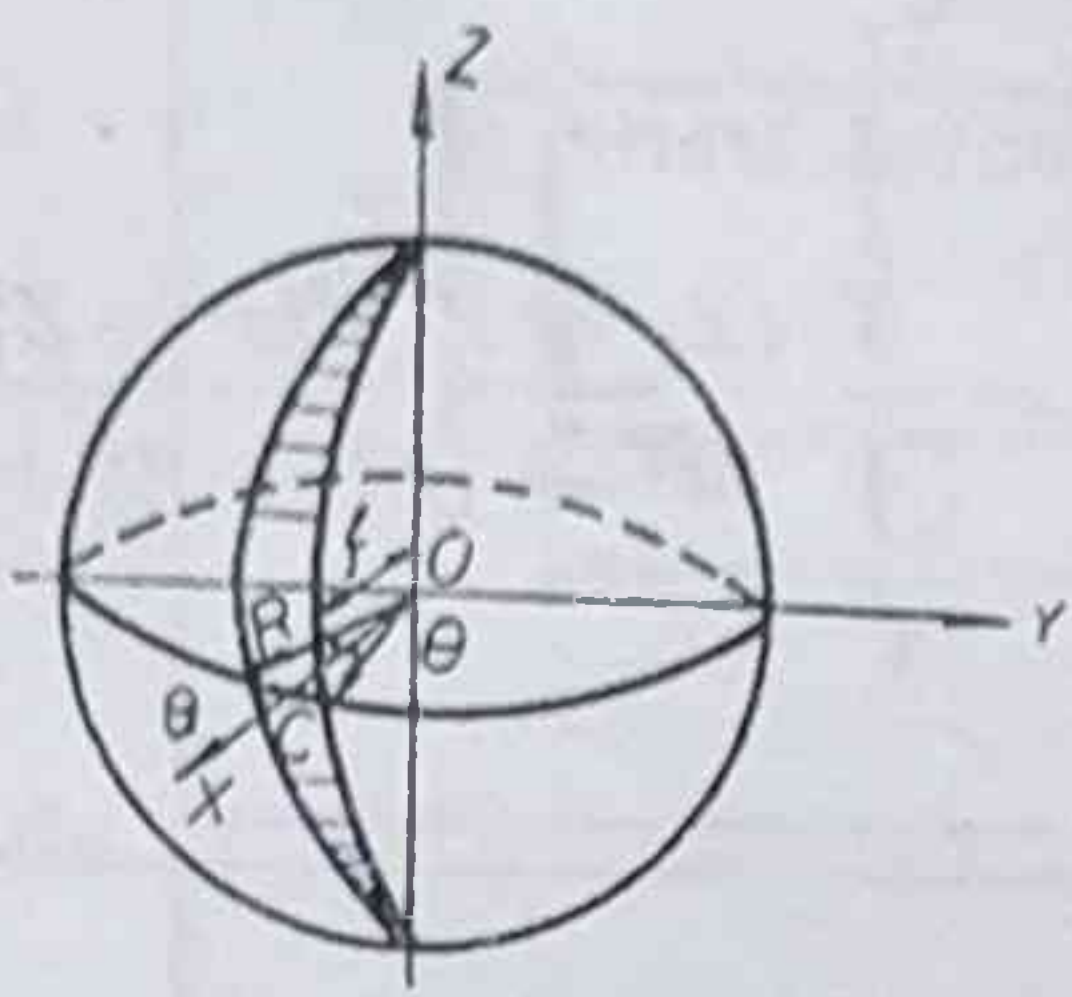
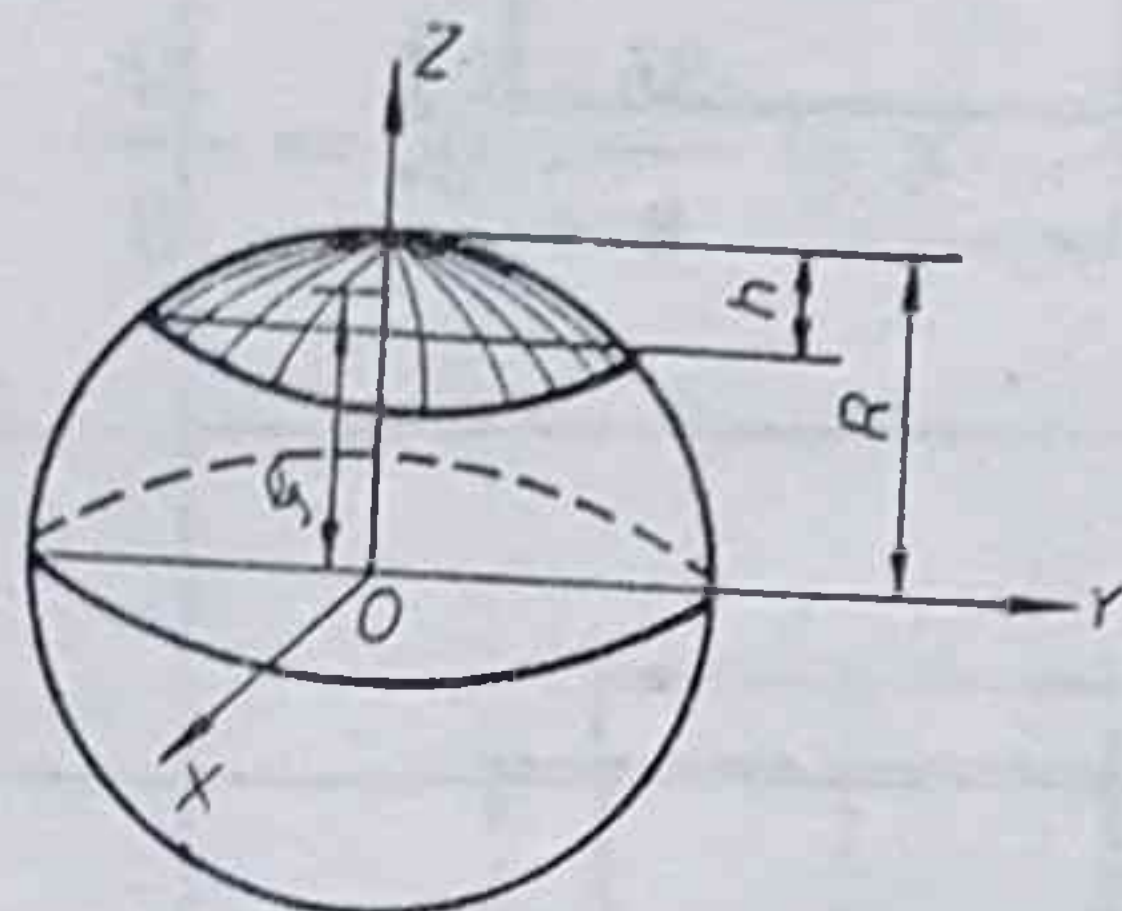
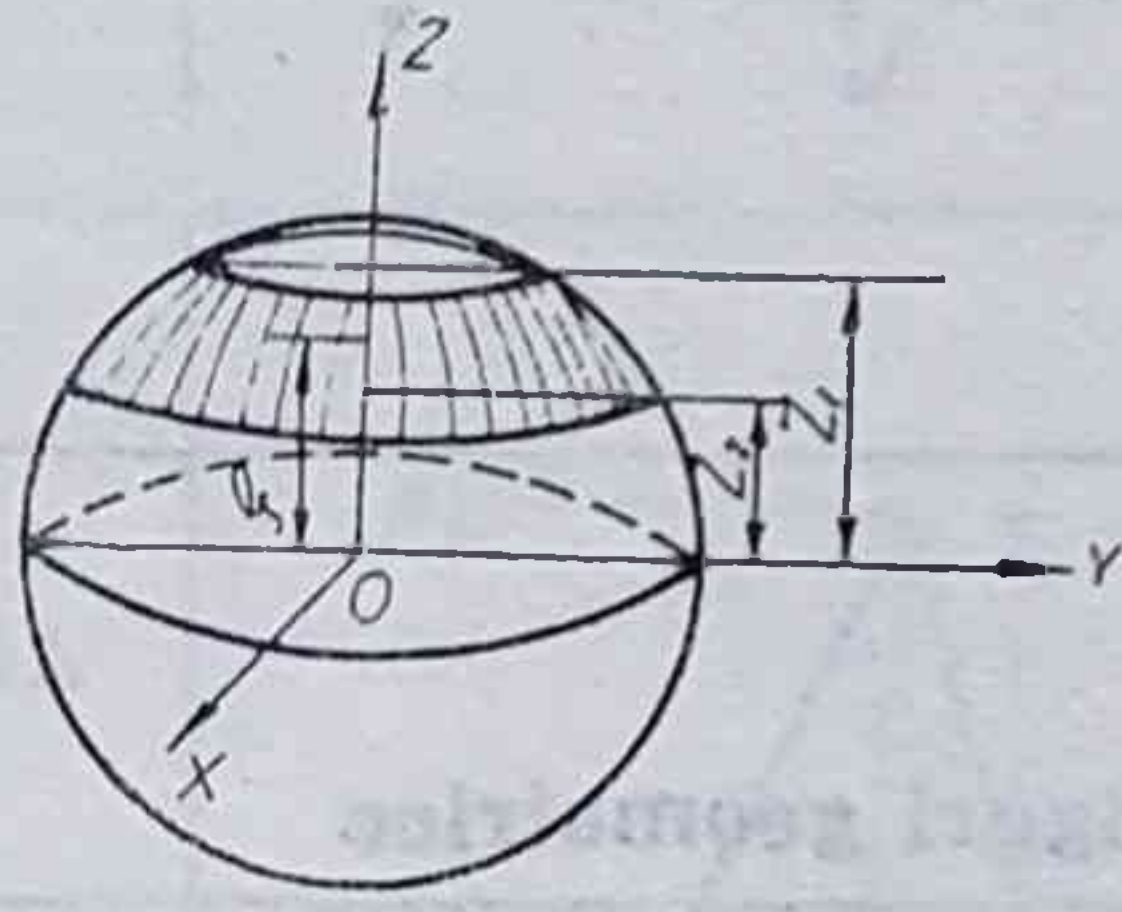
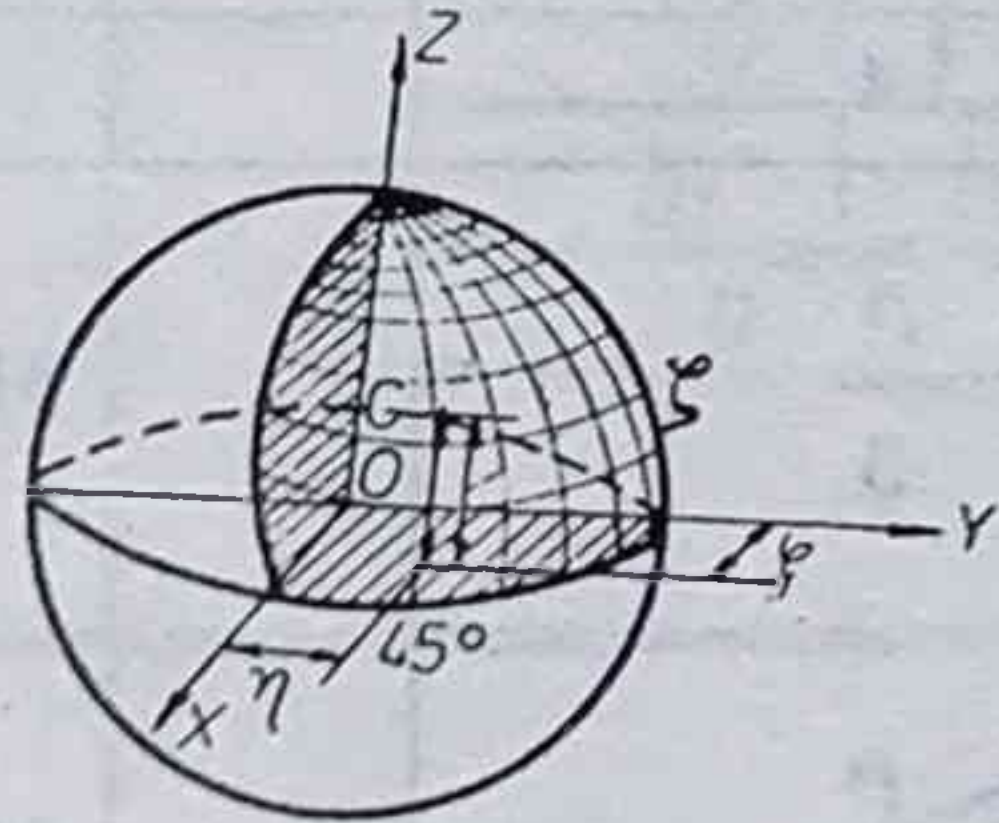
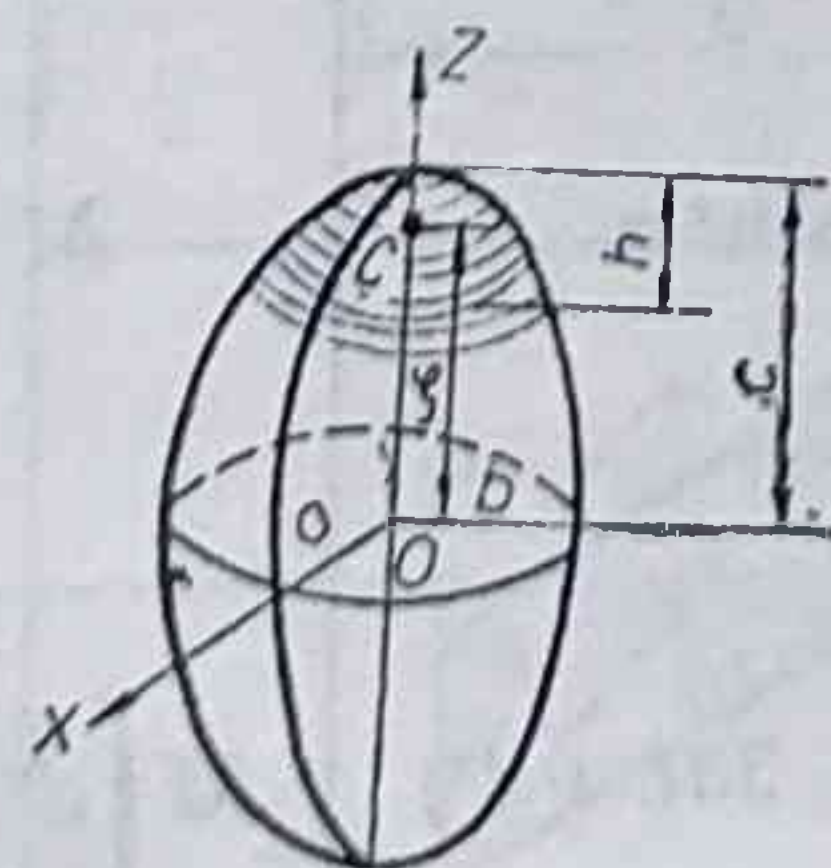
Linii		
Nr. crt.	Corpul Figura	Poziția centrului de masă
1	2	3
1	Perimetrul triunghiului 	$d_a = \frac{h_a}{2} \frac{b+c}{a+b+c}, \quad d_b = \frac{h_b}{2} \frac{c+a}{a+b+c}$ $d_c = \frac{h_c}{2} \frac{a+b}{a+b+c}$ <p>(la intersecția bisectoarelor triunghiului median)</p>
2	Arcul de cerc 	$\xi = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}; \quad \eta = 0$ <p>Pentru semicerc :</p> $\xi = \frac{2R}{\pi} \approx 0,6366 R$ <p>Pentru sfert de cerc :</p> $\xi = 0,9003 R$ <p>Pentru o șesime de cerc :</p> $\xi \approx 0,9549 R$
3	Arc plat oarecare 	$\xi \approx \frac{2}{3} h$
Arii		
4	Aria triunghiului 	$d_a = \frac{h_a}{3}, \quad d_b = \frac{h_b}{3}, \quad d_c = \frac{h_c}{3}$ $\xi = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \eta = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$ $\zeta = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$ <p>(la intersecția medanelor)</p>

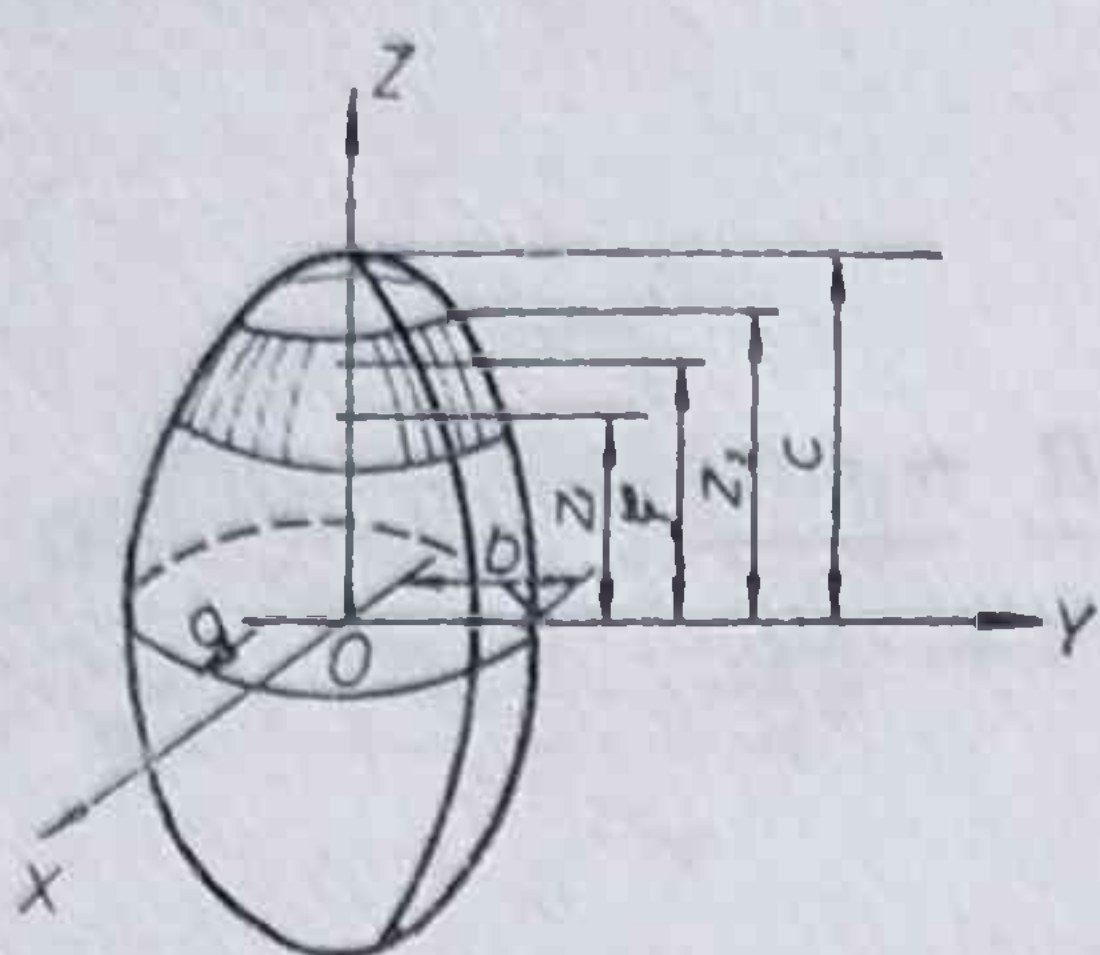
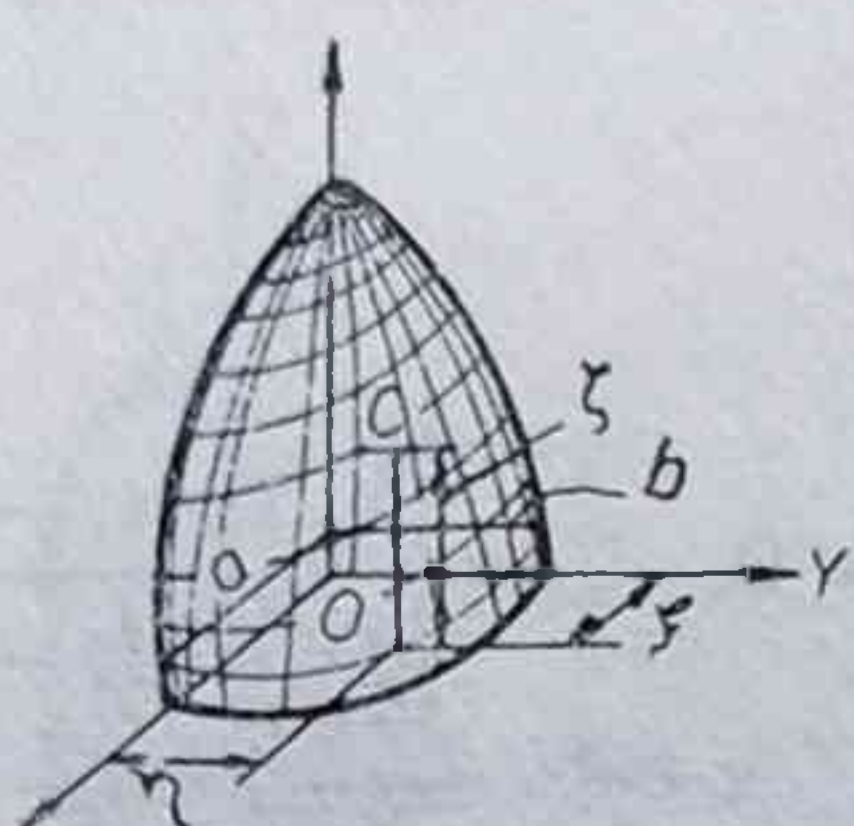
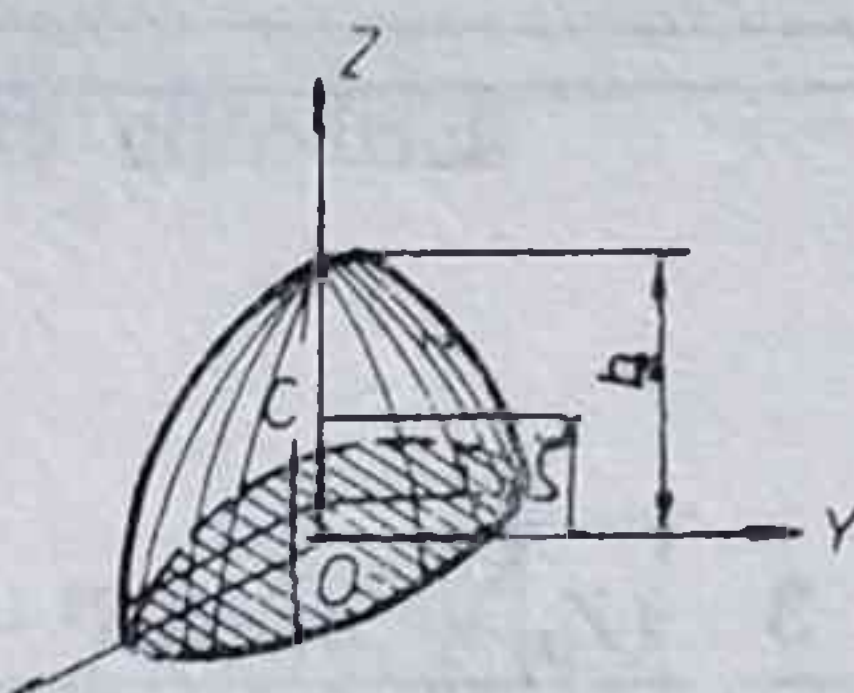
1	2	3
5	<p>Aria trapezului</p> 	<p>Pe dreapta ce unește mijloacele bazelor, la distanțele :</p> $h_a = \frac{h}{3} \frac{B + 2b}{B + b}; \quad h_b = \frac{h}{3} \frac{2B + b}{B + b}$ <p>măsurate de la baze</p>
6	<p>Sectorul circular</p> 	$\xi = \frac{2 R \sin \alpha}{3 \alpha}; \quad \eta = 0$ <p>Pentru semicerc :</p> $\xi \approx 0,4244 R$ <p>Pentru sfert de cerc :</p> $\xi \approx 0,6002 R$ <p>Pentru o șesime de cerc :</p> $\xi \approx 0,6366 R$
7	<p>Porțiunea de coroană circulară</p> 	$\xi = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{\sin \alpha}{\alpha}; \quad \eta = 0$
8	<p>Segment de cerc</p> 	$\xi = \frac{4}{3} \frac{R \sin^3 \alpha}{2 \alpha - \sin 2 \alpha}; \quad \eta = 0$
9	<p>Segment de elipsă simetric</p> 	<p>Acceași ca la segmentul de cerc corespunzător</p> $\left(R = a, \alpha = \arccos \frac{a - h}{a} \right)$ <p>căci elipsa este transformata afină a cercului</p>

1	2	3
10	<p>Aria unei parabole</p> 	$\xi_1 = \frac{3a}{5}; \quad \eta_1 = \frac{3b}{8}$ $\xi_2 = \frac{3a}{10}; \quad \eta_2 = \frac{3b}{4}$
11	<p>Placa sferică M N P Q</p> 	$\xi = \frac{R \sin \theta}{4} \frac{2(\varphi_2 - \varphi_1) + \sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1}$ $\eta = 0; \quad \xi = \frac{R}{2} (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)$
12	<p>Aria zonei sferice</p> 	$\xi = \eta = 0; \quad \xi = \frac{z_1 + z_2}{2}$
13	<p>Aria fusului sferic</p> 	$\xi = \frac{\pi R}{4} \frac{\sin \theta}{\theta}, \quad \eta = \xi = 0$
14	<p>Suprafața laterală a conului</p> 	$\xi = \eta = 0; \quad \xi = \frac{h}{3}$

1	2	3
15	<p>Suprafața laterală a trunchiului de con</p> 	$\xi = \eta = 0; \quad \zeta = \frac{h}{3} \frac{R + 2r}{R + r}$
V o l u m e		
16	<p>Piramida și conul</p> 	<p>Pe dreapta ce unește vârful cu centrul de masă al bazei, la distanța $\zeta = \frac{h}{4}$ de bază</p>
17	<p>Trunchiul de piramidă</p> 	<p>Pe dreapta care unește centrele de masă ale bazelor, la distanța</p> $\zeta = \frac{h}{4} \frac{B + 2\sqrt{Bb} + 3b}{B + \sqrt{Bb} + b}$ <p>de baza mare, B și b fiind ariile bazelor</p>
18	<p>Trunchiul de con circular</p> 	<p>Pe dreapta care unește centrele cercurilor de bază, la distanța</p> $\zeta = \frac{h}{4} \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$ <p>de baza mare</p>
19	<p>Pana</p> 	<p>Pe dreapta care unește mijlocul muchiei MN cu centrul bazei, la distanța</p> $\zeta = \frac{h}{2} \frac{a + a_1}{2a + a_1}$ <p>de bază</p>

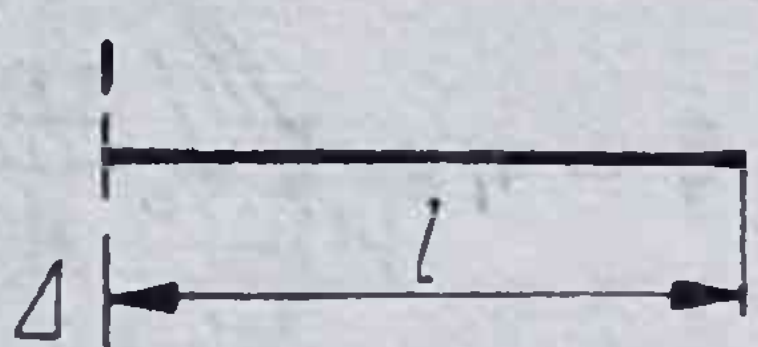
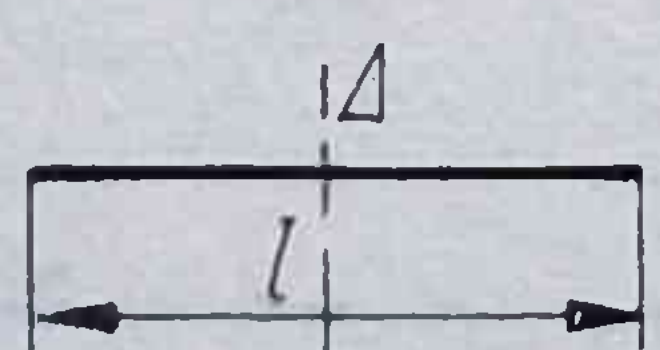
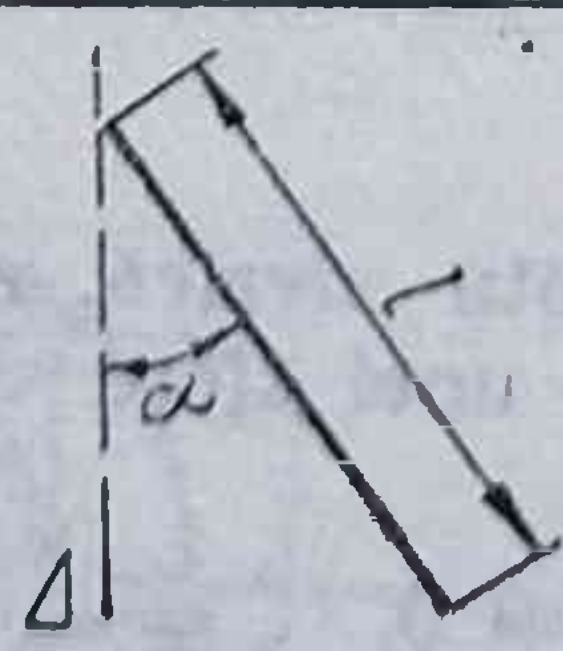
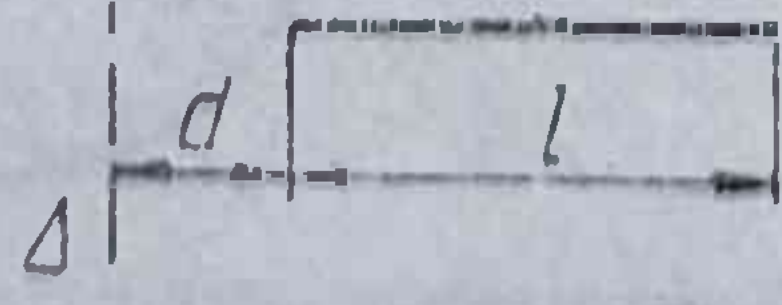
1	2	3
20	<p>Obeliscul</p> 	<p>Pe dreapta care unește centrele la distanța</p> $\zeta = \frac{h}{2} \frac{ab + ab_1 + a_1b + 3a_1b_1}{2ab + ab_1 + a_1b + 2a_1b_1}$ <p>de baza ABCD</p>
21	<p>Cilindrul circular drept, secționat oblic</p> 	$\xi = -\frac{1}{4} \frac{R^2 \operatorname{tg} \alpha}{h}, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \frac{h}{2} + \frac{R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{8h}$
22	<p>Copita cilindrică</p> 	$\xi = 0, \quad \eta = \frac{3\pi R}{16}, \quad \zeta = \frac{3\pi h}{32}$
23	<p>Emisfera</p> 	$\xi = \eta = 0, \quad \zeta = \frac{3R}{8}$
24	<p>Sectorul sferic</p> 	$\xi = \eta = 0, \quad \zeta = \frac{3R}{8} (1 + \cos \alpha) = \frac{3}{8} (2R - h)$

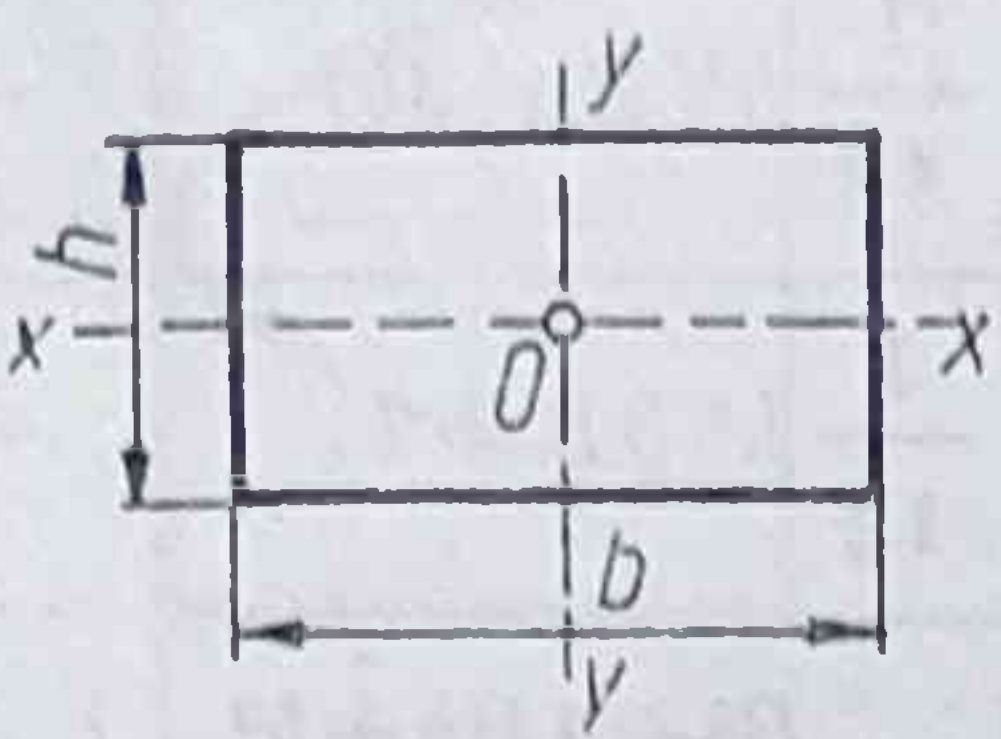
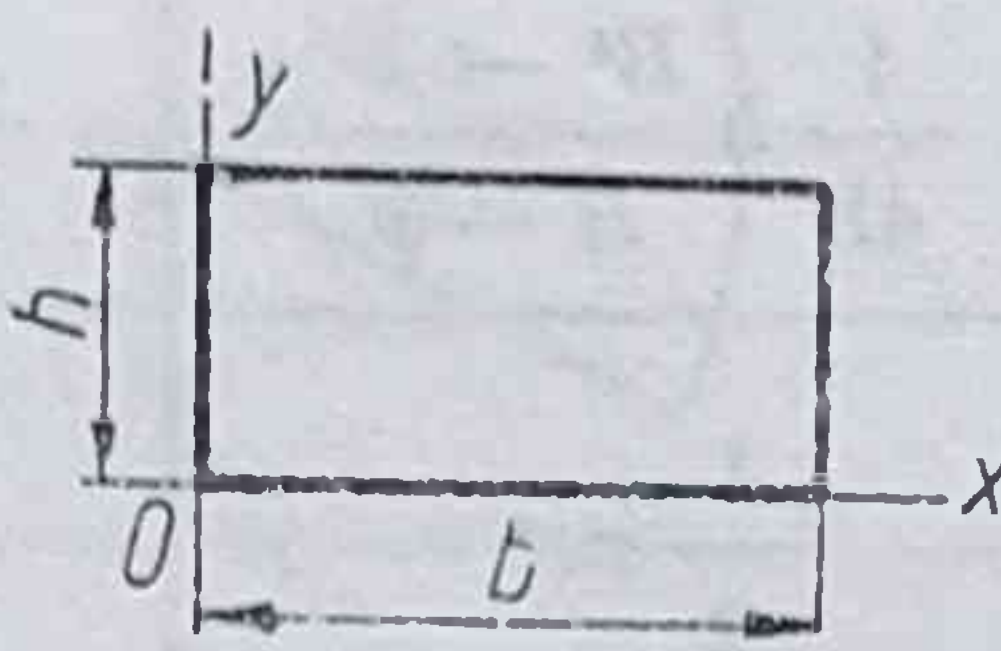
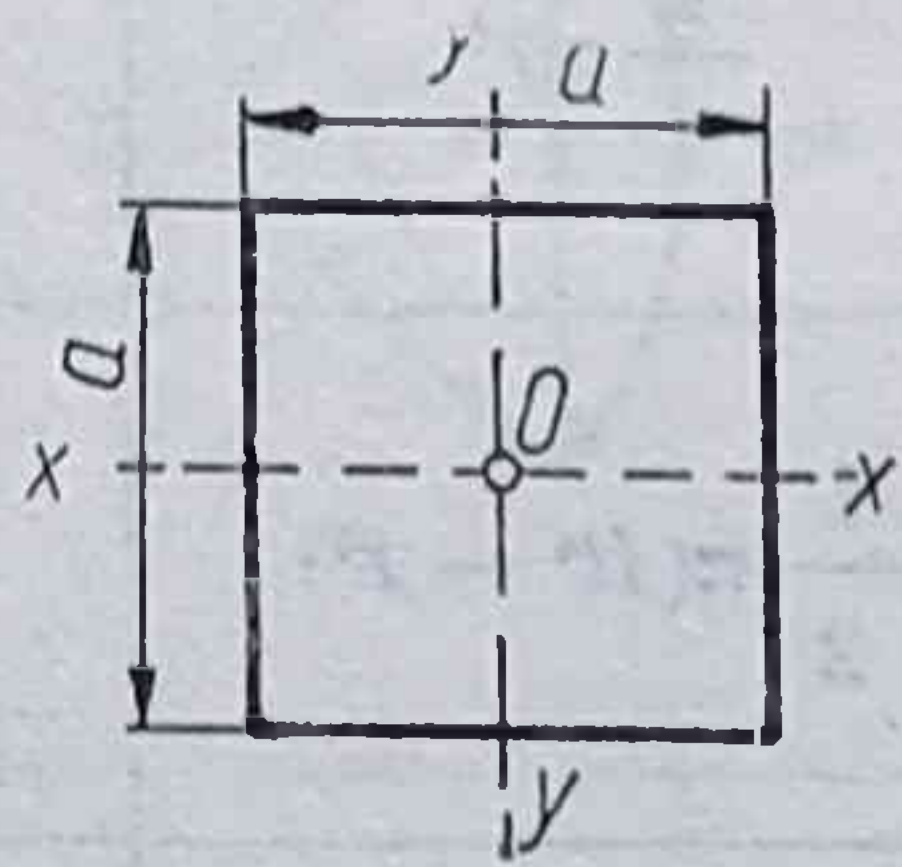
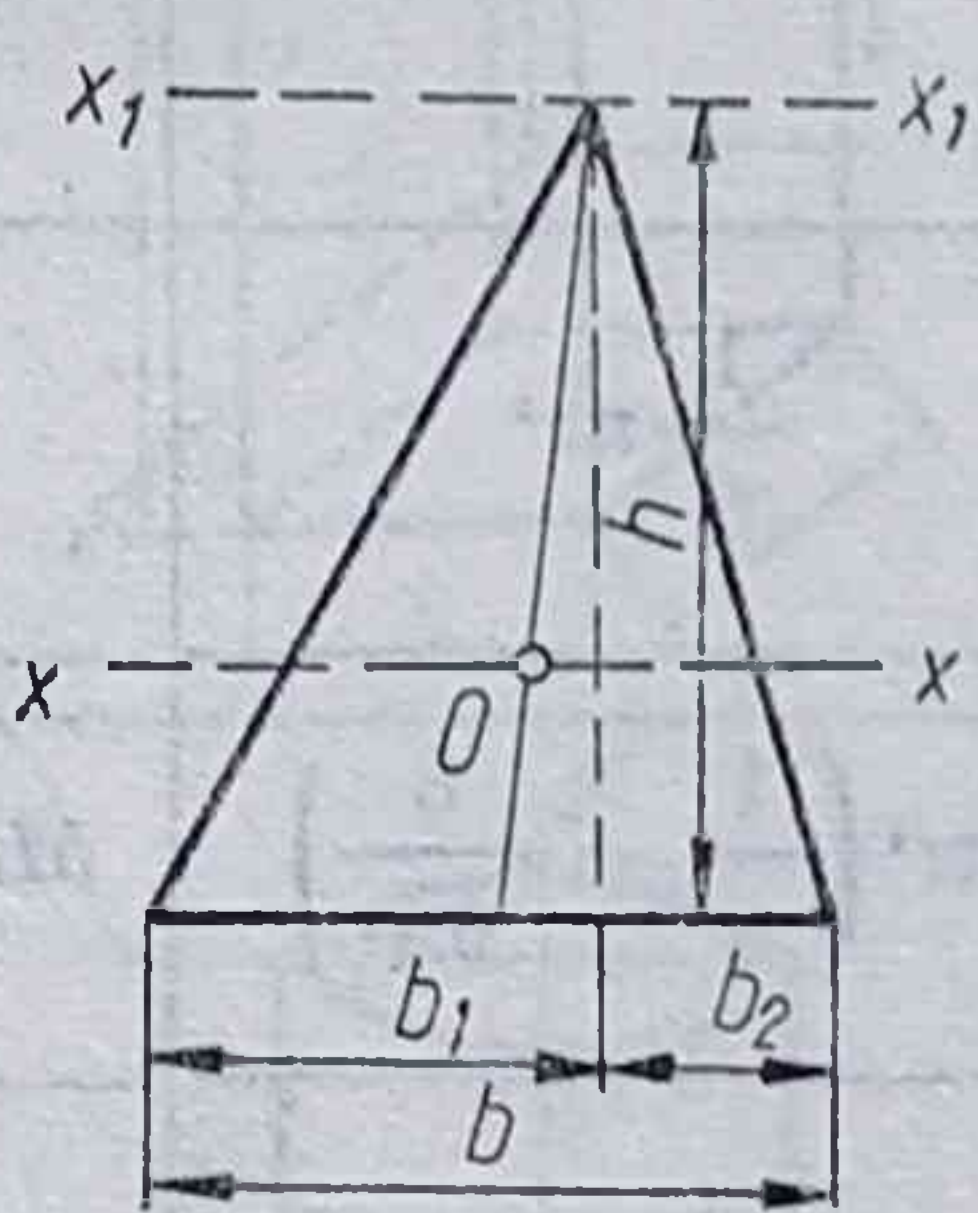
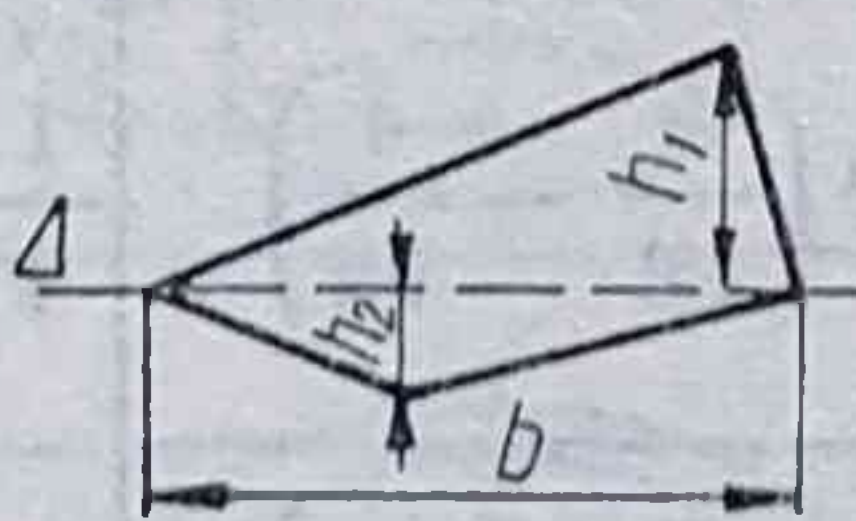
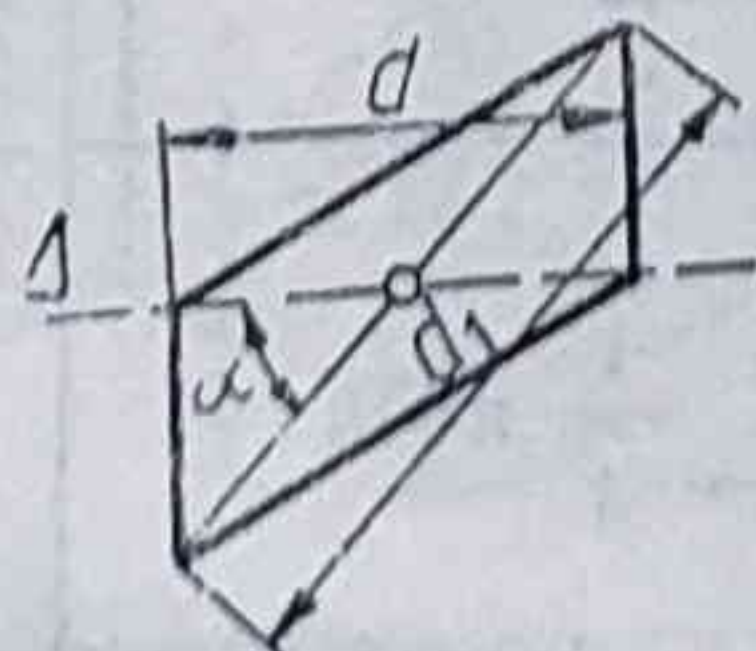
1	2	3
25	<p>Fusul sferic</p> 	$\xi = \frac{3R}{16} \frac{\pi \sin \theta}{\theta}, \quad \eta = \zeta = 0$
26	<p>Calota sferică</p> 	$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \frac{3}{4} \frac{(2R - h)^2}{3R - h}$
27	<p>Segmentul sferic</p> 	$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \frac{3}{4} \frac{(Z_1 + Z_2)(2R^2 - Z_1^2 - Z_2^2)}{3R^2 - (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_1 Z_2)}$
28	<p>Octantul sferic</p> 	$\xi = \eta = \zeta = \frac{3R}{8}$
29	<p>Calota de elipsoid simetrică</p> 	<p>Aceeași ca la calota sferică, elipsoidul fiind transformatul afin al unei sfere</p> $\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \frac{3}{4} \frac{(2c - h)^2}{3c - h}$

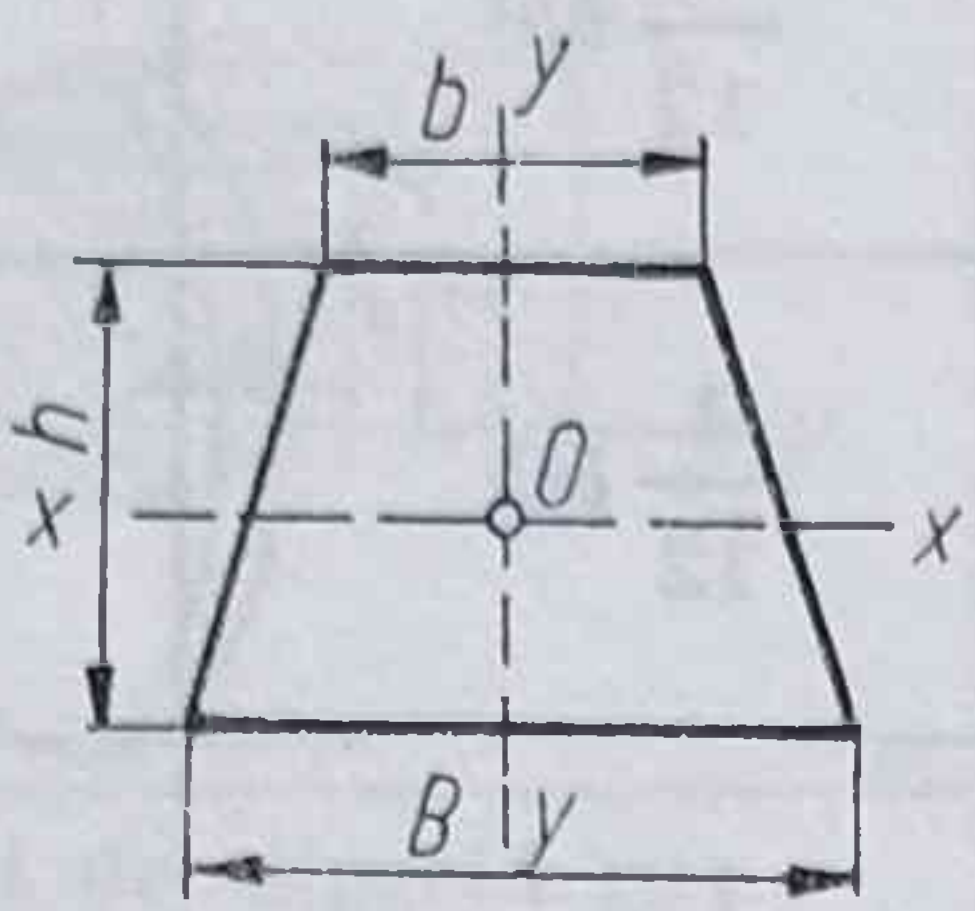
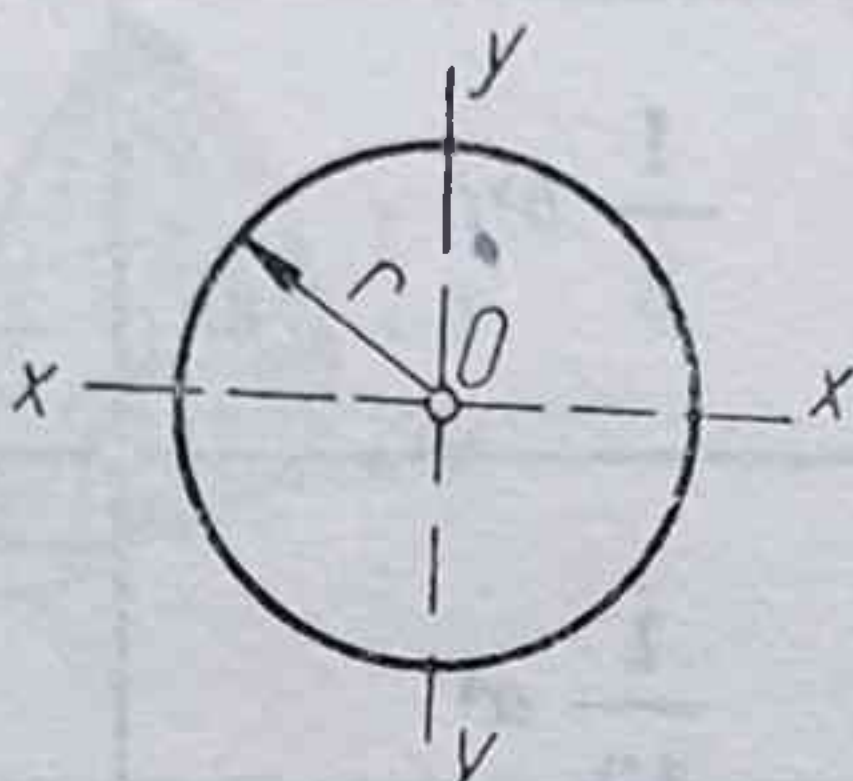
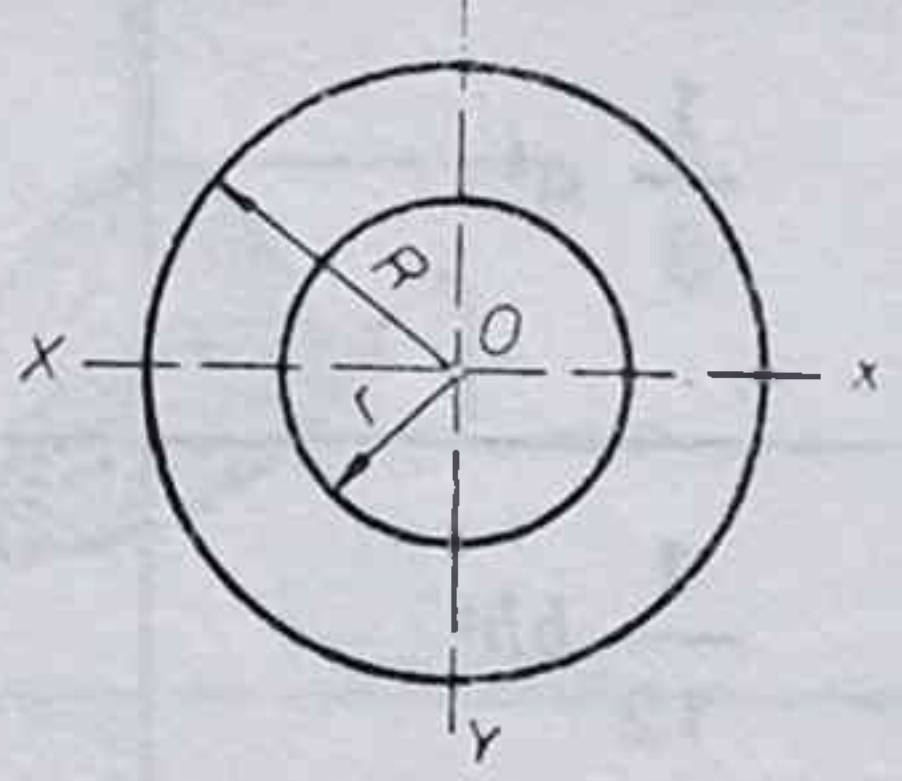
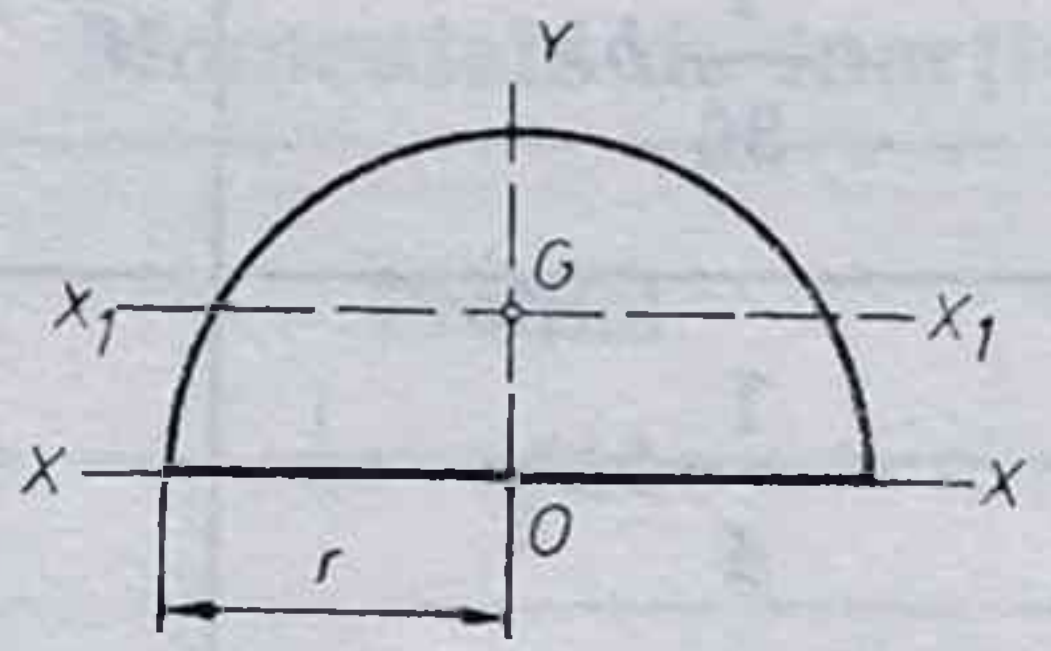
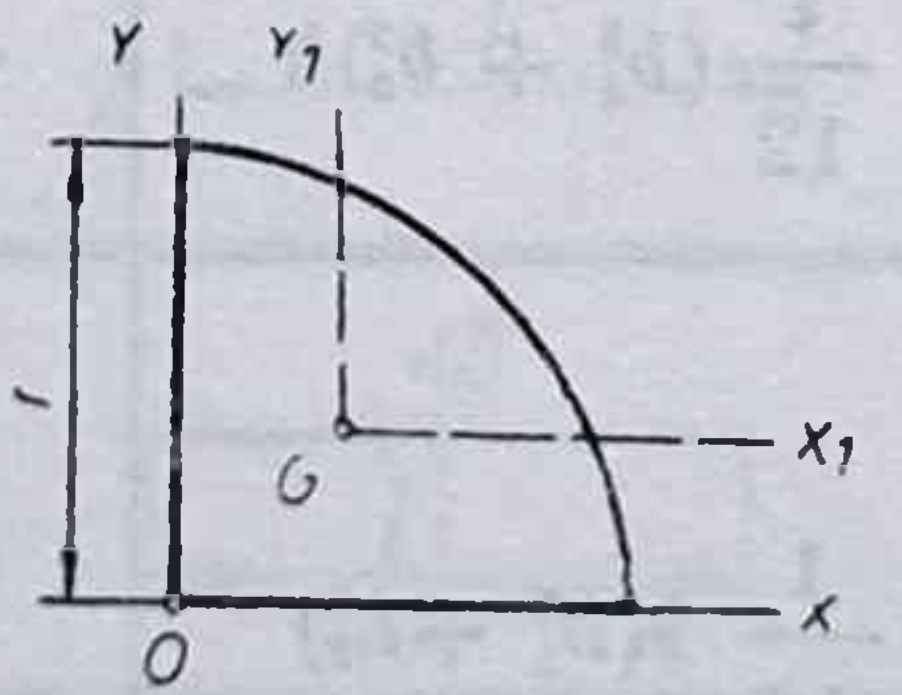
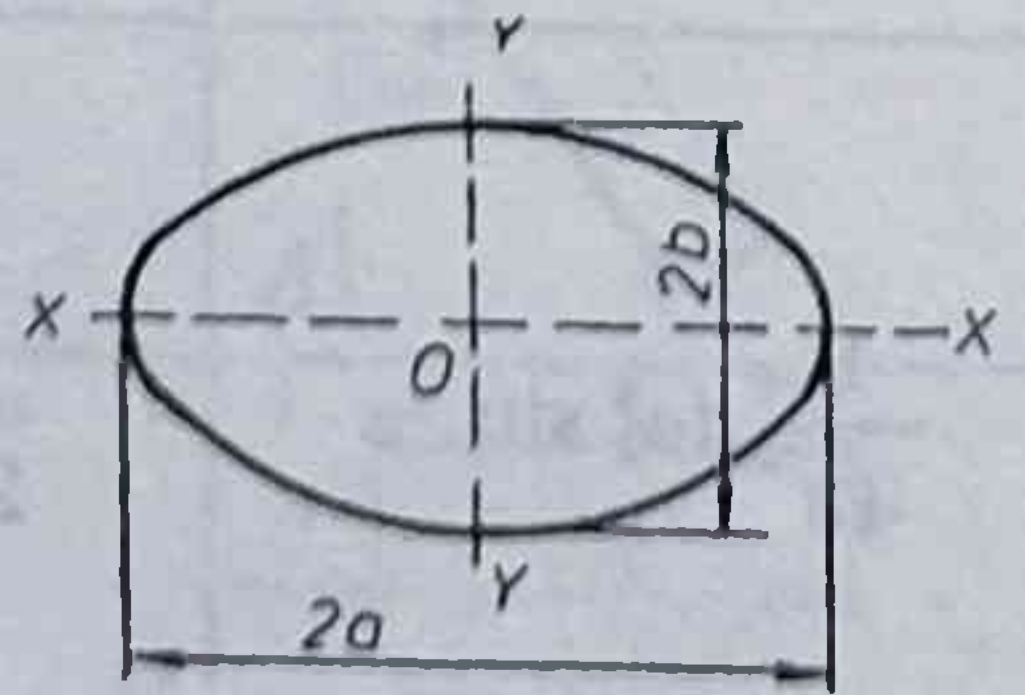
1	2	3
30	Segmente de elipsoid 	Aceeași ca la segmentul sferic $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = \frac{3}{4} \frac{(Z_1 + Z_2)(2c^2 - Z_1^2 - Z_2^2)}{3c^2 - (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_1 Z_2)}$
31	Octantul de elipsoid cu semiaxele a, b, c 	$\xi = \frac{3a}{8}, \eta = \frac{3b}{8}, \zeta = \frac{3c}{8}$
32	Paraboloid de rotație 	$\xi = \eta = 0, \zeta = \frac{h}{3}$

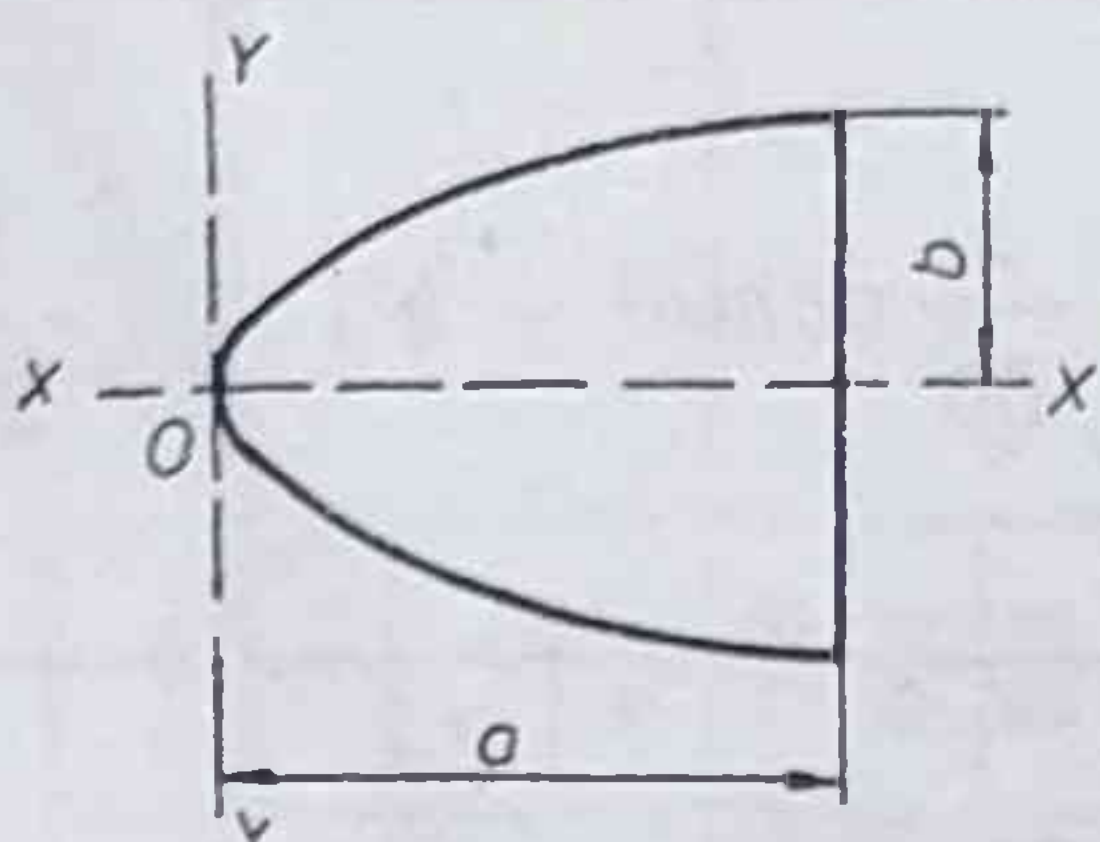
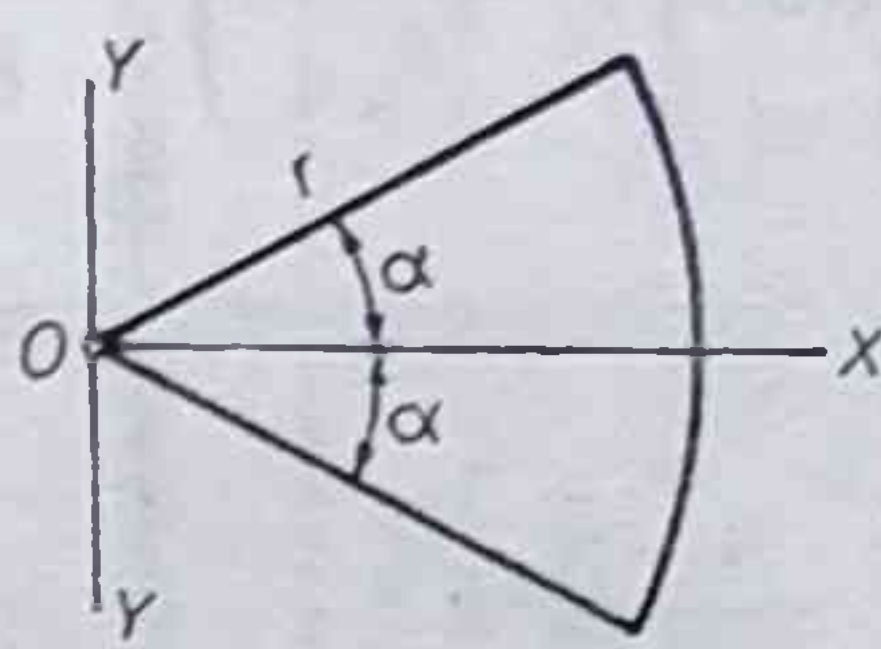
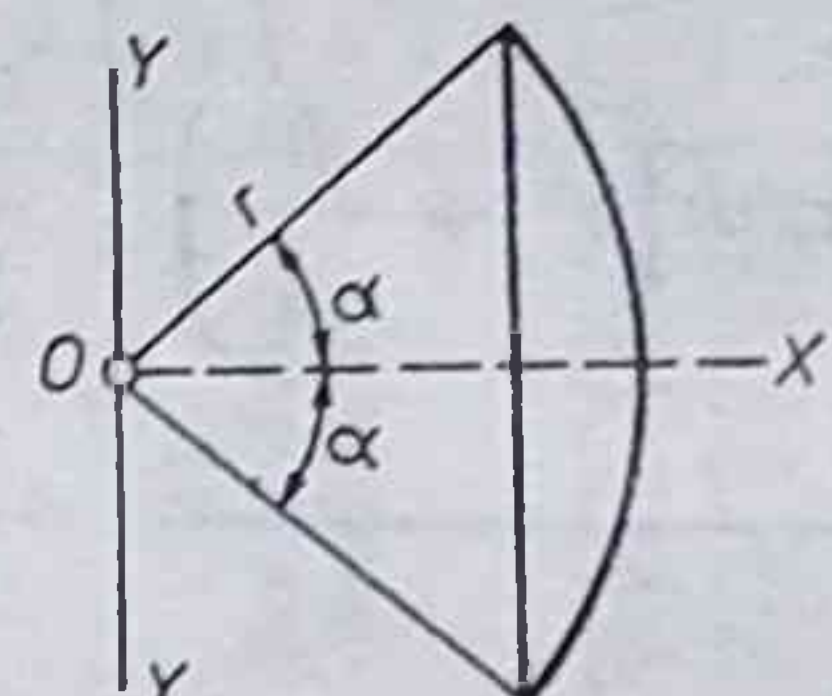
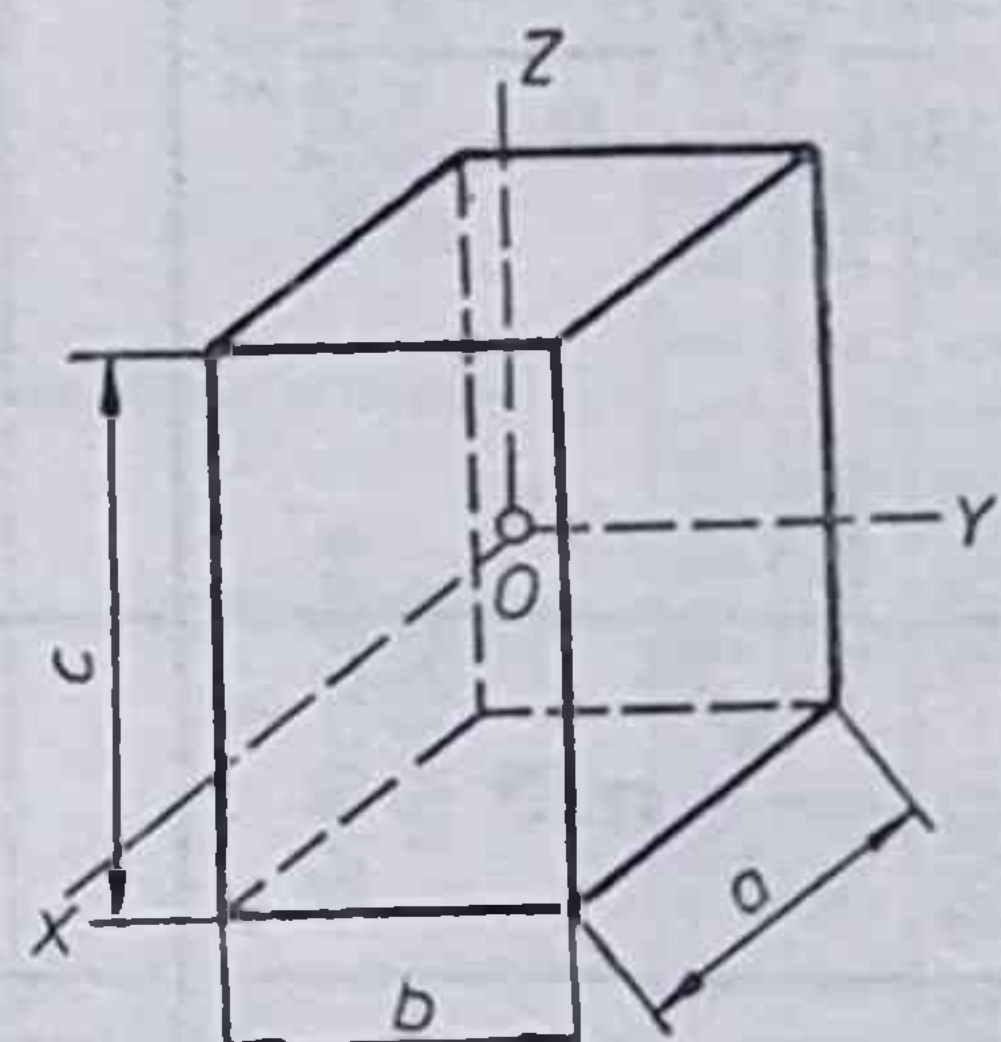
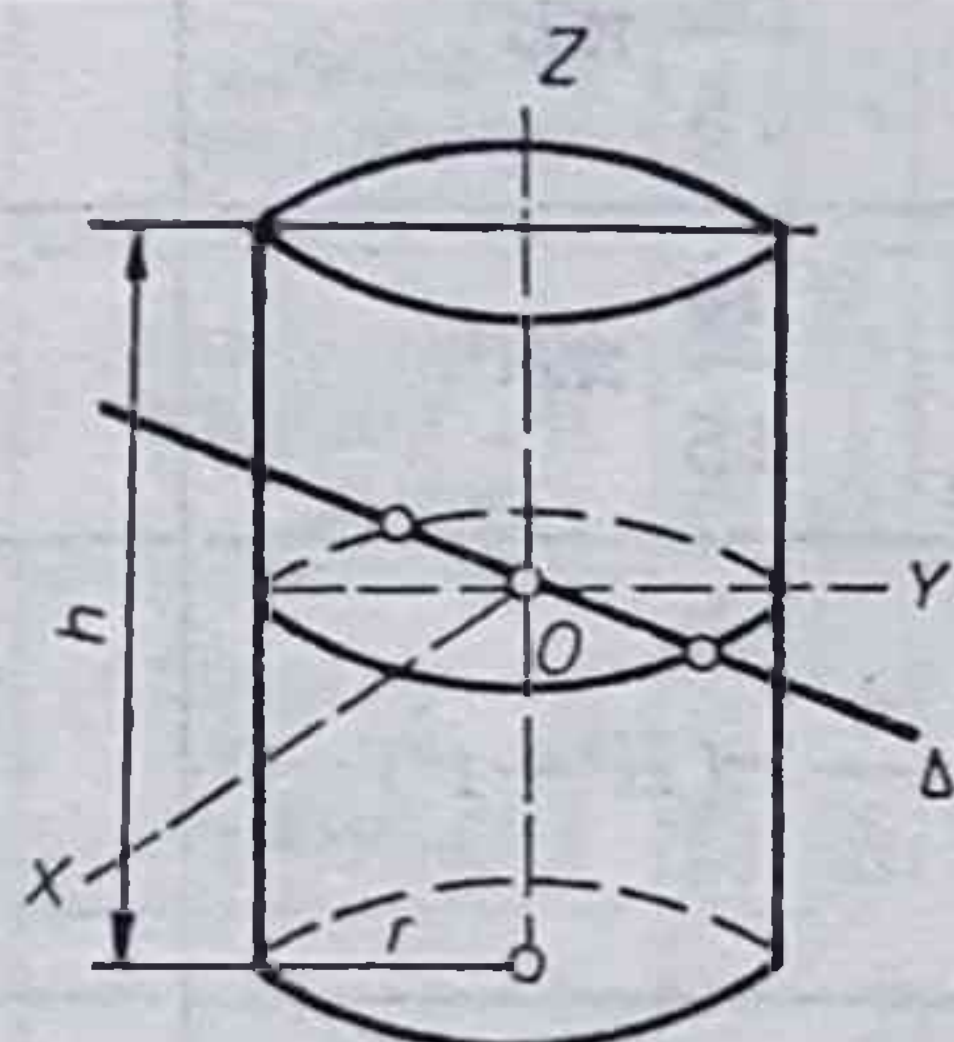
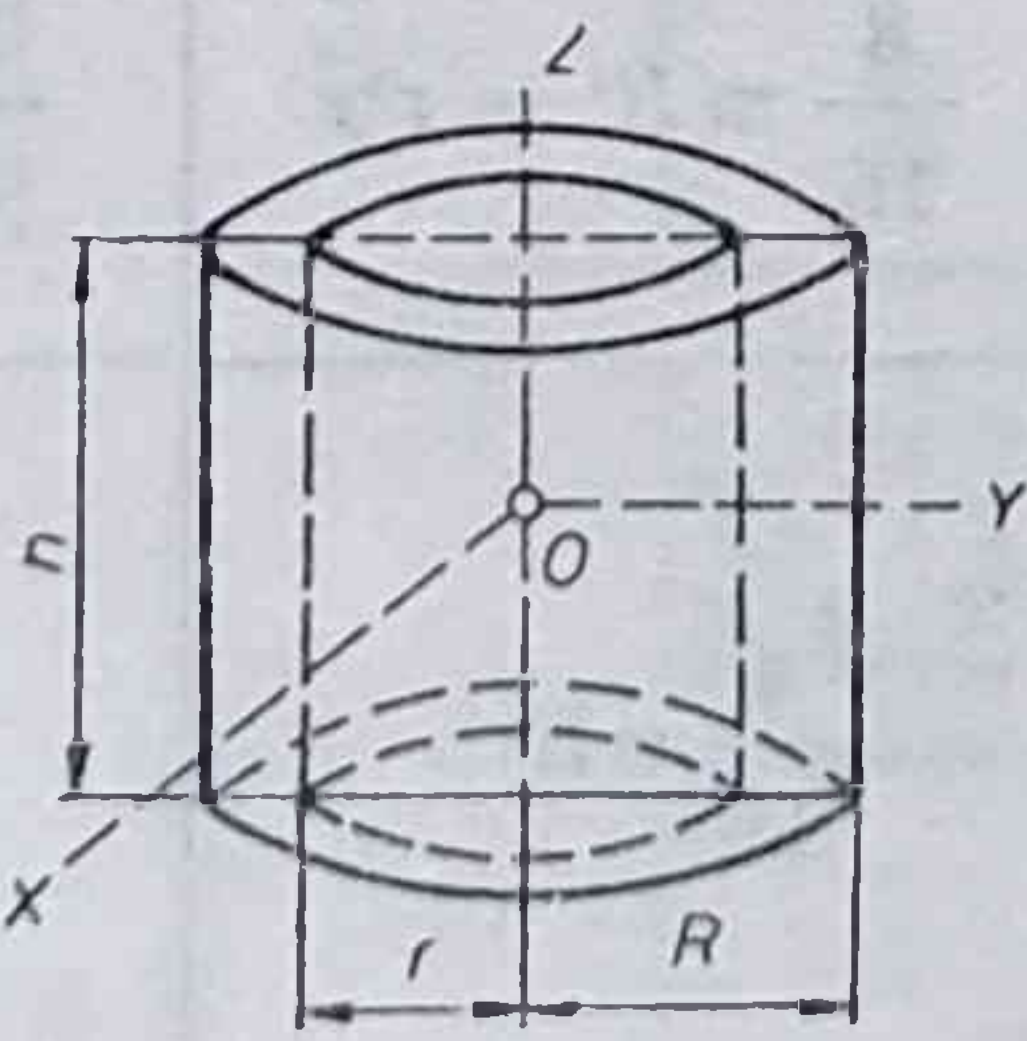
ANEXA II

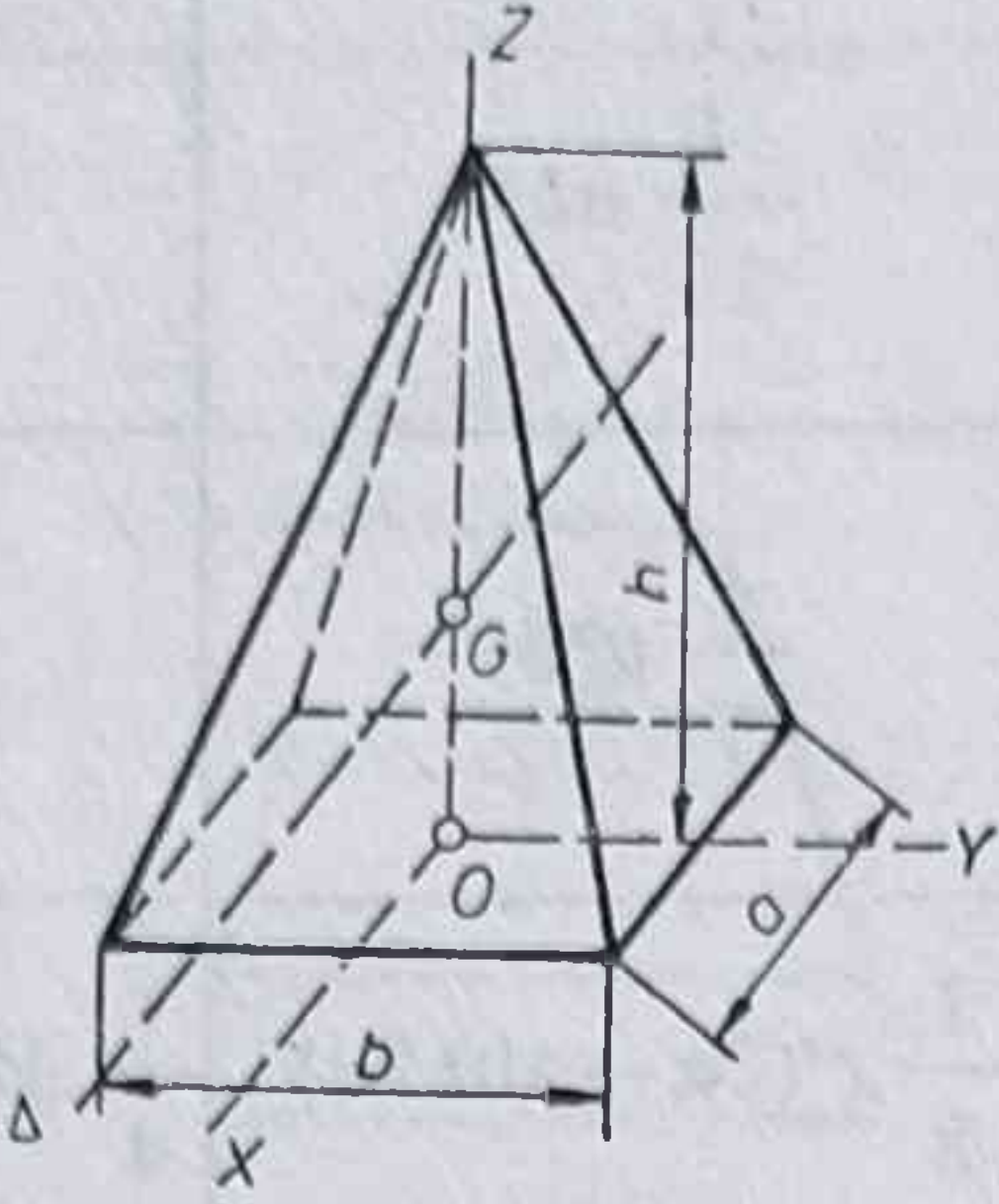
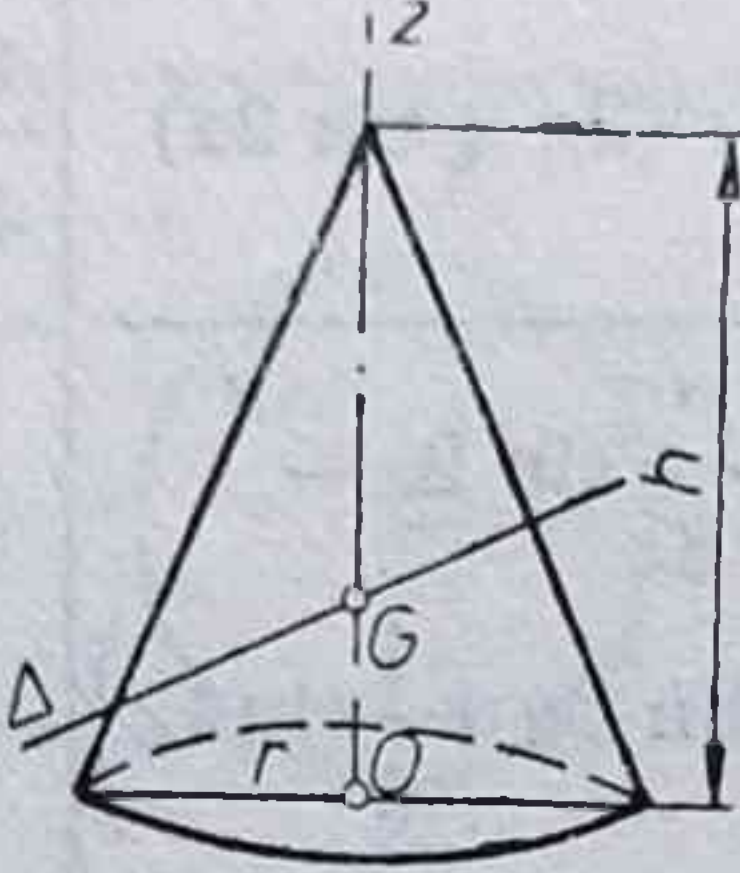
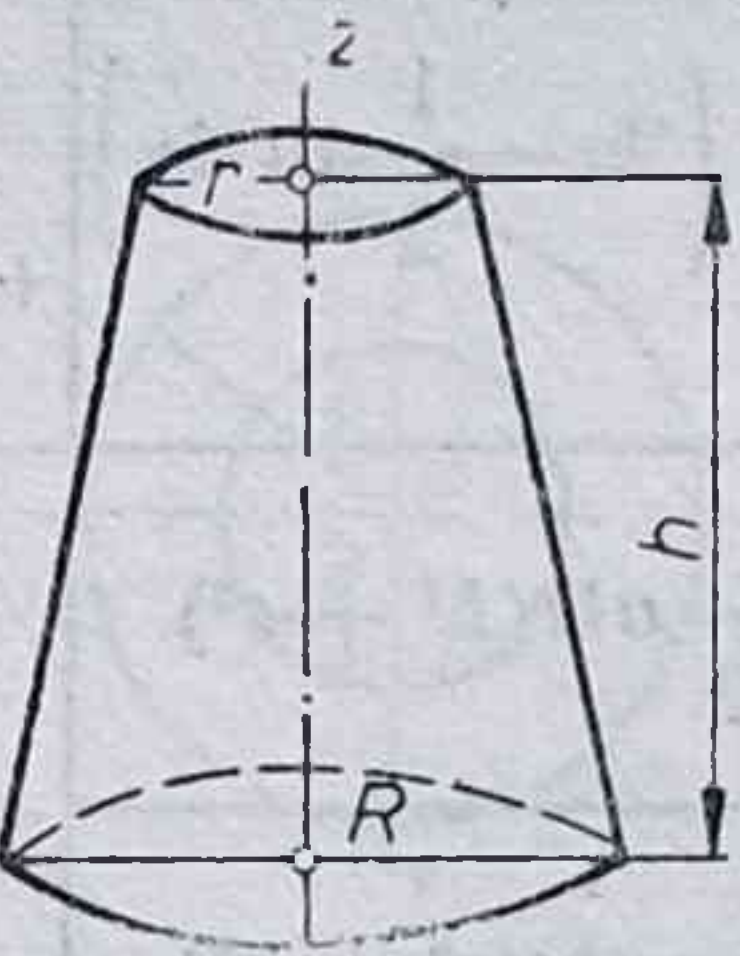
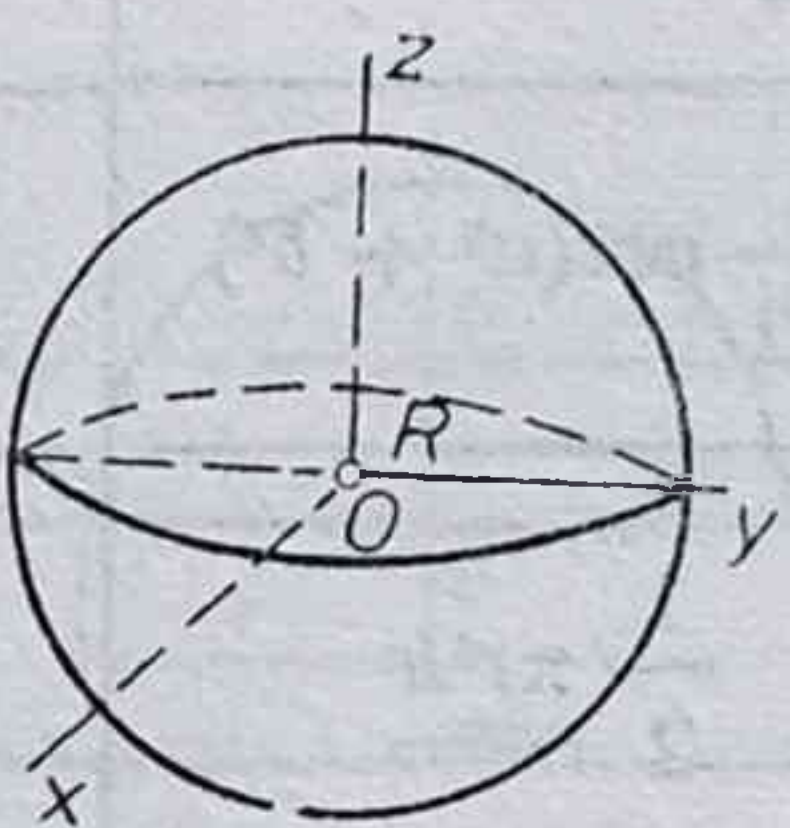
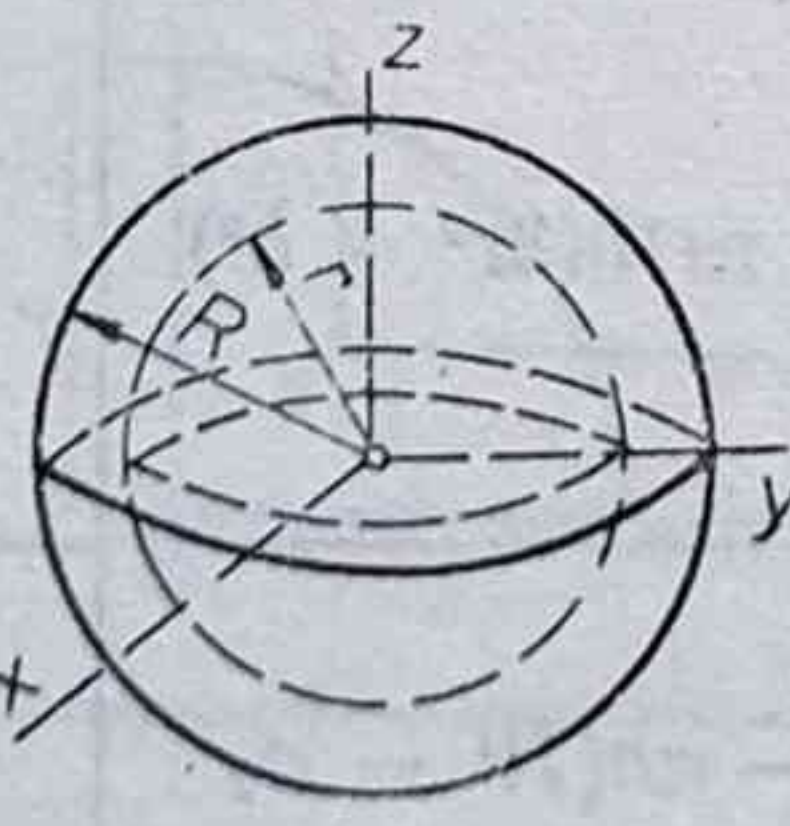
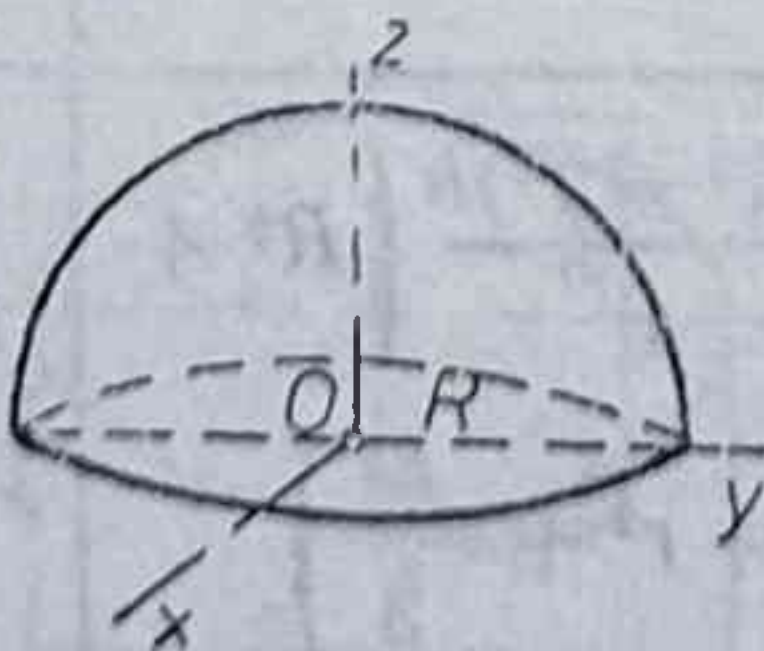
Momentele de inerție ale diferitelor figuri geometrice

Figura	Profilul	Axa	Momentul de inerție	
			geometric	mecanic
1	2	3	4	5
Linii		Axa Δ	$\frac{l^3}{3}$	$M \frac{l^2}{3}$
		Axa Δ	$\frac{l^3}{12}$	$M \frac{l^2}{12}$
		Axa Δ	$\frac{l^3}{3} \sin^2 \alpha$	$M \frac{l^2}{3} \sin^2 \alpha$
		Axa Δ	$\frac{l}{3} (3d^3 + 3dl + l^3)$	$M \left(d^3 + dl + \frac{l^2}{3} \right)$

1	2	3	4	5
Dreptunghi		Axa cen- trală Ox	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{12}Mh^2$
		Axa cen- trală Oy	$\frac{1}{12}b^3h$	$\frac{1}{12}Mb^2$
		Axa Ox	$\frac{1}{3}bh^3$	$\frac{1}{3}Mh^2$
		Axa Oy	$\frac{1}{3}b^3h$	$\frac{1}{3}Mb^2$
Pătrat		Axa Ox Axa Oy	$\frac{1}{12}a^4$	$\frac{1}{12}Ma^2$
		Latura a	$\frac{1}{3}a^4$	$\frac{1}{3}Ma^2$
Triunghi		Baza b	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{6}Mh^2$
		Axa Ox	$\frac{1}{36}bh^3$	$\frac{1}{18}Mh^2$
		Axa Ox1	$\frac{1}{4}bh^3$	$\frac{1}{2}Mh^2$
		Înălți- mea h	$\frac{1}{12}(b_1^3 + b_2^3)h$	$\frac{1}{6b}M(b_1^3 + b_2^3)$
Patrulater neregulat		Axa Δ	$\frac{1}{12}b(h_1^3 + h_2^3)$	$\frac{1}{6}M \frac{h_1^3 + h_2^3}{h_1 + h_2}$
Paralelo- gram		Axa Δ	$\frac{1}{48}d^4 \sin^3 \alpha$	$\frac{1}{24}Md^2 \sin^3 \alpha$

1	2	3	4	5
Trapez îsoscel		Baza mare B	$\frac{1}{12} h^3 (B + 3b)$	$\frac{1}{6} Mh \frac{2B + 3b}{B + b}$
		Baza mică b	$\frac{1}{12} h^3 (3B + b)$	$\frac{1}{6} Mh^2 \frac{3B + b}{B + b}$
		Axa Ox	$\frac{1}{36} h^3 \frac{B^2 + 4Bb + b^2}{B + b}$	$\frac{1}{18} Mh^2 \frac{B^2 + 4Bb + b^2}{(B + b)^2}$
		Axa Oy	$\frac{1}{48} h \frac{B^4 - b^4}{B - b}$	$\frac{1}{24} M(B^2 + b^2)$
Cerc		Polul O	$\frac{1}{2} \pi r^4$	$\frac{1}{2} Mr^2$
		Axa Ox Axa Oy	$\frac{1}{4} \pi r^4$	$\frac{1}{4} Mr^2$
Coroană circulară		Polul O	$\frac{1}{2} \pi (R^4 - r^4)$	$\frac{1}{2} M(R^2 + r^2)$
		Axa Ox Axa Oy	$\frac{1}{4} \pi (R^4 - r^4)$	$\frac{1}{2} M(R^2 + r^2)$
Semicerc		Axa Ox Axa Oy	$\frac{1}{8} \pi r^4$	$\frac{1}{4} Mr^2$
		Axa Gx1	$\pi r^4 \left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2} \right)$	$Mr^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right)$
Sfert de cerc		Axa Ox Axa Oy	$\frac{1}{16} \pi r^4$	$\frac{1}{4} Mr^2$
		Axa Gx1 Axa Gy1	$r^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right)$	$\frac{1}{4} Mr^2 \left(1 - \frac{64}{9\pi^2} \right)$
Elipsă		Axa mare Ox	$\frac{1}{4} \pi a b^3$	$\frac{1}{4} M b^2$
		Axa mică Oy	$\frac{1}{4} \pi a^3 b$	$\frac{1}{4} M a^2$

1	2	3	4	5
Parabolă		Axa Ox	$\frac{4}{15} ab^3$	$\frac{1}{5} Mb^2$
		Axa Oy	$\frac{4}{7} a^3 b$	$\frac{3}{7} Ma^2$
Sector circular		Axa Ox	$\frac{1}{8} r^4 (2\alpha - \sin 2\alpha)$	$\frac{1}{4} Mr^2 \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right)$
		Axa Oy	$\frac{1}{8} r^4 (2\alpha + \sin 2\alpha)$	$\frac{1}{4} Mr^2 \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right)$
Segment de cerc		Axa Ox	$\frac{r^4}{8} \sin 2\alpha - \frac{4}{3} \left(\sin 2\alpha + \frac{1}{6} \sin 4\alpha \right)$	$\frac{Mr^2}{4} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right)$
		Axa Oy	$\frac{1}{8} r^4 \left(2\alpha - \frac{1}{2} \sin 4\alpha \right)$	$\frac{Mr^2}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right)$
Paralelipiped		Axa Ox	$\frac{1}{12} abc(b^2 + c^2)$	$\frac{1}{12} M(b^2 + c^2)$
		Axa Oy	$\frac{1}{12} abc(c^2 + a^2)$	$\frac{1}{12} M(c^2 + a^2)$
		Axa Oz	$\frac{1}{12} abc(a^2 + b^2)$	$\frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$
Cilindru		Axa Oz	$\frac{1}{2} \pi r^4 h$	$\frac{1}{2} Mr^2$
		Axa Ox Axa Oy Axa Δ	$\frac{1}{12} \pi r^2 h (3r^2 + h^2)$	$\frac{1}{12} M(3r^2 + h^2)$
		Axa Oz	$\frac{1}{2} \pi h (R^4 - r^4)$	$\frac{1}{2} M(R^2 + r^2)$
Cilindru gol		Axa Ox Axa Oy	$\frac{\pi(R^2 - r^2)h}{4} \left(R^2 + r^2 + \frac{h^2}{3} \right)$	$\frac{1}{12} M(3R^2 + 3r^2 + h^2)$

1	2	3	4	5
Piramidă dreptunghiulară		Axa Oz	$\frac{1}{60} abh(a^2 + b^2)$	$\frac{1}{20} M(a^2 + b^2)$
		Axa Δ	$\frac{1}{60} abh \left(b^2 + \frac{3h^2}{4} \right)$	$\frac{1}{80} M(4b^2 + 3h^2)$
Con circular drept		Axa Oz	$\frac{1}{10} \pi r^4 h$	$\frac{3}{10} Mr^2$
		Axa Δ	$\frac{1}{20} \pi r^2 h \left(r^2 + \frac{h^2}{4} \right)$	$\frac{3}{20} M \left(r^2 + \frac{h^2}{4} \right)$
Trunchi de con		Axa z	$\frac{1}{10} \pi h \frac{R^5 - r^5}{R - r}$	$\frac{3}{10} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$
Sferă		Polul O	$\frac{4}{5} \pi R^5$	$\frac{3}{5} MR^2$
		$I_x = I_y = I_z$	$\frac{8}{15} \pi R^5$	$\frac{2}{5} MR^2$
		Tangenta	$\frac{28}{15} \pi R^5$	$\frac{7}{5} MR^2$
Sferă goală		Polul O	$\frac{4}{5} \pi (R^5 - r^5)$	$\frac{3}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$
		Axa x Axa y	$\frac{8}{15} \pi (R^5 - r^5)$	$\frac{2}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$
Semisferă		Axa Ox Axa Oy Axa Oz	$\frac{4}{15} \pi R^5$	$\frac{2}{5} MR^2$

Tabelul 1

Rezistențe admisibile pentru unele materiale folosite în construcția de mașini

Materialul		Caracteristici mecanice				Rezistențe admisibile la tracțiune, σ_{at} , daN/cm ² pentru cazul de încărcare			Celelalte rezistențe admisibile				Observații
		STAS	Rezistența la rupere σ_r , daN/mm ²	Limita de curgere σ_c , daN/mm ²	Alungirea la rupere δ_5 %	I Solicitare statică	II Solicitare pulsantă	III Solicitare simetrică	Com- presi- une	Încovoiere	Răsucire	For- fecare	
									$\frac{\sigma_{ac}}{\sigma_{at}}$	$\frac{\sigma_{ai}}{\sigma_{at}}$	$\frac{\tau_{ar}}{\sigma_{at}}$	$\frac{\tau_{af}}{\sigma_{at}}$	
Oțel carbon	OL-37	500—68	37—45	21—24	25—26	1 200—1 400	1 100—1 300	700—1 000	1	1,1—1,2	0,6—0,65	0,8	
	OL-42		42—50	23—26	22	1 300—1 600	1 100—1 400	800—1 100	1	1,1—1,2	0,6—0,65	0,8	
	OL-50		50—62	27—29	19	1 500—1 800	1 250—1 600	900—1 200	1	1,1—1,2	0,6—0,65	0,8	
	OL-70		min. 70	34—36	10	2 100—2 500	1 600—2 000	1 100—1 500	1	1,1—1,2	0,6—0,65	0,8	
Oțel carbon de calitate superioară	OLC 10*	880—66	42	25	19	1 300—1 700	1 100—1 400	800—1 100	1	1,1—1,2	0,6—0,65	0,8	*Călire și reve- nire joasă **Îmbunătățit
	OLC 25**		50	31	22	1 400—1 700	1 200—1 500	850—1 150	1	1,1—1,2	0,6—0,65	0,8	
	OLC45**		66	40	17	2 000—2 600	1 700—2 200	1 200—1 600	1	1,1—1,2	0,6—0,65	0,8	
Oțel aliat	18MC10	791—66	88	73,5	10	3 000—3 800	2 300—3 200	1 500—2 200	1	1,1—1,2	0,6—0,65	0,8	
	33MoC11		88	69	12	3 000—3 800	2 300—2 800	1 800—2 300	1	1,1—1,2	0,6—0,65	0,8	
	13CN35		113	93	10	3 800—4 600	2 800—3 800	1 900—2 600	1	1,1—1,2	0,6—0,65	0,8	
Oțel carbon turnat în piese	OT 40-2	600—65	40	20	24	1 000—1 300	800—1 100	500—750	1,1	1,1	0,6—0,65	0,8	
	OT 50-2		50	28	18	1 300—1 800	1 000—1 300	700—950	1,1	1,1	0,6—0,65	0,8	
Fonte cu grafit la- melar	Fc 20	568—67	23*	—	—	600—800	500—700	300—450	2,5	—	1,2	—	*Pentru probe cu diametrul de 20 mm Piese cu crustă de turnare
	Fc 30		33*	—	—	900—1 100	700—900	450—600	2,5	—	1,2	—	
Fonte cu grafit nodular	Fgn 45-5	6071—70	45	32	5	1 500—2 000	1 000—1 400	750—1 000	2,5	—	1,0—1,2*	—	*1,1 la cazul III 1,2 la cazul II 1,3 la cazul I
	Fgn 60-2		60	40	2	2 000—2 600	1 300—1 700	900—1 200	2,5	—	1,0—1,2*	—	
Aliaje ne- feroase de turnare	Bz12T	197—68	20	—	6	400—650	300—500	200—300	1	1	0,7	—	
	AmT67	199—65	18	—	20	400—600	300—500	200—350	1	1	0,7	—	
	ATMg3Si	201—67	13	—	3	400—750	300—550	200—350	1	1,1—1,2	0,7	0,8	

Tabelul 1

Dimensiuni liniare normale (Extras din STAS 75-72)

10 ... 100 mm					
R 10	R 20	R 40	Ra 10	Ra 20	Ra 40
10,0	10,0	10,0	10	10	10
	11,2	11,2		11	11
12,5	12,5	12,5	12	12	12
		13,2			13
	14,0	14,0		14	14
16,0		15,0	16		15
	16,0	16,0		16	16
		17,0			17
	18,0	18,0		18	18
		19,0			19
20,0	20,0	20,0	20	20	20
		21,2			21
	22,4	22,4		22	22
		23,6			24
25,0	25,0	25,0	25	25	25
		26,5			26
	28,0	28,0		28	28
		30,0			30
31,5	31,5	31,5	32	32	32
		33,5			34
	35,5	35,5		36	36
		37,5			38
40,0	40,0	40,0	40	40	40
		42,5			42
	45,0	45,0		45	45
		47,5			48
50,0	50,0	50,0	50	50	50
		53,0			53
	56,0	56,0		56	56
		60,0			60
63,0	63,0	63,0	63	63	63
		67,0			67
	71,0	71,0		71	71
		75,0			75
80,0	80,0	80,0	80	80	80
		85,0			85
	90,0	90,0		90	90
100,0		95,0	100		95
	100,0	100,0		100	100

Tabelul 2

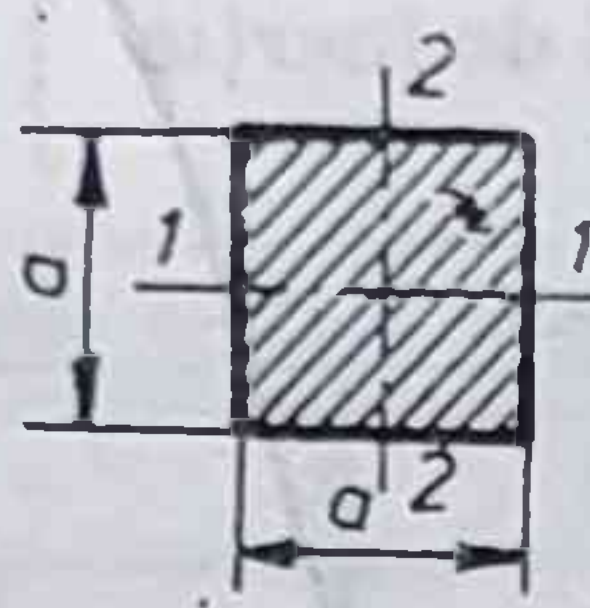
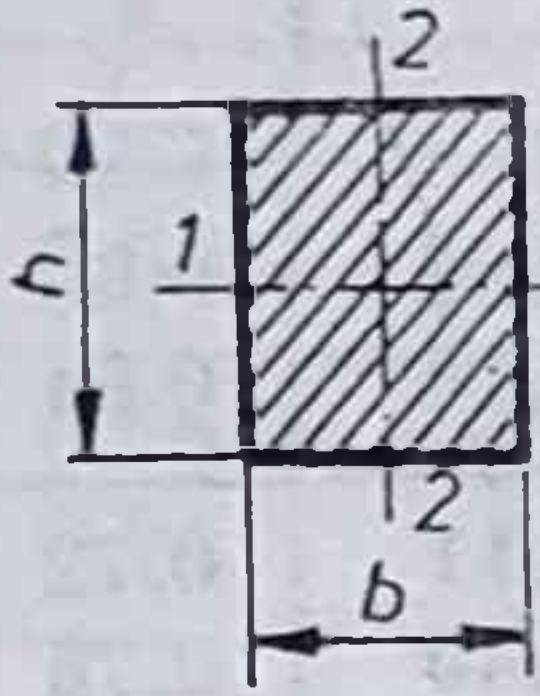
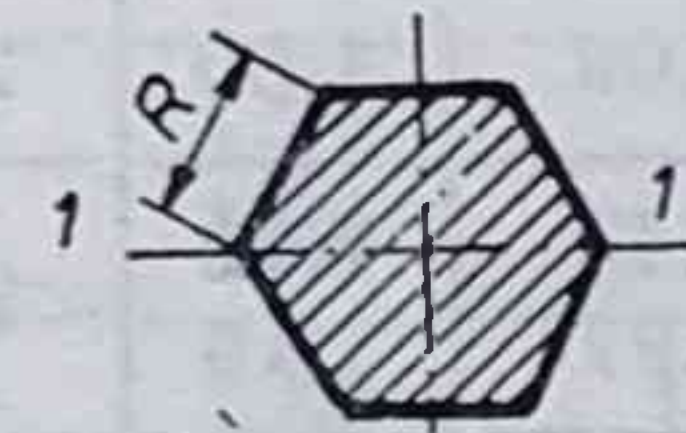
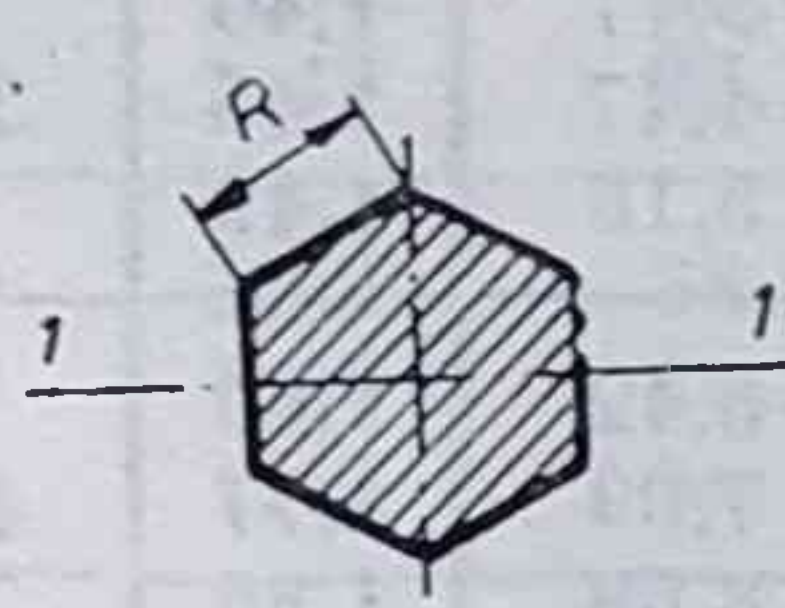
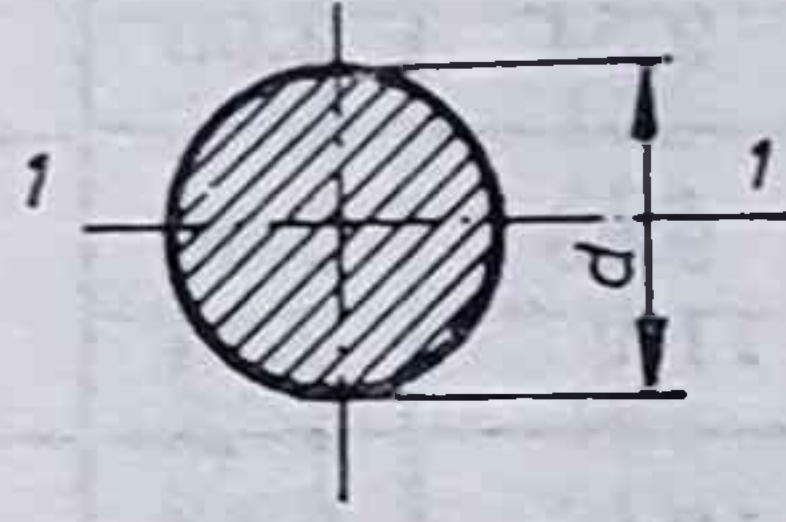
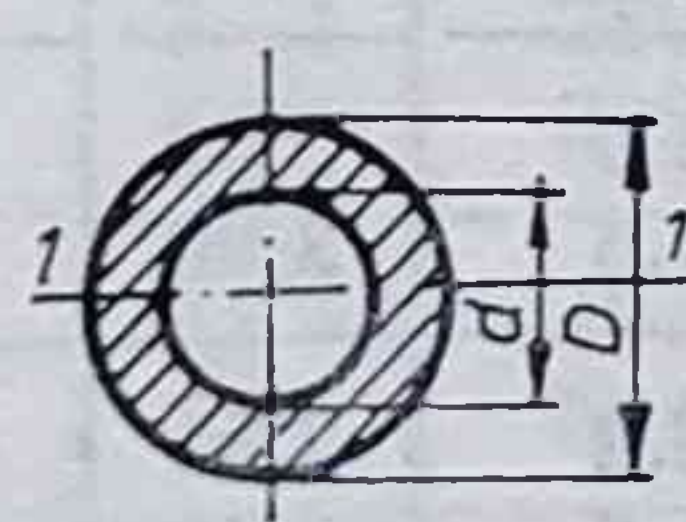
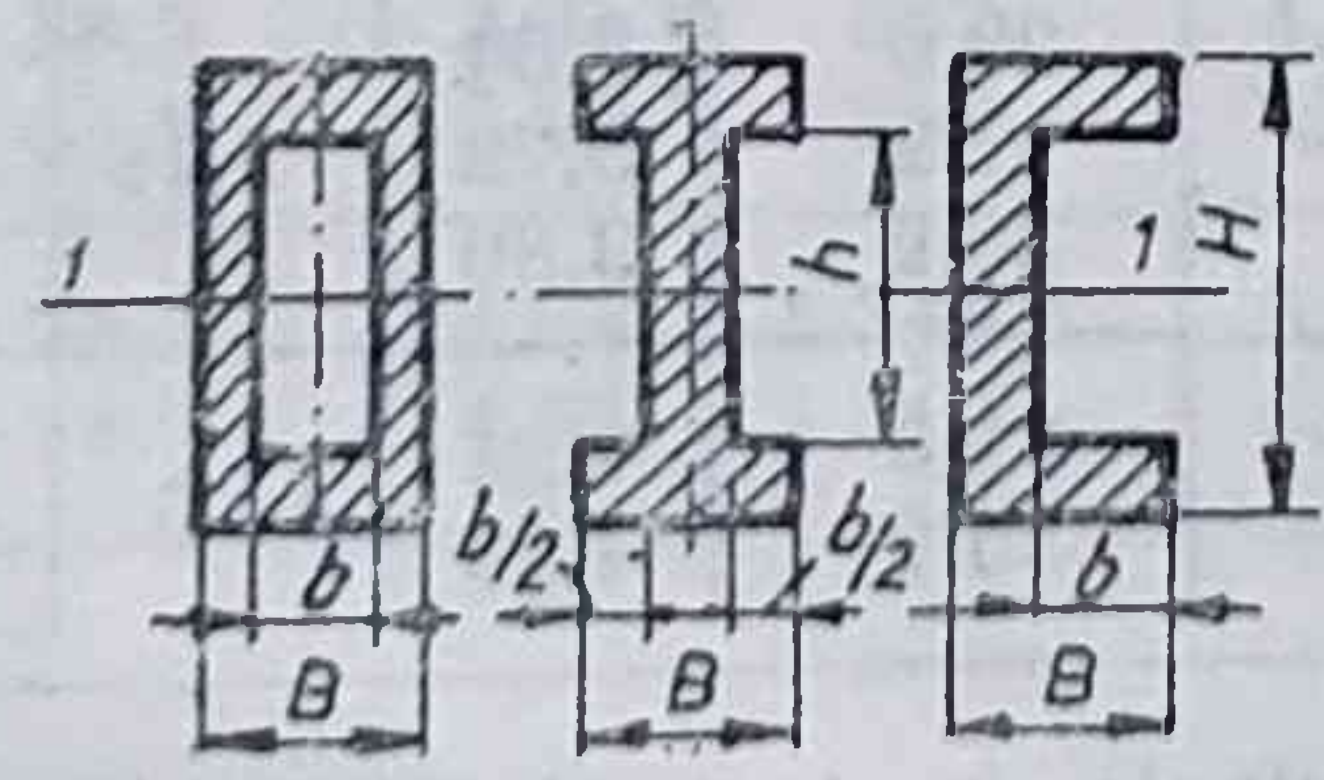
Constante fizice ale unor materiale

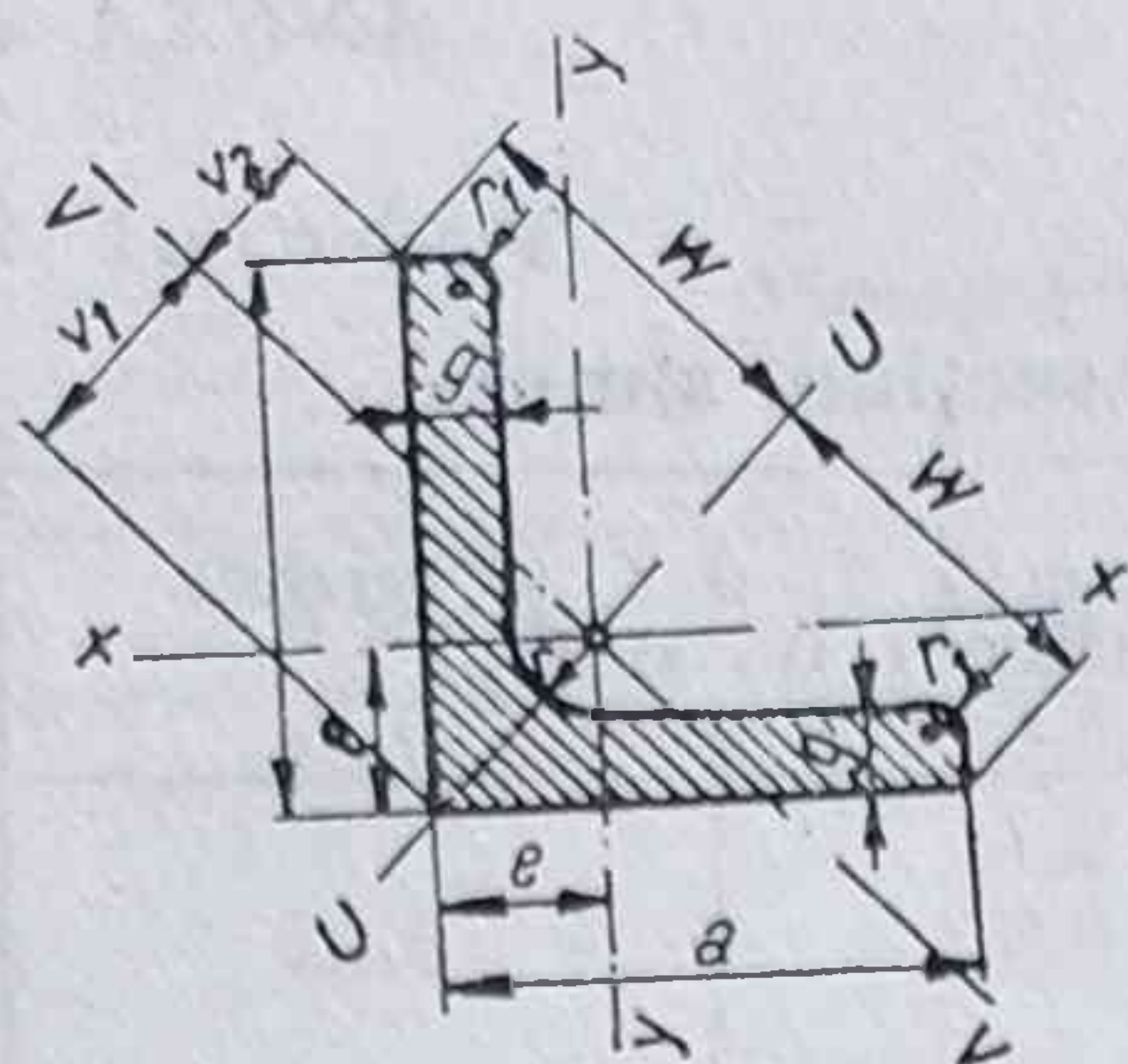
Materialul	Greutatea specifică γ daN/dm ³	Coeficientul de dilatare termică liniară α
Oțel, oțel turnat	7,85	$11 \cdot 10^{-6} - 12 \cdot 10^{-6}$
Fontă	7,25	$10 \cdot 10^{-6}$
Cupru	8,9	$17 \cdot 10^{-6}$
Bronz	8,8	$18 \cdot 10^{-6}$
Alamă	8,5	$19 \cdot 10^{-6}$
Aluminiu	2,56—2,75	$25 \cdot 10^{-6}$
Lemn de brad*	0,37—0,75	$2 \cdot 10^{-6} - 5 \cdot 10^{-6}$
Lemn de stejar*	0,69—1,03	$2 \cdot 10^{-6} - 5 \cdot 10^{-6}$
Beton	2,2	$12 \cdot 10^{-6}$

* Uscat la aer cu 20% umiditate,

Tabelul 1

Momente de inerție și module de rezistență pentru secțiuni simple

Nr. curent	Forma, dimensiunile și axele secțiunii (axele notate cu 1-1 și 2-2 trec prin centrul de greutate)	Momente de inerție I_1 și I_2 și module de rezistență W_1 și W_2
1	<p>Pătrat</p> 	$I_1 = I_2 = \frac{a^4}{12} \quad W_1 = W_2 = \frac{a^3}{6}$
2	<p>Dreptunghi</p> 	$I_1 = \frac{bh^3}{12} \quad I_2 = \frac{hb^3}{12}$ $W_1 = \frac{bh^2}{6} \quad W_2 = \frac{hb^2}{6}$
3	<p>Hexagon</p> 	$I_1 = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = I_2 \quad W_1 = \frac{5}{8} R^3$
4	<p>Hexagon</p> 	$I_1 = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = I_2 \quad W_1 = 0,5413R^3$
5	<p>Cerc</p> 	$I_1 = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4$ $W_1 = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$
6	<p>Coroană circulară</p> 	$\alpha = \frac{d}{D}; \quad I_1 = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4)$ $W_1 = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$
7		$I_1 = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$ $W_1 = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$



Oțel cornier
(după STAS)

I = Moment de inerție
 W = Modul de rezistență

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \text{Rază de inerție}$$

Raportate la axa
de încovoiere
respectivă

Denumirea L	Dimensiunile secțiunii mm				Secțiunea S cm ²	Masa G kg/m	Distanța axelor, cm			
	a	g	r	r_1			e	w	v_1	v_2
20 × 20 × 3 20 × 20 × 4	20	3 4	3,5	2	1,12 1,45	0,88 1,14	0,60 0,64	1,41	0,84 0,90	0,70 0,71
25 × 25 × 3 25 × 25 × 4	25	3 4	3,5	2	1,42 1,85	1,11 1,45	0,72 0,76	1,77	1,02 1,08	0,87 0,89
30 × 30 × 4	30	4	5	2,5	2,27	1,78	0,88	2,12	1,24	1,05
35 × 35 × 4	35	4	5	2,5	2,67	2,09	1,00	2,47	1,42	1,24
40 × 40 × 4 40 × 40 × 5	40	4 5	6	3	3,08 3,79	2,42 2,97	1,12 1,16	2,83	1,58 1,64	1,40 1,42
45 × 45 × 5	45	5	7	3,5	4,30	3,38	1,28	3,18	1,81	1,58
50 × 50 × 5 50 × 50 × 6 50 × 50 × 7	50	5 6 7	7	3,5	4,80 5,69 6,56	3,77 4,47 5,15	1,40 1,45 1,49	3,54	1,98 2,04 3,10	1,76 1,77 1,78
60 × 60 × 6 60 × 60 × 8 60 × 60 × 10	60	6 8 10	8	4	6,91 9,03 11,1	5,42 7,09 8,69	1,69 1,77 1,85	4,24	2,39 2,50 2,61	2,11 2,14 2,17
70 × 70 × 7 70 × 70 × 9	70	7 9	9	4,5	9,40 11,9	7,38 9,34	1,97 2,05	4,95	2,79 2,90	2,47 2,50
80 × 80 × 8 80 × 80 × 10	80	8 10	10	5	12,3 15,1	9,63 11,9	2,26 2,34	5,66	3,19 3,30	2,82 2,85
90 × 90 × 9 90 × 90 × 11	90	9 11	11	5,5	15,5 18,7	12,2 14,7	2,54 2,62	6,36	3,59 3,70	3,18 3,21
100 × 100 × 10 100 × 100 × 12	100	10 12	12	6	19,2 22,7	15,0 17,8	2,82 2,90	7,07	3,99 4,11	3,54 3,57
120 × 120 × 10 120 × 120 × 12	120	10 12	13	6,5	23,2 27,5	18,2 21,6	3,31 3,40	8,49	4,69 4,80	4,23 4,26
130 × 130 × 12 130 × 130 × 14 130 × 130 × 16	130	12 14 16	14	7	30,0 34,7 39,3	23,6 27,2 30,9	3,64 3,72 3,80	9,19	5,15 5,26 5,37	4,60 4,63 4,66
150 × 150 × 14 150 × 150 × 16	150	14 16	16	8	40,3 45,7	31,6 35,9	4,21 4,29	10,6	5,95 6,07	5,31 5,34

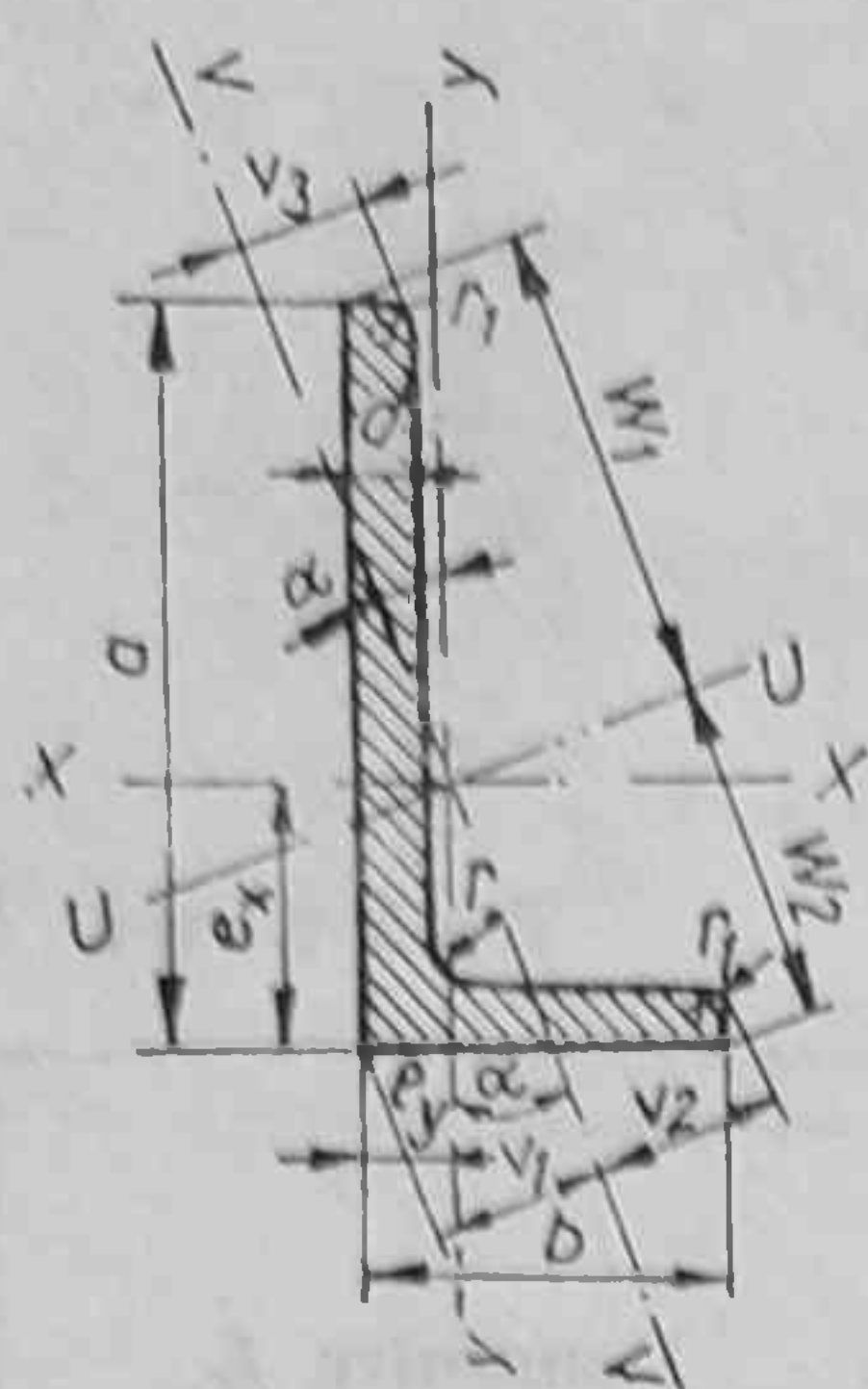
Masa este calculată pentru dimensiunile nominale, pe baza densității de 7,85 kg/dm³

cu aripi egale
424 — 71)

Tabelul 1

Mărimile statice pentru axe de încovoiere								Denumire <i>L</i>
<i>x - x = y - y</i>			<i>U - U</i>		<i>V - V</i>			
<i>I_x = I_y</i> cm ⁴	<i>W_x = W_y</i> cm ³	<i>i_x = i_y</i> cm	<i>I_u</i> cm ⁴	<i>i_u</i> cm	<i>I_v</i> cm ⁴	<i>W_v</i> cm ³	<i>i_v</i> cm	
0,39 0,41	0,28 0,36	0,59 0,58	0,61 0,77	0,74 0,73	0,16 0,21	0,19 0,23	0,38 0,38	20 × 20 × 3 20 × 20 × 4
0,80 1,01	0,45 0,58	0,75 0,74	1,26 1,60	0,94 0,93	0,33 0,43	0,32 0,40	0,48 0,48	25 × 25 × 3 25 × 25 × 4
1,80	0,85	0,89	2,85	1,12	0,75	0,61	0,58	30 × 30 × 4
2,95	1,18	1,05	4,68	1,33	1,23	0,86	0,68	35 × 35 × 4
4,47 5,43	1,55 1,91	1,21 1,20	7,09 8,60	1,52 1,41	1,85 2,26	1,17 1,37	0,78 0,77	40 × 40 × 4 40 × 40 × 5
7,84	2,43	1,35	12,4	1,70	3,25	1,80	0,87	45 × 45 × 5
11,0 12,8 14,6	3,05 3,61 4,16	1,51 1,50 1,49	17,4 20,4 23,1	1,90 1,89 1,88	4,54 5,33 6,10	2,59 2,61 2,91	0,97 0,97 0,96	50 × 50 × 5 50 × 50 × 6 50 × 50 × 7
22,8 29,2 34,9	5,29 6,89 8,41	1,82 1,80 1,78	36,2 46,2 55,1	2,29 2,26 2,23	9,43 12,1 14,8	3,95 4,86 5,67	1,17 1,16 1,16	60 × 60 × 6 60 × 60 × 8 60 × 60 × 10
42,4 52,6	8,41 10,6	2,12 2,10	67,1 83,1	2,67 2,64	17,6 22,0	6,27 7,59	1,36 1,36	70 × 70 × 7 70 × 70 × 9
72,2 87,5	12,6 15,4	2,43 2,41	115 139	3,06 3,03	29,8 36,3	9,36 11,0	1,55 1,55	80 × 80 × 8 80 × 80 × 10
116 138	18,0 21,6	2,74 2,72	184 218	3,45 3,41	47,8 57,1	13,3 15,4	1,76 1,75	90 × 90 × 9 90 × 90 × 11
177 207	24,6 29,1	3,04 3,02	280 328	3,83 3,80	72,9 85,7	18,3 20,9	1,95 1,94	100 × 100 × 10 100 × 100 × 12
313 368	36,0 42,7	3,67 3,65	497 584	4,63 4,60	129 151	27,5 31,5	2,36 2,35	120 × 120 × 10 120 × 120 × 12
472 540 605	50,4 58,2 65,8	3,97 3,94 3,92	750 857 959	5,00 4,77 4,94	194 223 251	37,7 42,4 46,7	2,54 2,53 2,52	130 × 130 × 12 130 × 130 × 14 130 × 130 × 16
845 949	78,2 88,7	4,58 4,56	1 340 1 510	5,77 5,74	347 391	58,3 64,4	2,94 2,93	150 × 150 × 14 150 × 150 × 16

Oțel cornier
(după STAS)



$$I = \text{Moment de inerție}$$

$$W = \text{Modul de rezistență}$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \text{Rază de inerție}$$

Raportate la axa
de încovolere
respectivă

Denumire LL	Dimensiunile secțiunii, în mm					Secți- unea S cm ²	Masa G kg/m	Distanța axelor, cm						
	b	a	g	r	r ₁			e _x	e _y	w ₁	w ₂	v ₁	v ₂	v ₃
40 × 60 × 5 40 × 60 × 6 40 × 60 × 7	40	60	5 6 7	6	3	4,79 5,68 6,55	3,76 4,46 5,14	1,96 2,00 2,04	0,97 1,01 1,05	4,10 4,08 4,06	3,01 3,02 3,03	1,68 1,72 1,77	2,10 2,10 2,09	1,10 1,12 1,14
50 × 65 × 7 50 × 65 × 8	50	65	7 8	6,5	3,5	7,60 8,60	5,96 6,75	2,08 2,11	1,33 1,37	4,50 4,49	3,62 3,64	2,19 2,23	2,39 2,39	1,52 1,54
65 × 80 × 6 65 × 80 × 8 65 × 80 × 10	65	80	6 8 10	8	4	8,41 11,0 13,6	6,60 8,66 10,7	2,39 2,47 2,55	1,65 1,73 1,81	5,61 5,59 5,56	4,63 4,65 4,68	2,69 2,79 2,90	2,94 2,94 2,95	2,01 2,05 2,11
75 × 100 × 7 75 × 100 × 9 75 × 100 × 11	75	100	7 9 11	10	5	11,9 15,1 18,2	9,32 11,8 14,3	3,06 3,15 3,23	1,83 1,91 1,99	6,96 6,91 6,87	5,42 5,45 5,49	3,10 3,22 3,32	3,61 3,63 3,65	2,18 2,22 2,27
80 × 120 × 8 80 × 120 × 10 80 × 120 × 12	80	120	8 10 12	11	5,5	15,5 19,1 22,7	12,2 15,0 17,8	3,83 3,92 4,00	1,87 1,95 2,03	8,23 8,18 8,14	5,99 6,03 6,06	3,27 3,37 3,46	4,23 4,21 4,20	2,16 2,19 2,25
100 × 150 × 10 100 × 150 × 12 100 × 150 × 14	100	150	10 12 14	13	6,5	24,2 28,7 33,2	19,0 29,6 26,1	4,80 4,89 4,97	2,34 2,42 2,50	10,3 10,2 10,2	7,50 7,53 7,56	4,10 4,19 4,28	5,25 5,24 5,23	2,68 2,73 2,77

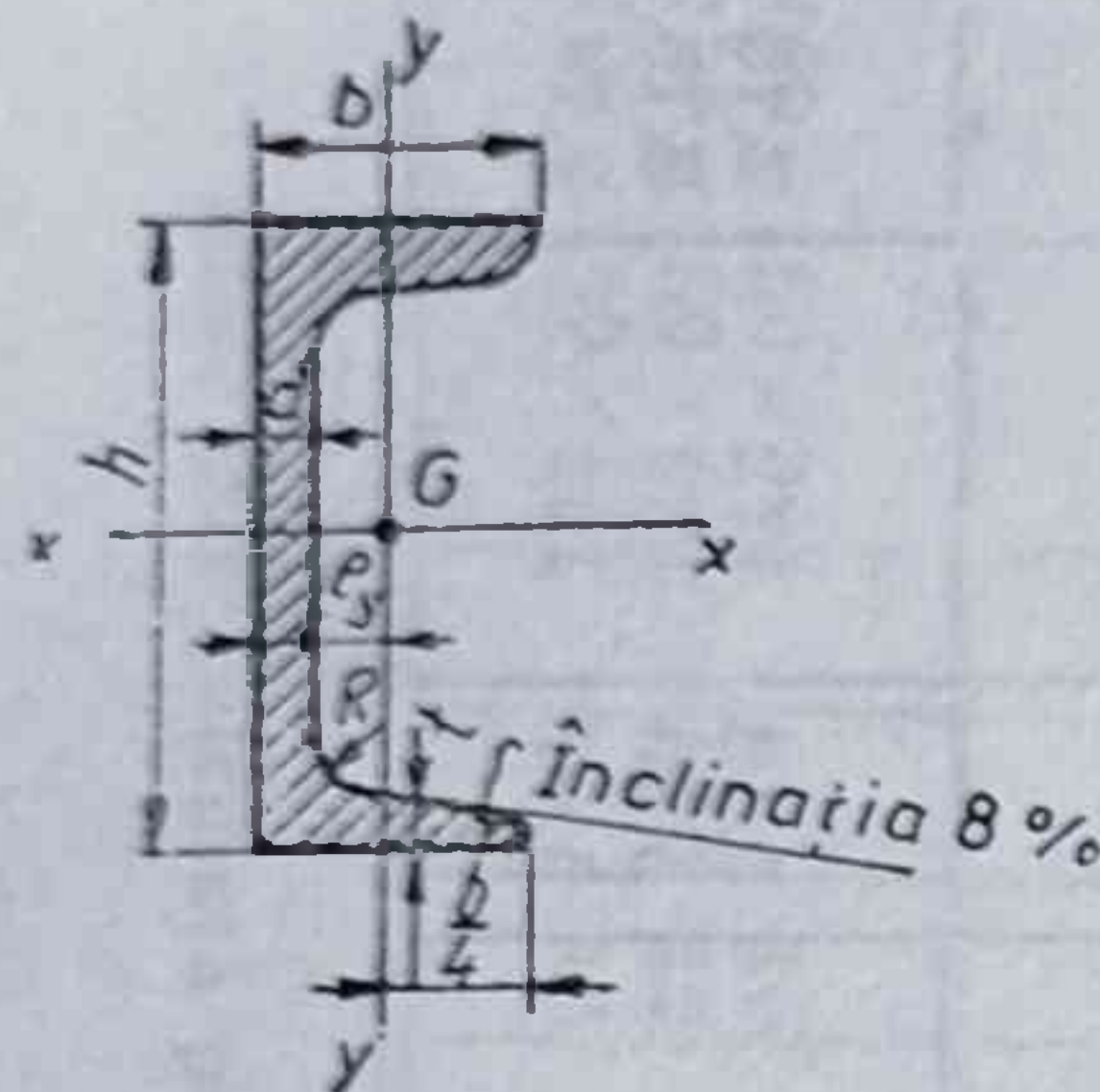
Masa este calculată pentru dimensiunile nominale, pe baza densității de 7,85 kg/dm³.

cu aripi neegale
425-70)

T a b e l u l 2

Unghiul de inclinare a axelor $\text{tg } \alpha$	Mărimile statice pentru axe de încovoiere									
	$x - x$			$y - y$			$U - U$		$V - V$	
	I_x cm^4	W_x cm^3	i_x cm	I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm	I_U cm^4	i_U cm	I_V cm^4	i_V cm
0,434	17,2	4,25	1,89	6,11	2,02	1,13	19,8	2,03	3,54	0,86
0,431	20,1	5,03	1,88	7,12	2,38	1,12	23,1	2,02	4,15	0,86
0,427	22,9	5,79	1,87	8,07	2,74	1,11	26,3	2,00	4,75	0,85
0,572	31,1	7,03	2,02	15,9	4,34	1,45	38,5	2,25	8,51	1,06
0,569	34,8	7,93	2,01	17,7	4,89	1,44	43,0	2,23	9,57	1,05
0,649	52,8	9,41	2,51	31,2	6,44	1,93	68,5	2,85	15,6	1,35
0,645	68,1	12,3	2,49	40,1	8,41	1,91	88,0	2,82	20,3	1,36
0,640	82,2	15,1	2,46	48,3	10,3	1,89	106	2,79	24,8	1,35
0,553	118	17,0	3,15	56,9	10,0	2,19	145	3,49	30,1	1,59
0,549	148	21,5	3,13	71,0	12,7	2,17	181	3,47	37,8	1,59
0,545	176	25,9	3,11	84,0	15,3	2,15	214	3,44	45,4	1,58
0,437	226	27,6	3,82	80,8	13,2	2,28	260	4,10	46,6	1,73
0,435	276	34,1	3,80	98,1	16,2	2,26	317	4,07	56,8	1,72
0,432	323	40,4	3,77	114	19,1	2,24	371	4,04	66,6	1,71
0,442	552	54,1	4,78	198	25,8	2,86	637	5,13	112	2,15
0,439	650	64,2	4,76	232	30,6	2,84	749	5,10	132	2,15
0,435	744	74,1	4,73	264	35,2	2,82	856	5,07	152	2,14

Oțel U (după STAS 564-71)



I = Moment de inerție
 W = Modul de rezistență

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \text{Rază de inerție}$$

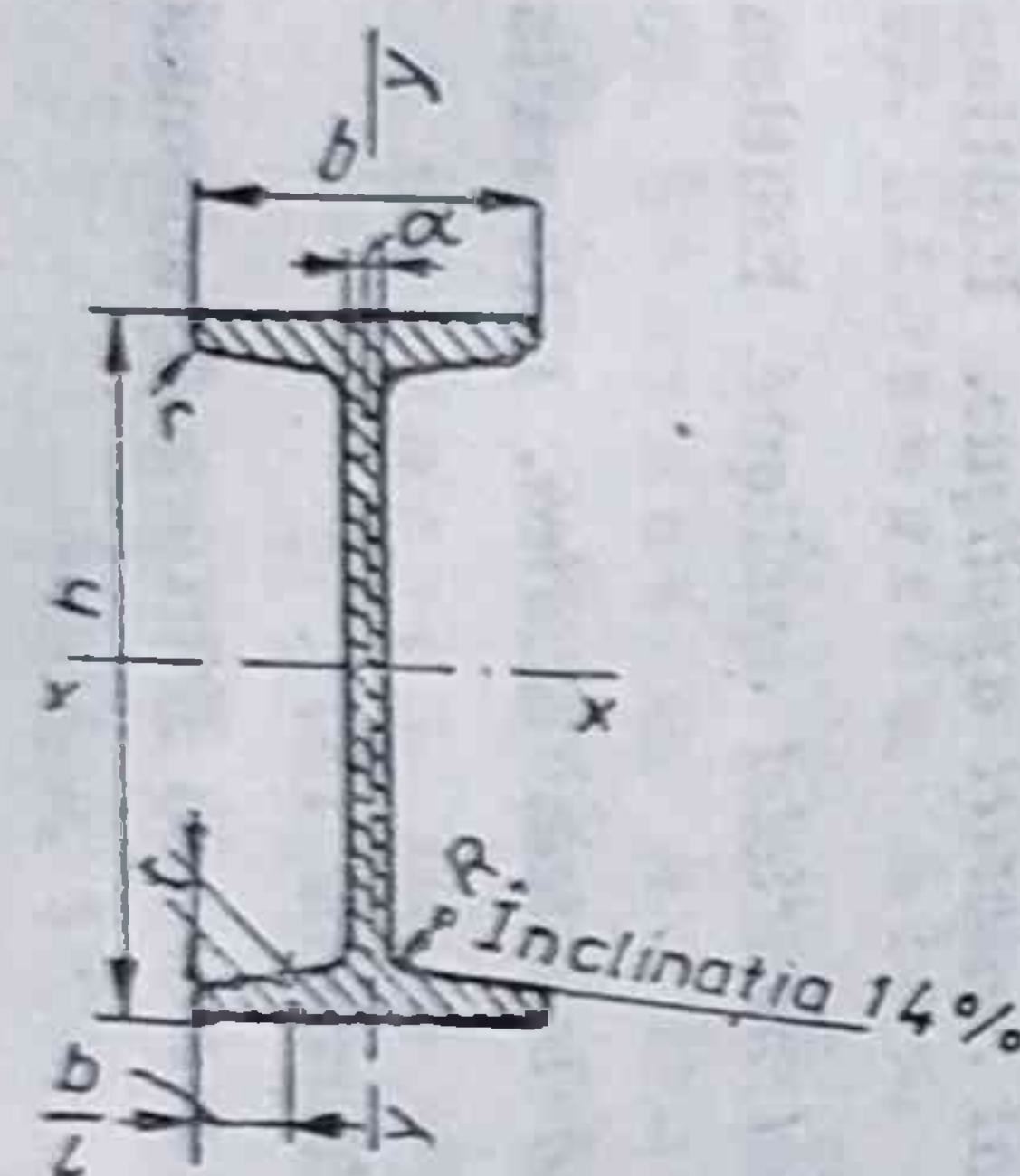
Raportate la axa de încovoiere respectivă

Tabelul 3

Simbol <i>U</i>	Dimensiuni, mm					Aria secțiunii <i>A</i> cm ²	Masa <i>G</i> kg/m	Mărimi statice pentru axele de încovoiere						<i>S_z</i> cm ³	<i>e_y</i> cm	Simbol <i>U</i>
								<i>x – x</i>			<i>y – y</i>					
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>	<i>r</i>			<i>I_x</i> cm ⁴	<i>W_x</i> cm ³	<i>i_x</i> cm	<i>I_y</i> cm ⁴	<i>W_y</i> cm ³	<i>i_y</i> cm			
6,5	65	42	5,5	7,5	4	9,03	7,09	57,5	17,7	2,52	14,1	5,07	1,25	—	1,42	6,5
8	80	45	6	8,0	4	11,0	8,64	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33	15,9	1,45	8
10	100	50	6	8,5	4,5	13,5	10,6	205	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	24,5	1,55	10
12	120	55	7	9,0	4,5	17,0	13,4	364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59	36,3	1,60	12
14	140	60	7	10,0	5	20,4	16,0	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75	51,4	1,75	14
16	160	65	7,5	10,5	5,5	24,0	18,8	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89	68,8	1,84	16
18	180	70	8	11,0	5,5	28,0	22,0	1 350	150	6,95	114	22,4	2,02	89,6	1,92	18
20	200	75	8,5	11,5	6	32,2	25,3	1 910	191	7,70	148	27,0	2,14	114	2,01	20
22	220	80	9	12,5	6,5	37,4	29,4	2 690	245	8,48	197	33,6	2,30	146	2,14	22
24	240	85	9,5	13,0	6,5	42,3	33,2	3 600	300	9,22	248	39,6	2,42	179	2,23	24
26	260	90	10	14,0	7	48,3	37,9	4 820	371	9,99	317	47,7	2,56	221	2,36	26
30	300	100	10	16,0	8	58,8	46,2	8 030	535	11,7	495	67,8	2,90	316	2,70	30

Masa teoretică este calculată cu densitatea de 7,85 kg/dm³.

Oțel I
(după STAS 565-71)



I = Moment de inerție
 W = Modul de rezistență

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \text{Rază de inerție}$$

Raportate la axa de
încovoiere respectivă

Tabelul 4

Simbol I	Dimensiuni, mm					Aria secțiunii A cm^2	Masa G kg/m	Mărimi statice pentru axele de încovoiere						S_x cm^3	Simbol I
	h	b	t	$d = R$	r			$x - x$			$y - y$				
								I_x cm^4	W_x cm^3	i_x cm	I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm		
8	80	42	5,90	3,9	2,3	7,58	5,95	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	11,4	8
10	100	50	6,80	4,5	2,7	10,6	8,32	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	19,9	10
12	120	58	7,70	5,1	3,1	14,2	11,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	31,8	12
14	140	66	8,60	5,7	3,4	18,3	14,4	573	81,9	5,61	36,2	10,71	1,40	47,7	14
16	160	74	9,50	6,3	3,8	22,8	17,9	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55	68,0	16
18	180	82	10,40	6,9	4,1	27,9	21,9	1 450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	93,4	18
20	200	90	11,30	7,5	4,5	33,5	26,3	2 140	214	8,00	117	26,0	1,87	125	20
22	220	98	12,20	8,1	4,9	39,6	31,1	3 060	278	8,80	162	33,1	2,02	162	22
24	240	106	13,10	8,7	5,2	46,1	36,2	4 250	354	9,59	221	41,7	2,20	206	24
26	260	113	14,10	9,4	5,6	53,4	41,9	5 740	442	10,4	288	51,0	2,32	257	26
28	280	119	15,20	10,1	6,1	61,1	48,0	7 590	542	11,1	364	61,2	2,45	316	28
30	300	125	16,20	10,8	6,5	69,1	54,2	9 800	653	11,9	451	72,2	2,56	381	30
32	320	131	17,30	11,5	6,9	77,8	61,1	12 510	782	12,7	555	84,7	2,67	457	32
36	360	143	19,50	13,0	7,8	97,1	76,2	19 610	1 090	14,2	818	114	2,90	638	36
40	400	155	21,60	14,4	8,6	118	92,6	29 210	1 460	15,7	1 160	149	3,13	857	40

Masa teoretică este calculată cu densitatea $7,85 \text{ kg/dm}^3$.

BIBLIOGRAFIE

1. Amequin, R. et Boutiguy, J. *Mécanique* 1, 2, Librairie, 1975, 1974, Paris.
2. Appel, P. *Traité de mécanique rationnelle*. Gauthier Villars 1955, Paris.
3. Atanasiu, M. *Mecanica*. Editura didactică și pedagogică, București, 1973.
4. Bălan, Șt. *Culegere de probleme de mecanică*. Editura tehnică, București, 1964.
5. Bălan, Șt. și Beiu Paladi, E. *Curs de mecanică teoretică*. Tipografia învățămîntului, București, 1960.
6. Bălan, Șt. *Lecții complementare de mecanică*. Editura didactică și pedagogică, București, 1960.
7. Bălan, Șt. și Ivanov, I. *Din istoria mecanicii*. Editura științifică, București, 1966.
8. Beer, P., Ferdinand, E. și Russel Johnston Jr. *Mechanics for Engineers*, Ed. Mc. Graw-Hill-Book Company Inc., New York, 1962.
9. Beleş, A. și Bălan, Șt. *Mecanica teoretică și aplicată*, Editura C.F.R., București, 1942.
10. Beleş, A.A. și Voinea, R. *Rezistența materialelor*, vol. II. Editura tehnică, București, 1958.
11. Boiangiu, D. și Murgulescu, S. *Mecanică*, vol. I, II și III, Litografia, I.P.B.
12. Bradbury, I.C. *Theoretical Mechanics*. Ed. John Wiley — New York, 1967.
13. Brillouin Leon. *Tensors in Mechanics and Elasticity* — Academic Press — New York, 1964.
14. Bucholtz, N.N. și alții. *Culegere de probleme de mecanică rațională* (traducere din limba rusă). Editura tehnică, București, 1951.
15. Burileanu, Șt. *Curs de mecanică rațională*, vol. I, II. București, 1944.
16. Buzdugan, Gh. *Rezistența materialelor*. Editura tehnică, București, 1980.
17. Buzdugan, Gh. și alții. *Culegere de probleme de rezistența materialelor*, ed. VIII. Editura didactică și pedagogică, București, 1979.
18. Buzdugan, Gh. *Calculul de rezistență la solicitări variabile*, ed. 2. Editura tehnică, București, 1963.
19. Caius, Iacob. *Mecanica teoretică*. Editura didactică și pedagogică, București, 1971.
20. Ceaușu, V. și alții. *Culegere de probleme de mecanică. Statica*. Litografia I.P.B., 1974.
21. Ciorănescu, N. *Curs de mecanică rațională. Caietul II. Statica*. Politehnica București, 1940.
22. Denis, Papin, M. și Kaufman, A. *Cours de calcul tensoriel appliqué*. Edition Albin Michel, Paris, 1966.
23. Denis Papin, M. și Kaufman, A. *Cours de calcul matriciel appliqué*. Edition Albin Michel, 1969.
24. Frățilă-Voiculescu, Mariana. *Curs de mecanică tehnică. Statica*. Litografia I.P.B., București, 1977.
25. Feodosiev, V. *Résistance des matériaux*. Edit. MIR, Moscou, 1971.
26. Gabos, Z., Mangeron, D., Stan, I. *Fundamentele mecanicii*. Editura Academiei București, 1962.

27. Gheorghiu, Gh. Th. *Curs de matematici speciale*. Litografia I.P.B., București, 1975.
28. Ghermănescu-Ionescu Lucia, Rusiu Gh., Tiperciuc Gh. *Mecanica tehnică, Partea I*. Litografia, I.P.B., 1973.
29. Ioachimescu, A. *Mecanica rațională*. Biblioteca Gazetei matematice. Imprimeria națională, București, 1947.
30. Livovski, L. *Curs de mecanică și teoria elasticității*. Litografia Institutului de Petrol și Gaze, 1970.
31. Landau, I. și Lifșitz, F. *Mecanica* (traducere din limba rusă). Editura tehnică, București, 1961.
32. Laițianschi, L. și Lurie, A. I. *Kurs teoreticeskoi mehaniki*, vol. I, II. Gostehizdat, Moskova, 1955.
33. Mangeron, D. și Irimiciuc, N. *Curs de mecanică rațională cu aplicații în ingineria mecanică*. Litografia Inst. Politehnic Gh. Assachi, Iași, 1970.
34. Meșcerski, I. V. *Recueil des problemes de mécanique rationnelle*. Edition MIR, Moscou, 1973.
35. Nekrasov, A. I. *Curs de mecanică teoretică* (traducere din limba rusă). Editura tehnică, București, 1958.
36. Massonnet, Gh. *Résistance des matériaux*, vol. I. Dunod, Paris, 1967, vol. II Science et Littres, Liège, 1967.
37. Nihoul I. C. Jacques. *Cours moderne de mécanique rationnelle*. Edition Albin Michel, Paris, 1968.
38. Newton, Issac. *Principiile matematice ale filozofiei raționale* (traducere din limba engleză). Editura Academiei R.S.R., 1956.
39. Onicescu, O. *Mecanica*. Editura tehnică, București, 1969.
40. Pelecudi Cristian. *Mecanisme spațiale*. Editura Academiei R.S.R., București, 1972.
41. Plăcinteanu, I. I. *Mecanica vectorială și analitică*. Editura tehnică, București, 1958.
42. Rădoi, M., Deciu, E., Voiculescu, D. *Curs de mecanică, Statica și Cinematica*, Litografia I. P. B., 1973.
43. Rădoi, M. și Deciu, E. *Mecanica*. Editura didactică și pedagogică, București, 1981.
44. Rădoi, M. și Popescu, B. *Mecanica*, vol. I. Editura didactică și pedagogică, București, 1966.
45. Roșca, I., Pandrea, N. *Curs de mecanică tehnică*, partea I. Litografia I.P.B 1971.
46. Sarian, M., Caragheorghe, E., Boianțiu, D. D., Voiculescu, D. și alții. *Probleme de mecanică*. Editura didactică și pedagogică, 1975.
47. Sarian, M., Boianțiu, D. D. și colectiv. *Culegere de probleme de mecanică*. Editura didactică și pedagogică, 1961.
48. Sarian, M. *Mecanica și rezistența materialelor*, vol. I. Editura didactică și pedagogică, București, 1965.
49. Sima, P. *Culegere de probleme de mecanică*. Litografia Institutului politehnic Brașov, 1964.
50. Staicu, Șt. *Mecanica tehnică*. Litografia I.P.B. București, 1973.
51. Stan, A. și Grumăzescu, M. *Probleme de mecanică*. Editura didactică și pedagogică, București, 1974.
52. Stoenescu, Alex. și Silaș, Gh. *Mecanica teoretică*, ed. III. Editura didactică și pedagogică, București, 1963.
53. Stoenescu, A., Buzdugan, Gh., Ripianu, A., Atanasiu, M. *Culegere de probleme de mecanică teoretică*, Editura tehnică, 1958.
54. Stoenescu, A. și alții. *Culegere de probleme de mecanică teoretică*, Editura didactică și pedagogică, București, 1961.
55. Suslov, K. G. *Mecanica rațională* (traducere din limba rusă), vol. I, II. Editura tehnică, 1950.

56. Targ, S. I. *Elements de mécanique rationnelle*. Edition MIR, Moscou, 1975.
57. Timoshenko, S. P. *Théorie de l'élasticité*. Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris, 1948.
58. Timoshenko, S. P. și Young, H. *Mécanique de l'ingénieur*. Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris, 1962.
59. Timoshenko, S. P. *Résistance des Matériaux* vol. I, II. Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris, Liège, 1949.
60. Vâlcovici, V. *Curs de mecanică*, vol. I. Litografia învățămîntului, București, 1958.
61. Vâlcovici, V., Bălan, Șt., Voinea, R. *Mecanică teoretică*, ed. III. Editura tehnică, București, 1968.
62. Voinarowski, R. *Mecanica teoretică*. Editura didactică și pedagogică, București, 1968.
63. Voinea, R. *Mecanică teoretică*, vol. I și II. Litografia învățămîntului, București, 1955.
64. Voinea, R., Voiculescu, D., Ceașu, V. *Mecanica*. Editura didactică și pedagogică, București, 1976.
65. Voiculescu, D., Enescu, N., Zamfirescu, E. *Mecanica și rezistența materialelor. Statica*. Litografia I. P. B., 1975.
66. * * * *Manualul inginerului mecanic*, vol. II. Editura tehnică, București, 1966.
67. * * * STAS 1814-64. *Mecanica teoretică. Terminologie și simboluri*.

CUPRINS

<i>Prefață</i>	3
1. Obiectul mecanicii	5
1.1. Concepte din mecanică	7
1.2. Sisteme de referință	7
1.3. Principiile mecanicii	8
1.4. Diviziunile mecanicii	8
1.5. Sisteme de unități de măsură	9

Partea I

STATICA

2. Statica punctului material	11
2.1. Statica punctului material liber	12
2.1.1. Reducerea forțelor concurente	12
2.1.2. Teorema proiecțiilor	14
2.1.3. Reducerea unui sistem de forțe pe cale analitică	15
2.1.4. Echilibrul punctului material liber	18
2.2. Statica punctului material supus la legături	18
2.2.1. Axioma legăturilor	19
2.2.2. Echilibrul punctului material supus la legături fără frecare	19
2.2.3. Echilibrul punctului material supus la legături cu frecare	21
3. Statica corpului solid rigid	24
3.1. Reducerea unui sistem de forțe concurente ce acționează asupra corpului solid rigid	24
3.2. Momentul unei forțe în raport cu un punct	25
3.2.1. Expresia analitică a vectorului moment	26
3.2.2. Momentul unei forțe în raport cu o axă	26
3.2.3. Momentul unui cuplu de forțe	27
3.3. Reducerea unui sistem de forțe oarecare ce acționează asupra unui corp solid rigid	28
3.3.1. Operații de echivalență	28
3.3.2. Torsorul	29
3.3.3. Reducerea unui sistem de forțe oarecare aplicate asupra unui corp solid rigid în raport cu un punct	30
3.3.4. Invarianții unui sistem de forțe	31

3.3.5. Axa centrală (axa torsesorului)	32
3.3.6. Cazuri de reducere ale unui sistem de forțe oarecare	33
3.4. Sisteme de forțe plane	34
3.5. Sisteme de forțe paralele	35
3.6. Sisteme de cupluri de forțe	37
3.7. Echilibrul corpului solid rigid liber	38
3.8. Echilibrul corpului solid rigid supus la legături	39
3.8.1. Axioma legăturilor	39
3.8.2. Legăturile corpului solid rigid	39
3.9. Echilibrul corpului solid rigid cu frecare	42
3.9.1. Frecarea de alunecare	44
3.9.2. Frecarea de rostogolire	44
3.9.3. Frecarea de pivotare	46
3.9.4. Frecarea în articulații și lagăre	47
3.9.5. Frecarea în scripeți	49
3.9.6. Frecarea firelor	50
4. Centrul maselor (centrul de greutate)	56
4.1. Coordonatele centrului de greutate în cazul corpurilor omogene	57
4.2. Momente statice	58
4.3. Proprietățile centrului maselor	59
4.4. Exemple	60
5. Sisteme de corpuri	64
5.1 Metoda izolării corpurilor	64
5.2. Metoda solidificării părților	65
5.3. Grinzi cu zăbrele	66
5.3.1. Considerații generale	66
5.3.2. Determinarea eforturilor în bare	67
6. Statica firelor	73
6.1. Considerații generale	73
6.2. Ecuația generală a firelor	74
6.2.1. Ecuațiile diferențiale ale firelor în sistemul de coordonate carteziane	75
6.2.2. Ecuațiile diferențiale ale firelor în coordonate intrinseci	76
6.2.3. Cazul firului omogen greu. Lănțisorul	77
6.2.4. Ecuațiile aproximative ale firelor	80

Partea a II-a

CINEMATICA

7. Cinematica punctului material	83
7.1. Studiul mișcării punctului în coordonate carteziane	84
7.1.1. Ecuațiile mișcării	84
7.1.2. Traectoria	84
7.1.3. Viteza instantanee a punctului mobil	85
7.1.4. Accelerația instantanee a punctului mobil	85
7.1.5. Spațiul (distanța) parcurs	86

7.1.6. Viteza și accelerația unghiulară	87
7.1.7. Viteza și accelerația areolară	87
7.1.8. Unități de măsură	89
7.2. Studiul mișcării în coordonate intrinseci	89
7.3. Studiul mișcării în coordonate polare	91
7.4. Mișcări particulare ale punctului	93
7.4.1. Mișcarea rectilinie uniformă	93
7.4.2. Mișcarea rectilinie uniform variată	94
7.4.3. Mișcarea circulară	95
8. Cinematica corpului solid rigid	99
8.1. Noțiuni generale	99
8.2. Mișcarea de translație a unui corp solid rigid	103
8.3. Mișcarea de rotație a solidului rigid în jurul unei axe fixe	104
8.4. Mișcarea elicoidală	106
8.4.1. Mișcarea elicoidală simplă	106
8.4.2. Mișcarea elicoidală instantanee	107
8.5. Mișcarea plan-paralelă (plană)	108
8.5.1. Distribuția vitezelor	108
8.5.2. Distribuția accelerațiilor în mișcarea plan-paralelă	110
8.5.3. Metode grafo-analitice pentru determinarea distribuției vitezelor și accelerațiilor punctelor unui corp solid ce are o mișcare plan-paralelă	112
8.6. Mișcarea de rotație a unui corp solid rigid în jurul unui punct fix . . .	117
8.7. Mișcarea generală a unui corp solid rigid	119
9. Mișcarea relativă a punctului material	124

Partea a III-a

DINAMICA

10. Dinamica punctului material	131
10.1. Legea fundamentală a dinamicii în cazul punctului material liber . . .	131
10.1.1. Mișcarea punctului material în vid	133
10.1.2. Mișcarea punctului material supus la legături	135
10.1.3. Teoremele generale în cazul punctului material	135
10.2. Mișcarea unui punct material sub acțiunea unei forțe centrale	139
10.2.1. Generalități	139
10.2.2. Ecuația lui Binet	141
10.2.3. Mișcarea sub acțiunea forței centrale de atracție newtoniană . . .	141
10.3. Mișcarea rectiline oscilatorie armonică	143
10.3.1. Mișcarea rectiline oscilatorie armonică neamortizată	143
10.3.2. Mișcarea rectilinie oscilatorie armonică cu forță perturbatoare . .	145
10.3.3. Mișcarea rectilinie oscilatorie liberă amortizată (fără forță pertur- batoare)	149
10.3.4. Mișcarea rectilinie oscilatorie amortizată sub acțiunea unei forțe perturbatoare sinusoidale	152
10.3.5. Sisteme analogice	157
10.4. Dinamica mișcării relative a punctului material	161

11. Momente de inerție	164
11.1. Generalități	164
11.2. Variația momentelor de inerție mecanice în raport cu diferite sisteme de referință	168
12. Impulsul (cantitatea de mișcare), momentul cinetic, energia cinetică și lucrul mecanic în cazul unui sistem de puncte materiale sau de corpuri	175
12.1. Impulsul	175
12.2. Momentul cinetic	176
12.2.1. Cazul mișcării de translație	176
12.2.2. Cazul mișcării de rotație în jurul unei axe fixe.	176
12.2.3. Cazul mișcării generale	177
12.3. Lucrul mecanic	178
12.3.1. Lucrul mecanic elementar al unui sistem de forțe ce acționează asupra unui corp solid rigid	178
12.3.2. Puterea	179
12.3.3. Randamentul mecanic	179
12.4. Energia cinetică	179
12.4.1. Cazul mișcării de translație	180
12.4.2. Cazul mișcării de rotație în jurul unei axe fixe	180
12.4.3. Cazul mișcării generale	180
12.5. Teoremele generale ale dinamicii	181
12.5.1. Teoremele impulsului în cazul sistemelor de puncte materiale sau de corpuri.	181
12.5.2. Teorema momentului cinetic	182
12.5.3. Teorema energiei cinetice	184
13. Dinamica corpului solid în rotație în jurul unei axe fixe	191
13.1. Ecuațiile mișcării	191
13.2. Echilibrul static și dinamic	193
14. Dinamica rigidului cu un punct fix	193
14.1. Ecuațiile de mișcare	193
14.2. Calculul reacțiunilor	195
14.3. Cazul Euler-Poinsot	195
14.4. Giroscopul	195
14.4.1. Giroscopul centrat	200
14.4.2. Giroscopul necentrat	203
15. Mișcarea generală a rigidului	206
15.1. Ecuațiile de mișcare în cazul unui corp solid rigid liber	206
15.2. Ecuațiile de mișcare ale corpului solid rigid supus la legături	207
16. Ciocniri	207
16.1. Teoremele generale aplicate în studiul ciocnirii	208
16.1.1. Teorema impulsului	208
16.1.2. Teorema momentului cinetic	209
16.1.3. Teorema variației energiei cinetice	209

16.2. Ciocnirea centrică a două sfere	211
16.3. Variația energiei cinetice	213
16.4. Ciocnirea oblică	214
16.5. Ciocnirea unei sfere cu un corp ce se poate roti în jurul unei axe fixe. Percuții pe axa fixă. Centrul de percuții	215
17. Elemente de mecanică analitică	219
17.1. Generalități	219
17.1.1. Coordonate generalizate	220
17.1.2. Legături. Deplasări	221
17.2. Principiul lui d'Alembert (metoda cinctostatică). Forțe de inerție. Cuplu de inerție	225
17.3. Principiul deplasărilor virtuale	227
17.3.1. Forța generalizată	227
17.3.2. Principiul vitezelor virtuale	228
17.3.3. Principiul lui Toricelli	229
17.4. Ecuațiile lui Lagrange	229
17.5. Ecuațiile lui Hamilton. Impuls generalizat	232

Partea a IV-a

REZISTENȚA MATERIALELOR

18. Ipoteze și concepte fundamentale ale rezistenței materialelor	241
18.1. Modelarea corpurilor deformabile	241
18.2. Eforturi în bare	244
18.3. Eforturi unitare	246
18.4. Deformații specifice	248
18.5. Relația între eforturi unitare și deformații specifice	249
18.6. Con tracția transversală	251
18.7. Rezistențe admisibile. Coeficienți de siguranță	252
18.8. Legătura rezistenței materialelor cu alte discipline	253
19. Diagrame de eforturi în bare	254
19.1. Diagrame de eforturi la bare drepte	254
19.1.1. Convenția de semne privind sensul pozitiv al eforturilor	254
19.1.2. Convenția privind axele diagramelor de eforturi	254
19.1.3. Relații diferențiale între eforturi la bare drepte	254
19.1.4. Construcția diagramelor de forțe tăietoare și de momente înco- voietoare	256
19.1.5. Diagrama forțelor axiale	259
19.2. Diagrame de eforturi la bare cotite	260
20. Întindere și compresiune	263
20.1. Eforturi unitare și deformații	263
20.2. Energia de deformație la întindere	264
20.3. Sisteme static neceterminate	264
20.3.1. Bară dublu articulată	265
20.3.2. Bară de secțiune neomogenă	265
20.3.3. Sistem de bare paralele	266
20.3.4. Eforturi produse de dilatarea împiedicată	266

21. Răsucirea	272
21.1. Calculul momentului de răsucire	273
21.2. Eforturi unitare în bare de secțiune axial-simetrică	273
21.3. Deformații la răsucire	275
21.4. Energia de deformare la răsucire	275
21.5. Calculul arcurilor cilindrice elicoidale	276
21.6. Răsucirea barelor cu secțiune dreptunghiulară	271
22. Încovoierea	281
22.1. Momentele de inerție ale suprafețelor plane	282
22.2. Încovoierea pură a barelor drepte	282
22.3. Încovoierea simplă a barelor drepte	285
22.3.1. Dualitatea eforturilor unitare tangențiale	286
22.3.2. Eforturi unitare tangențiale	286
22.3.3. Compararea între valorile eforturilor unitare σ și τ	289
22.3.4. Lunecarea longitudinală	289
22.3.5. Forma optimă a barelor solicitate la încovoiere	291
22.3.6. Energia de deformare la încovoiere	292
22.4. Încovoierea oblică a barelor drepte	292
22.5. Deformațiile barelor drepte solicitate la încovoiere	293
22.5.1. Bara în consolă încărcată cu o forță în capăt	294
22.5.2. Bara simplu rezemată încărcată cu o sarcină uniform distribuită	295
23. Elemente de teoria elasticității	298
23.1. Starea generală de eforturi unitare și de deformare	298
23.2. Eforturi unitare în jurul unui punct	299
23.3. Eforturi unitare principale	300
23.4. Starea plană de eforturi unitare	302
23.4.1. Eforturi unitare în jurul unui punct	302
23.4.2. Eforturi unitare normale principale. Direcții principale	303
23.4.3. Cazuri particulare ale stării plane la eforturi	304
23.5. Legea lui Hooke generalizată	306
23.6. Ecuația lui Poisson	307
23.7. Energia potențială de deformare	308
24. Teorii de rezistență	309
24.1. Teoriile clasice de rezistență	310
24.2. Aplicarea teoriilor de rezistență la stări plane de eforturi unitare	311
25. Solicitări compuse	312
25.1. Întinderea excentrică	312
25.2. Bare solicitate la încovoiere și răsucire	316
26. Bare curbe plane	320
26.1. Relații diferențiale între eforturi	320
26.2. Diagrame de eforturi la bare curbe	321
26.3. Eforturi unitare în bare curbe	322
27. Metode energetice pentru calculul deplasărilor	325
27.1. Energia potențială totală de deformare	325
27.2. Teorema reciprocității lucrului mecanic (teorema lui Betti)	326

27.3. Teorema reciprocității deplasărilor (teorema lui Maxwell)	327
27.4. Teorema minimului energiei potențiale totale	327
27.5. Prima teoremă a lui Castigliano	328
27.6. Principiul energiei potențiale complementare	329
27.7. A doua teoremă a lui Castigliano	330
27.8. Calculul deformațiilor la încovoiere a barelor cu ajutorul teoremei lui Castigliano	330
27.9. Metoda Mohr-Maxwell	331
27.10. Regula de integrare a lui Veresceaghin	332
27.11. Calculul deformațiilor sistemelor solicate la întindere-compresiune	337
28. Sisteme static nedeterminate	339
28.1. Generalitatea	339
28.2. Metoda eforturilor	339
28.3. Teorema lui Menabrea	340
28.4. Ecuațiile canonice ale metodei eforturilor	341
28.5. Sisteme static nedeterminate solicate la întindere și compresiune	350
29. Flambajul barelor drepte	351
29.1. Instabilitate elastică	351
29.2. Calculul sarcinii critice prin metoda energetică	353
29.3. Calculul sarcinii critice prin metoda diferențială (metoda lui Euler)	355
29.4. Diagrama efortului unitar critic de flambaj	356
29.5. Calculul la flambaj	358
30. Vibrațiile sistemelor cu mai multe grade de libertate	362
30.1. Vibrațiile sistemelor cu mase concentrate	362
30.1.1. Vibrații transversale	363
30.1.2. Vibrații torsionale	367
30.2. Vibrațiile barelor drepte	370
30.2.1. Vibrații transversale	370
30.2.2. Metoda lui Rayleigh	374
30.2.3. Vibrații longitudinale	377
31. Sollicitări dinamice	379
31.1. Coeficientul dinamic	379
31.2. Sollicitări prin forțe de inerție constante	379
31.2.1. Calculul unei bare în rotație	380
31.2.2. Calculul cablului de macara	380
31.3. Sollicitări prin șoc	381
31.3.1. Răspunsul la o forță variabilă în timp	381
31.3.2. Răspunsul la o forță variabilă constantă aplicată brusc	382
31.3.3. Răspunsul la un impuls triunghiular	383
31.4. Sollicitări prin forțe periodice	386
32. Oboseala materialelor	389
32.1. Rezistența la oboseală	389
32.2. Diagrama rezistențelor la oboseală	390
32.3. Factorii care influențează rezistența la oboseală :	391
32.4. Calculul coeficientului de siguranță la oboseală	393